

2ª Edición

Física General

Volumen 1



José María De Juana

Física General

Volumen I

Física General

Volumen I

JOSÉ MARÍA DE JUANA
Catedrático de Física
Universidad Politécnica de Madrid



Madrid • México • Santafé de Bogotá • Buenos Aires • Caracas • Lima • Montevideo • San Juan
San José • Santiago • São Paulo • White Plains

Datos de catalogación bibliográfica

Física General. Volumen I
José María De Juana

PEARSON EDUCACIÓN, S.A., Madrid, 2003

ISBN: 84-205-3342-4
Materia: Física 53

Formato 215 × 270 Páginas: 560

FÍSICA GENERAL. Volumen I. 2.ª edición
José María De Juana

ISBN: 84-205-3342-4
Depósito legal: M.
PEARSON PRENTICE HALL es un sello editorial autorizado de PEARSON EDUCACIÓN, S.A.

Equipo editorial:
Editora: Isabel Capella
Técnico editorial: Marta Caicoya

Equipo de producción:
Dirección: José Antonio Clares
Técnico: Isabel Muñoz

Diseño de cubierta: Equipo de diseño de PEARSON EDUCACIÓN, S.A.

Composición: COPIBOOK, S.L.

Impreso por:

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

Este libro ha sido impreso con papel y tintas ecológicos

CONTENIDO

PRÓLOGO

El presente libro es el primer volumen de una obra sobre Física General, que se compondrá de dos. El libro está pensado como libro de texto para un primer curso de Física clásica en la universidad, más una asignatura de ampliación de física, ya de segundo curso, dedicada a Física moderna, la cual cada día es más esencial en la moderna ingeniería y que, por falta de tiempo, viene quedando relegada.

Las enseñanzas de Física en primer curso de Universidad deben atender, de manera general, al conocimiento de las leyes físicas impresas en la naturaleza, que nos permitan un conocimiento más profundo de ésta y, en particular, a la formación básica necesaria para seguir con éxito posteriores asignaturas en estudios de ciencias e ingeniería. La ciencia física debe posibilitar la comprensión del mundo real y del comportamiento de la naturaleza, así como la predicción de sucesos futuros, y es fundamento de la tecnología, cuyos desarrollos están directamente ligados al nivel económico-social de los pueblos.

El aumento del número de alumnos, sobre todo en los primeros cursos de universidad, ha hecho necesaria la creación de diversos grupos, cuya docencia es impartida por diferentes profesores. Para conseguir un mínimo de homogeneidad en las enseñanzas, no es suficiente seguir un mismo programa, por detallado que éste sea, es conveniente seguir un mismo texto. Por otra parte, la labor del discente se encuentra muy facilitada si dispone de aquél, ya que le permite su estudio antes de la clase, facilitando el seguimiento de la misma, y le evita la toma de apuntes, permitiendo centrar su atención en las explicaciones, todo lo cual redunda en un mayor aprovechamiento de aquélla.

De otra parte, las enseñanzas de Física, al nivel indicado, entendemos que no deben limitarse a ser meramente informativas, sino que deben ser instrumento netamente formativo para nuestros alumnos. Por ello, debe seguirse, dentro de lo posible a este nivel, un método deductivo, racionalizado, que partiendo de los principios fundamentales, previamente establecidos, construya, con el concurso de las matemáticas, toda la ciencia física a impartir. Hemos huido de exponer una información para ser memorizada, nuestro planteamiento ha sido crear de forma lógica y secuencial la ciencia física, de forma racional y deductiva, lo que sin duda, por otra parte, favorece su memorización.

Se puede afirmar que la Física es la ciencia de la medida; por ello el alumno no solamente tiene que alcanzar un claro y profundo conocimiento de los principios físicos, sino además la posibilidad y habilidad de trabajar con ellos, de aquí que necesite una Física analítica y cuantitativa. En este sentido Lord Kelvin escribió: *nuestro saber será deficiente e insatisfactorio mientras no seamos capaces de traducirlo en números*.

Hemos tenido siempre presente los conocimientos físico-matemáticos de los alumnos que llegan a la universidad, y ello nos ha servido de punto de referencia en la utilización de un método deductivo más o menos riguroso, así como de fiel en el intento de equilibrio entre los métodos empírico y racional.

El contenido del presente tomo está dedicado a Mecánica, Termodinámica, y Ondas, y el segundo lo estará a Electricidad, Electromagnetismo, Óptica y Física Moderna. Hemos preferido esta estructura clásica por entender que es más pedagógica, haciendo notar que en su exposición debe ponerse énfasis en las interrelaciones que existen entre las diferentes partes citadas, así como en el substrato de unidad común a muchas ellas.

El libro está basado en un texto anterior, editado en Alhambra, que ha sido ampliamente modificado: se han incluido epígrafes nuevos, se han explicitado muchas cuestiones y se han incluido un gran número de problemas resueltos. Así mismo, se han incluido lecturas al final de muchos capítulos, en las cuales se dan a conocer biografías de grandes científicos de la física, se desarrollan temas de ampliación o se hacen bosquejos históricos del desarrollo de alguna parte muy concreta de la física, todo lo cual lo consideramos altamente formativo.

Por otra parte, se debe conjugar la materia a impartir con el tiempo de horas de docencia y con el tiempo que el alumno puede dedicar a su estudio, no debemos olvidar lo cargados que suelen estar los planes de estudio, motivo por el cual pueden no impartirse algunos capítulos, en función de las especificidades de cada carrera.

La Física moderna se introduce de forma natural, como necesaria ante la imposibilidad de la clásica para explicar nuevos fenómenos físicos. El bagaje matemático para su desarrollo es evidentemente superior, pero ya hemos indicado que esta asignatura debe estar ubicada en un segundo curso, cuando el alumno ya ha realizado un primer curso de cálculo y álgebra y, en general, está cursando asignaturas de ampliación de matemáticas.

Finalmente, quiero manifestar mi agradecimiento a la editorial y a cuantos han colaborado en la confección de esta obra, haciéndola posible más o menos directa o indirectamente.

Madrid, abril de 2003

EL AUTOR

FÍSICA

La Física es la ciencia que estudia las leyes que rigen las interacciones entre las distintas partes del Universo. La parte del Universo objeto del estudio físico la llamaremos sistema. El sistema más grande que puede ser estudiado es el propio Universo, y la parte de la Física que lo estudia se denomina Cosmología. El sistema más pequeño que puede ser estudiado es una partícula elemental, a cuyo estudio se debe aplicar la Mecánica cuántica. Entre ambos extremos la variedad de sistemas puede ser enorme. Independientemente del tamaño, si la velocidad del sistema objeto de estudio es superior a un décimo de la velocidad de la luz, se hace necesario el concurso de la Mecánica relativista, para que los errores no sean apreciables.

La Física estudia las leyes que la Naturaleza lleva impresas, leyes existentes en el Universo, que éste cumple y a las cuales está sometido. Pero hay que hacer notar que estas leyes no son leyes primeras, ya que ninguna de ellas ha podido darse origen a sí misma, son leyes creadas en la misma esencia de la Naturaleza. Albert Einstein calificaba de milagro el hecho de que los hombres hayan ido construyendo la ciencia física que les va permitiendo conocer el comportamiento del Universo. La parte consciente, inteligente y responsable del Universo es el hombre, y el origen de la Física está en la explicación que el hombre pretende dar de los fenómenos que observa en la Naturaleza. Pero la ciencia física va más allá, ella es capaz de crear conceptos abstractos o inobservables, como pueden ser algunas ondas o los campos, y es capaz de predecir la existencia de entes antes de ser detectados, como es el caso del positrón.

La ciencia física puede dividirse en dos grandes ramas: la Física Clásica, desarrollada hasta finales del siglo XIX, y la Física Moderna, desarrollada a partir de entonces. La Física Clásica se divide usualmente en cinco partes: *Mecánica*, *Termodinámica*, *Ondas*, *Electromagnetismo* y *Óptica*. La *Mecánica* estudia el movimiento y las causas que lo producen o modifican, así como los estados de equilibrio. En ella se estudia una de las cuatro fuerzas fundamentales del Universo: la *fuerza gravitacional*. La *Termodinámica* estudia los procesos energéticos en los cuales interviene el calor como forma de energía. Bajo el epígrafe genérico de *Ondas* estudiamos la propagación de estados o propiedades locales variables con el tiempo, cuya naturaleza es muy diversa. Dentro de éstas, son especialmente impor-

tantes las ondas acústicas, propagadoras del sonido, y las ondas electromagnéticas, propagadoras de la luz. El *Electromagnetismo* estudia los fenómenos de origen eléctrico y magnético, así como las relaciones entre ellos. En él se estudia otra de las cuatro fuerzas fundamentales: *la fuerza electromagnética*. Finalmente, la *Óptica* estudia los fenómenos relacionados con la luz.

El mundo real puede contemplarse desde dos puntos de vista, el microscópico y el macroscópico. En el primero se contempla, al sistema objeto de estudio, en su estructura atómica o molecular, es decir, se considera a la naturaleza discontinua, formada por pequeñísimas partículas (átomos o moléculas); mientras que en el segundo, se considera que los sistemas son un continuo de materia, es decir, tal y como son detectados por nuestros sentidos. En este caso el estado del sistema puede ser definido por un pequeño número de variables macroscópicas; mientras que en el primero, al ser siempre un número muy elevado de partículas las componentes del sistema (del orden de 10^{24} partículas/cm^3), se hace necesario emplear métodos estadísticos para su definición, lo que da origen a la *Mecánica estadística*.

A principios del siglo XX los científicos se enfrentan a nuevos fenómenos físicos como, por ejemplo, la radiación térmica y el efecto fotoeléctrico, que no pueden ser explicados con las teorías clásicas, lo que propicia el nacimiento a la *Física Cuántica*. La Física Clásica queda limitada en su campo de aplicación, al no ser capaz de explicar los fenómenos que se producen a nivél atómico.

Por otra parte, la *Mecánica clásica* y el *Electromagnetismo*, teorías muy consolidadas a finales del XIX, entran en conflicto al evidenciarse que ambas no pueden ser ciertas, lo que da lugar al nacimiento de la *Mecánica Relativista*, la cual engloba a la Clásica como caso particular, únicamente válido para pequeñas velocidades comparadas con la velocidad de la luz.

La aplicación de las mecánicas cuántica y relativista al estudio del átomo ha dado lugar al desarrollo de la Física Atómica, en la cual aparecen las otras dos fuerzas fundamentales de la Naturaleza: la *fuerza nuclear fuerte* y *la fuerza nuclear débil*, que son fuerzas que operan a distancias muy pequeñas y de las cuales no podemos tener información directa mediante nuestros sentidos.

MECÁNICA

Es la parte de la Física que estudia el estado de equilibrio o movimiento de los sistemas materiales. Podemos considerarla dividida en tres partes: la *Cinemática*, que estudia el movimiento sin atender a las causas que lo producen; la *Estática*, que estudia el estado de equilibrio, y la *Dinámica*, que estudia las leyes del movimiento de acuerdo con las causas que los producen (fuerzas).

Aun cuando los primeros estudios sobre Mecánica son debidos a Arquímedes (287-212 a. de C.), que en su libro *Sobre el equilibrio de las superficies* desarrolló las leyes de la palanca y la forma de encontrar el centro de gravedad de un cuerpo, puede decirse que la Mecánica nace, como ciencia experimental, con Kepler (1571-1630), quien en su libro *Mysterium Cosmographicum* (1596) estableció las leyes que rigen los movimientos planetarios, y con Galileo (1564-1642), que estudió las leyes que rigen los movimientos de los cuerpos. Hay que llegar a Newton (1642-1727) para encontrar el nacimiento de la Mecánica como ciencia teórica. Newton emitió tres leyes que han servido de postulados fundamentales para el desarrollo teórico de la Mecánica. La Mecánica basada en estos principios se denomina newtoniana o clásica, y según el profesor Maravall, está construida sobre las reglas de la lógica aristotélica, los postulados de la geometría euclídea, el concepto de existencia de los escolásticos *(las cosas existen fundamentaliter in re formaliter in mente)*, el concepto de tiempo absoluto *(el tiempo transcurre en sí uniformemente sin relación alguna con los objetos reales)*, la definición de punto material *(porción de materia suficientemente pequeña para poder admitir, sin error detectable por la experiencia, que su posición coincide con la del punto geométrico)* y dos postulados comunes a todas las ciencias clásicas de la Naturaleza, el del determinismo científico *(el estado del Universo en un cierto instante determina su estado en todos los instantes posteriores)* y el de causalidad *(si se repite sobre un sistema material aislado una experiencia en las mismas condiciones físicas, salvo las del espacio y tiempo, el curso de los fenómenos no cambia).*

Las restantes partes de la Física están íntimamente relacionadas con la Mecánica, así, la Teoría Cinética de los Gases determina las propiedades macroscópicas de aquellos (presión, temperatura, calores específicos) en función del movimiento y masa de las moléculas que los componen; en Electrostática aparecen fuerzas

entre las partículas cargadas; los campos magnéticos ejercen fuerzas sobre las cargas móviles en su espacio; los conductores recorridos por corrientes eléctricas se ejercen fuerzas entre sí, lo cual se usará para definir el amperio; la Electrodinámica Clásica estudia el movimiento de las partículas cargadas bajo la acción de fuerzas electromagnéticas y, finalmente, el desarrollo de la Física Moderna está basado en conceptos de la Mecánica Clásica.

No obstante, hay dos campos en los cuales no es de aplicación la citada Mecánica Clásica, aquél en el que las velocidades son próximas a la de la luz ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s), caso para el cual es necesaria una teoría más general, la Mecánica Relativista, que engloba como caso particular a la Clásica, y el campo de la escala atómica, a cuyo nivel es necesario tener en cuenta la idea de cuantización debida a Planck, y que ha dado lugar al desarrollo de la Mecánica Cuántica.

Vectores

CAPÍTULO 1

1.1 Magnitudes escalares y vectoriales

Comencemos definiendo lo que es una **magnitud** *como todo aquello susceptible de ser medido*, siendo la **medida** *el resultado de la comparación de una cantidad de una cierta magnitud con la unidad elegida para medir ésta*, y definiendo la **unidad** *como una cantidad arbitraria que se toma de una cierta magnitud, para comparar con ella cantidades de la misma magnitud*.

Evidentemente, el valor de una medida dependerá de la unidad elegida. Así, por ejemplo, una misma distancia puede venir medida por 2 km o por 2 000 m; en el primer caso, hemos tomado como unidad de medida el kilómetro y, en el segundo caso, el metro.

En cualquier caso, para poder medir, se hace necesario definir, para cada magnitud, la igualdad y la suma, es decir, cuándo una cantidad es igual a la unidad y cómo se suman unidades para establecer que una cantidad contiene un cierto número de aquéllas.

En algunas de las magnitudes físicas, que tendremos ocasión de manejar a lo largo de este curso, sus cantidades quedan perfectamente determinadas mediante un número real acompañado de la unidad elegida para medirlas. Así, por ejemplo, decimos que el tiempo de duración de un fenómeno ha sido de 12 segundos o que la temperatura de un cuerpo es de 28 ºC. A este tipo de magnitudes se les denomina *magnitudes escalares*.

Otras magnitudes físicas requieren más de un número real para quedar perfectamente definidas, pues por su propia naturaleza, además de su valor determinado mediante un número real seguido de la unidad correspondiente, es necesario dar la dirección en la que actúan y su sentido. Así, por ejemplo, además de conocer la intensidad de una fuerza, es necesario conocer la dirección de su actuación y su sentido, o para conocer la velocidad de un vehículo es necesario, además de conocer su valor, saber la dirección y el sentido en que se mueve. A este tipo de magnitudes se les denomina *magnitudes vectoriales*. La representación de éstas se hace mediante unos entes denominados vectores, cuyo significado geométrico es el de ser segmentos orientados y que están caracterizados por tres atributos: *módulo*, *dirección* y *sentido* (Figura 1.1).

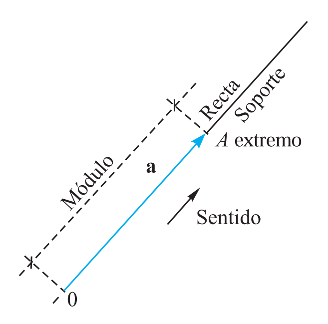


Figura 1.1.

Módulo es la longitud del segmento que lo representa; dirección es la de la recta soporte a la que el segmento pertenece; y sentido el que se le da fijando uno de los extremos del segmento como origen y el otro como extremo, lo que se indica mediante una flecha.

La notación empleada para designar un vector es una letra, que hace referencia a la naturaleza física de la magnitud que representa. En las publicaciones impresas se simboliza mediante el tipo de letra negrita, **v**, y en la escritura manual se coloca una pequeña flecha sobre la letra que simboliza al vector, $\vec{v}$, o dos letras juntas, origen y extremo del vector, bien en negrita o sobre las cuales se coloca la flecha, **OA**. El módulo se expresa, simplemente, con la letra que simboliza al vector sin negrita ni flecha, v, o encerrando el símbolo del vector entre dos barras verticales, $|v|$.

Categorías de vectores

Los vectores pueden clasificarse en tres categorías: *libres*, *deslizantes* y *localizados*. Un vector *libre* queda definido al conocer su módulo, su dirección y su sentido, aunque también puede ser definido por otros tres parámetros distintos de los anteriores, como posteriormente veremos; a esta categoría pertenecen, por ejemplo, los vectores que representan la presión que ejerce un fluido en reposo sobre el fondo plano y horizontal de la vasija que lo contiene. Un vector *deslizante* queda definido cuando, además de ser conocido como libre, está determinada la recta soporte sobre la que actúa, siendo cinco, según se verá, los parámetros necesarios para su definición; a esta categoría pertenecen, por ejemplo, las fuerzas aplicadas sobre los sólidos rígidos. Un vector *localizado* queda definido al conocerlo como libre y estar determinado su punto de aplicación, por tanto, serán seis los parámetros necesarios para determinar un vector como localizado; a esta categoría de vectores pertenecen, por ejemplo, los vectores representativos de las velocidades lineales.

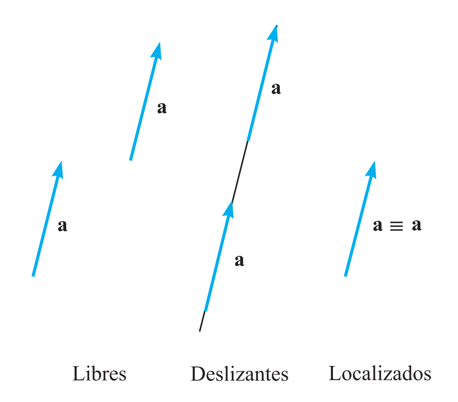


Figura 1.2. Igualdad de vectores

En consecuencia, dos vectores libres serán iguales cuando tengan igual módulo, dirección y sentido; dos vectores deslizantes serán iguales cuando tengan igual módulo, sentido y recta soporte; y dos vectores localizados serán iguales cuando tengan igual módulo, dirección, sentido y punto de aplicación; por tanto, un vector localizado sólo puede ser igual a sí mismo (Figura 1.2).

Un vector libre del mismo módulo, dirección y sentido que uno deslizante se dice que es *equipolente* de aquél.

Cada magnitud vectorial física, dependiendo de su naturaleza, puede ser representada por una de estas tres clases de vectores. Incluso dependiendo de la naturaleza del problema físico, una misma magnitud puede considerarse representada por una u otra clase de vectores. Así, por ejemplo, una fuerza, según que actúe sobre un cuerpo rígido o deformable, podrá considerarse como un vector deslizante o localizado, respectivamente, pues el efecto que produce sobre un cuerpo deformable es distinto al variar su punto de aplicación dentro de la misma recta soporte. En la Figura 1.3 puede observarse el distinto efecto que produce la misma fuerza, al ser aplicada sobre un cuerpo deformable, cuando variamos su punto de aplicación, A o B, a pesar de mantener la misma dirección, sentido y módulo.

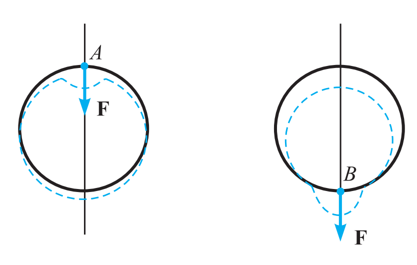


Figura 1.3.

Existe una tercera clase de magnitudes cuya determinación, en nuestro espacio real de tres dimensiones, exige el conocimiento de nueve escalares, las cuales se denominan *magnitudes tensoriales*. Como ejemplo citaremos el estado de tensiones en un punto del interior de un cuerpo sólido sometido a fuerzas exteriores. El estudio de este tipo de magnitudes cae fuera de los objetivos de este curso y será tratado en cursos posteriores.

1.2 Álgebra vectorial

Dado que muchas de las magnitudes físicas son de carácter vectorial, se hace imprescindible conocer las leyes que rigen las operaciones entre vectores, pues el

manejo de las magnitudes físicas vectoriales lo haremos siempre a través de los vectores que las representen, con lo que conseguiremos una más exacta interpretación de los fenómenos y una gran comodidad en el trabajo, ya que las expresiones vectoriales son concisas, sencillas e independientes del sistema de referencia elegido.

Nuestro espacio geométrico es tridimensional; homogéneo, todos sus puntos tienen las mismas propiedades; isótropo, no tiene direcciones privilegiadas, y euclideo, es decir, verifica las definiciones, axiomas y postulados establecidos por Euclides (300 a. C.).

En el presente capítulo nos referiremos a operaciones con vectores libres.

1.3 Suma geométrica de vectores

Sean los vectores **a** = **AB** y **b** = **MN**, para sumar al **a** el **b**, tracemos por el extremo del primero un vector **BP** igual al segundo (Figura 1.4). Por definición, el vector suma **s** = **a** + **b** es el que tiene por origen el de **a** y por extremo el de **b**, cuando ha sido colocado de la forma indicada, es decir, **s** = **AP**.

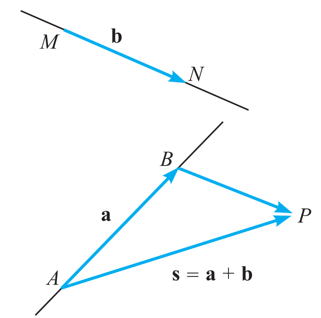


Figura 1.4.

La suma de vectores goza de las siguientes propiedades:

a) *Es conmutativa:* **a** + **b** = **b** + **a**.

Sean **a** y **b** los dos vectores de la Figura 1.5. Su suma, **a** + **b**, de acuerdo con la definición, es el vector **AC**. Sumemos ahora al **b** el **a**, obteniendo como suma el vector **b** + **a** = **BD**. El cuadrilátero *ABCD* es un paralelogramo, pues tiene dos lados paralelos e iguales, *AB* y *CD*; los otros dos también lo serán, *AC* = *BD*. Además, *AC* es paralelo a *BD*, y dado que el sentido de *AC* y el de *BD* es también el mismo, resulta:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{AC} = \mathbf{BD} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

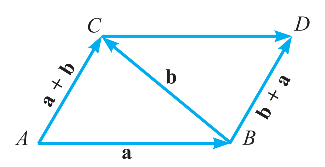


Figura 1.5.

b) *Es asociativa:* (**a** + **b**) + **c** = **a** + (**b** + **c**).

Dados tres vectores, **a**, **b** y **c**, tomemos por el extremo del primero como origen el vector **b** y por el extremo de éste como origen tomemos el vector **c** (Figura 1.6), se verifica:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{AC} + \mathbf{c} = \mathbf{AD}$$

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} + \mathbf{BD} = \mathbf{AD}$$

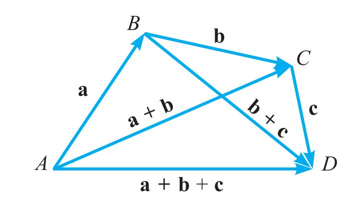


Figura 1.6.

luego se cumple la propiedad asociativa, pudiendo escribirse sin lugar a ambigüedad:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{AD}$$

Esto nos permite definir la *suma de n vectores* como *el vector que tiene por origen el del primero de ellos y como extremo el del último, cuando todos ellos se han ido colocando tomando como origen el extremo del anterior*.

c) *Existe el vector nulo* **0**:

El vector nulo es el que verifica **a** + **0** = **a**.

Este vector aparece al sumar *n* vectores y coincidir el extremo del último con el origen del primero.

d) *Existe el vector opuesto:* −**a**.

Vector opuesto al **a** es el que verifica **a** + **Opuesto a** = **0**. Tomando el extremo de **a** como origen del vector opuesto **Op**, para que la suma **a** + **Op** sea nula, el

extremo del vector **Op** debe coincidir con el origen del **a**, por lo cual el vector opuesto al **a** tiene igual módulo y dirección que éste, y sentido contrario y, en consecuencia, es $-\mathbf{a}$.

1.4 Sustracción de vectores

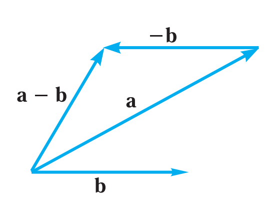


Figura 1.7.

Por definición, *para restar de un vector* **a** *otro* **b** *se suma al* **a** *el vector opuesto del* **b** (Figura 1.7):

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$

1.5 Multiplicación de un vector por un escalar

El producto del escalar m por el vector **a** es un nuevo vector, $m\mathbf{a}$, cuyo módulo es el del vector multiplicado por el escalar, ma; la dirección es la misma del vector **a** y el sentido el mismo, si es $m > 0$, siendo de sentido contrario, si es $m < 0$. En particular, cuando es $m = -1$, el producto $m\mathbf{a} = -\mathbf{a}$ nos da el vector opuesto del **a**.

La multiplicación de un vector por un escalar cumple las siguientes propiedades:

a) *Ley asociativa:* $m(n\mathbf{a}) = (mn)\mathbf{a}$.

Los vectores $m(n\mathbf{a})$ y $(mn)\mathbf{a}$ tienen la misma dirección, que es la del **a**; el mismo sentido, que será el de **a,** si es $mn > 0$, y el opuesto, si es $mn < 0$, y el mismo módulo, ya que es:

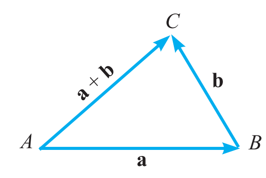
$$|m(n\mathbf{a})| = |(mn)\mathbf{a}| = mn|\mathbf{a}|$$

b) *Ley distributiva respecto a la adición de escalares:* $(m + n)\mathbf{a} = m\mathbf{a} + n\mathbf{a}$.

Los vectores $(m + n)\mathbf{a}$ y $m\mathbf{a} + n\mathbf{a}$ tienen la misma dirección, que es la del **a**; el mismo sentido, que será el del **a** si es $m + n > 0$, y el opuesto, si es $m + n < 0$, y el mismo módulo, ya que es:

$$|(m + n)\mathbf{a}| = |m\mathbf{a}| + |n\mathbf{a}| = (m + n)|\mathbf{a}|$$

c) *Ley distributiva respecto a la adición de vectores:* $m(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = m\mathbf{a} + m\mathbf{b}$.



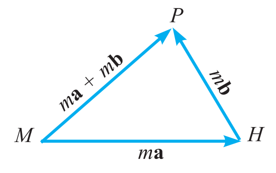


Figura 1.8.

Hallemos las sumas $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{AC}$ y $m\mathbf{a} + m\mathbf{b} = \mathbf{MP}$ (Figura 1.8).

Los triángulos *ABC* y *MNP* son semejantes por tener dos lados proporcionales y el ángulo comprendido igual. La razón de proporcionalidad es m y, por tanto, el tercer lado verificará:

$$\mathbf{MP} = m\mathbf{AC} \quad \text{o} \quad m\mathbf{a} + m\mathbf{b} = m(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

d) *Existe el escalar* $m = 1$ *que verifica* $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

1.6 Vector unitario o versor

Un *vector unitario o versor* es todo vector cuyo módulo es igual a la unidad. Al multiplicar un vector por la inversa de su módulo, obtenemos el vector unitario de su dirección. Evidentemente, después de lo establecido para la multiplicación de

un vector por un escalar, podremos expresar todo vector como el producto de su módulo por el vector unitario de su dirección (Figura 1.9):

$$\mathbf{a} = a\mathbf{u} \qquad [1.1]$$

y, en consecuencia, el vector unitario de la dirección y sentido de uno dado **a** es igual a éste dividido por su módulo:

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}/a \qquad [1.2]$$

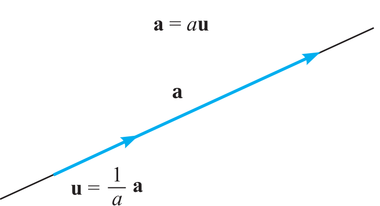


Figura 1.9.

1.7 Espacio vectorial

Un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales es el conjunto de todos los elementos, denominados vectores, que cumplen las dos leyes estudiadas: adición de vectores y multiplicación de un vector por un escalar, con todas sus propiedades. Por tanto, el conjunto de vectores representativo de una magnitud vectorial física constituirá un determinado espacio vectorial. Así, tendremos el espacio vectorial de las velocidades, de las aceleraciones, etc.

1.8 Dependencia lineal de vectores

Un conjunto de vectores $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n\}$ pertenecientes a un cierto espacio vectorial se dice que son linealmente dependientes, cuando existen escalares c_i no todos nulos que verifican:

$$\sum_i c_i \mathbf{a}_i = 0 \qquad [1.3]$$

El conjunto A se dice linealmente independiente si la única solución de [1.3] es $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

1.9 Dimensión y base de un espacio vectorial

Sea **V** un cierto espacio vectorial. Si **V** contiene únicamente el elemento nulo $\mathbf{V} = (0)$, diremos que la dimensión de **V** es cero. Si **V** contiene al menos un conjunto A de n vectores linealmente independientes y todo conjunto con más de n vectores de **V** es linealmente dependiente, diremos que el espacio vectorial **V** tiene dimensión n.

Base del espacio

Se llama base de un espacio vectorial al conjunto de vectores $A(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n)$ linealmente independientes y tal que todo vector del espacio es linealmente dependiente de A.

LEMA I. Si $A(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n)$ es una base de cierto espacio vectorial, cualquier vector de este espacio puede expresarse de forma única en función de los de A.

Por ser A base del espacio vectorial considerado, cualquier vector **a** de este espacio será linealmente dependiente de A y podrá expresarse de la forma:

$$\mathbf{a} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n$$

Supongamos que existe otra forma de expresión:

$$\mathbf{a} = d_1\mathbf{a}_1 + d_2\mathbf{a}_2 + \cdots + d_n\mathbf{a}_n$$

al restar ambas expresiones resulta:

$$0 = (c_1 - d_1)\mathbf{a}_1 + (c_2 - d_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (c_n - d_n)\mathbf{a}_n$$

Y puesto que el conjunto A era linealmente independiente, deberá ser:

$$c_1 - d_1 = 0, \quad c_2 - d_2 = 0, \ldots, \quad c_n - d_n = 0$$

o

$$c_1 = d_1, \quad c_2 = d_2, \ldots, \quad c_n = d_n$$

LEMA II. Si $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ es un conjunto de vectores independientes y $\mathbf{a}$ un vector linealmente independiente de A, el conjunto compuesto por los vectores del A y $\mathbf{a}$ es también independiente.

Supongamos lo contrario, es decir, que los vectores $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ son linealmente dependientes:

$$c\mathbf{a} + c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n = 0 \qquad [1.4]$$

Podrá suceder únicamente que sea $c \neq 0$ o bien $c = 0$. En el primer caso podemos despejar $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a} = \left(-\frac{c_1}{c}\right)\mathbf{a}_1 + \left(-\frac{c_2}{c}\right)\mathbf{a}_2 + \cdots + \left(-\frac{c_n}{c}\right)\mathbf{a}_n$$

lo que contradice la hipótesis de ser $\mathbf{a}$ independiente de A.

Si es $c = 0$, de [1.4] resulta $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n = 0$, lo que contradice la hipótesis de ser el conjunto A linealmente independiente, salvo que sea $c_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, y entonces el conjunto $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ es linealmente independiente.

LEMA III. Si un espacio vectorial tiene dimensión n, cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes es una base de él.

Puesto que la dimensión del espacio considerado es n, existirá al menos un conjunto A de n vectores linealmente independientes y todo conjunto con más de n vectores será dependiente del A. Supongamos que un vector $\mathbf{a}$ del espacio en cuestión no dependa de A; entonces, por el Lema II, el conjunto $(A, \mathbf{a})$ es linealmente independiente; pero al tener $n + 1$ vectores, por definición de dimensión debe ser linealmente dependiente, contradicción debida a ser falsa la hipótesis. Lo que demuestra que todo vector $\mathbf{a}$ del espacio es dependiente de A y, por tanto, A es la base de este espacio.

La gran mayoría de las magnitudes físicas clásicas pertenecen a un espacio vectorial de tres dimensiones, $n = 3$, y de aquí que se representen por los vectores del espacio tridimensional real.

Hay campos de la Física en los que nos veremos obligados a trabajar en espacios de más de tres dimensiones. Así, al estudiar la Teoría de la Relatividad Restringida utilizaremos un espacio cuadrimensional, denominándose a los vectores de cuatro dimensiones cuadrivectores; al estudiar Mecánica Estadística utilizaremos un espacio de n dimensiones, y en estudios sobre Mecánica Cuántica utilizaremos espacios vectoriales de infinitas dimensiones.

1.10 Unidades. Sistemas de unidades y ecuaciones de dimensiones

Cualquiera que sea el número de dimensiones del espacio de referencia en el que nos veamos obligados a trabajar, se toma como patrón una unidad U para cada

espacio de magnitudes. Una cantidad X de la magnitud de un cierto espacio puede expresarse siempre de la forma:

$$X = Ux = U'x' \quad [1.5]$$

En la que x es la medida de esta cantidad cuando hemos tomado la unidad U, pero esa medida será x' cuando la unidad elegida sea U'. Para comparar cantidades de la misma magnitud es necesario efectuar sus medidas con la misma unidad.

Las leyes físicas relacionan entre sí medidas de magnitudes de distinta naturaleza y su expresión analítica es de la forma general:

$$x = Kx_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{a_n} \quad [1.6]$$

en la que K es una constante y a_1, a_2, ..., a_n son números racionales positivos o negativos.

Magnitudes fundamentales

Las *magnitudes físicas* se dicen *fundamentales* cuando son independientes entre sí, es decir, no hay ley física que las relacione. Las unidades que tomemos para la medida de éstas, las denominaremos *unidades fundamentales*.

Magnitudes derivadas

Toda magnitud física relacionada con las fundamentales mediante una ley física, se denomina *magnitud derivada*. Sus unidades se denominarán derivadas y se obtendrán mediante una relación del tipo [1.6] entre las unidades de las magnitudes fundamentales.

Como magnitudes fundamentales comunes a todos los campos de la Física, se han tomado la longitud y el tiempo; ellas son suficientes para desarrollar la Cinemática; en los demás campos de la Mecánica se hace necesario utilizar una tercera magnitud fundamental, que puede ser la masa o la fuerza, dándose así origen a los sistemas C.G.S. o M.K.S., por un lado, y al técnico, por otro. En los restantes campos de la Física es necesaria una cuarta magnitud fundamental, tomándose, en Termodinámica, la temperatura; en Óptica, la intensidad luminosa y en Electricidad, la intensidad de corriente eléctrica.

Sistemas de unidades

Un *sistema de unidades* queda definido cuando se han elegido sus magnitudes fundamentales con sus respectivas unidades de medida. A partir de estas y mediante las correspondientes leyes físicas se deducirán las magnitudes y unidades derivadas.

El *sistema M.K.S.* de la Mecánica es el que utiliza, como unidades fundamentales, el *metro*, para la longitud; el *kilogramo*, para la masa, y el *segundo*, para el tiempo. Este sistema ha pasado a formar parte del Sistema Internacional (S.I.), adoptado oficialmente en España mediante disposición aparecida en el *BOE* del 10 de noviembre de 1967.

El *metro* fue definido en la XI Conferencia General de Pesas y Medidas, en 1960, como *la longitud cuyo valor es igual a 1 650 763,73 longitudes de onda en el vacío de la radiación correspondiente a la transición entre los niveles* $2p_{10}$ *y* $5d_5$ *del átomo de kripton 86*.

El *kilogramo* quedó definido en 1901, por la III Conferencia General de pesas y Medidas, como *la masa del prototipo internacional*, *consistente en un bloque cilíndrico de platino iridiado*, *cuya altura y diámetro son iguales y que está depositado en el Pabellón de Breteuil de la Oficina Internacional de Pesas y Medidas*, *en Sevres*.

El *segundo* fue definido en 1968, por la XIII Conferencia General de Pesas y Medidas, como *la duración de 9 192 631 770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133*.

Para ciertas medidas es más cómodo utilizar múltiplos o submúltiplos de la unidad, cuya denominación se consigue colocando un prefijo al nombre de la unidad, y cuyo símbolo y significado recogemos en la Tabla 1.1.

Tabla 1.1. Múltiplos y submúltiplos de la unidad

Símbolo	Prefijo	Exponente
y	yocto-	10^{-24}
z	zepto-	10^{-21}
a	atto-	10^{-18}
f	femto-	10^{-15}
p	pico-	10^{-12}
n	nano-	10^{-9}
μ	micro-	10^{-6}
m	mili-	10^{-3}
K	kilo-	10^{3}
M	mega-	10^{6}
G	giga-*	10^{9}
T	tera- (billón)	10^{12}
P	peta-	10^{15}
E	exa-	10^{18}
Z	zetta-	10^{21}
Y	yotta-	10^{24}

* En algunos países se denomina billón a 10^9.

Se recomienda que el valor numérico que representa la medida esté siempre comprendido entre 1 y 1 000. Así, no debe decirse 12 000 m, sino 12 kilómetros.

También hay recomendaciones internacionales sobre la escritura correcta de números y unidades. Para la escritura de números, las cifras se agruparán de tres en tres a partir de la coma, tanto hacia la derecha como hacia la izquierda, dejando un pequeño espaciamiento entre cada grupo de cifras y prescindiendo por completo de los puntos. Así, debe escribirse 245 629,324 62 y no 245.629,32462. En la escritura de unidades, o de sus múltiplos o submúltiplos se colocará el símbolo correspondiente y nunca se le colocará un punto a continuación. Para simbolizar la multiplicación se utilizará el punto entre las letras y el aspa entre números, así: $a \cdot b$ o 2×3.

El *sistema C.G.S.* es una variante del anterior, pues utiliza el centímetro en lugar del metro y el gramo en lugar del kilogramo.

El *sistema técnico* tiene como magnitudes fundamentales la longitud, la fuerza y el tiempo, siendo la masa una magnitud derivada. Las unidades de longitud y tiempo son las mismas del S.I. y como unidad de fuerza toma el *kilogramofuerza* (kf) o *kilopondio* (kp), definiéndolo como *la fuerza con que la Tierra atrae a un cuerpo de masa 1 kg en un lugar de aceleración normal* $g_0 = 9{,}806\,65\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Ecuación de dimensiones

Cada magnitud fundamental se representa por un símbolo, que en el sistema internacional (S.I.) y para las magnitudes mecánicas son: L, para la longitud; M, para la masa, y T, para el tiempo. Si en la expresión de una ley física, sustituimos cada magnitud fundamental por su símbolo, obtendremos la llamada *ecuación de dimensiones* de la magnitud derivada de que se trate.

Homogeneidad

Coherencia

La ecuación de dimensiones nos permite establecer la *homogeneidad* de las fórmulas físicas, diciéndose que una expresión es homogénea cuando ambos miembros tienen la misma ecuación de dimensiones. Asimismo, nos facilita el establecimiento de la *coherencia* entre unidades físicas, diciéndose que una serie de unidades son coherentes entre sí, cuando la ecuación de dimensiones de la ley física que las relaciona no contiene factor numérico multiplicativo, salvo la unidad.

1.11 Cambio de sistema de unidades

Un sistema de unidades U, U_1, U_2, ..., U_n, para el cual es $X = Ux$, $X_1 = U_1x_1$, $X_2 = U_2x_2$, ..., $X_n = U_nx_n$, se dice que es acorde con una ley física, como la [1.6], cuando verifica:

$$x = Kx_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{a_n} \quad [1.7]$$

Un nuevo sistema de unidades U', U'_1, U'_2, ..., U'_n, para el cual son $X = U'x'$, $X_1 = U'_1x'_1$, $X_2 = U'_2x'_2$, ..., $X_n = U'_nx'_n$, se dice que no es acorde con una cierta ley física cuando cambia la constante de la misma, es decir, cuando verifica:

$$x' = K'x_1'^{a_1} \cdot x_2'^{a_2} \cdot \cdots \cdot x_n'^{a_n} \quad [1.8]$$

El cociente entre [1.7] y [1.8] es:

$$\frac{x}{x'} = \frac{K}{K'} \left(\frac{x_1}{x'_1}\right)^{a_2} \left(\frac{x_2}{x'_2}\right)^{a_2} \cdots \left(\frac{x_n}{x'_n}\right)^{a_n}$$

que, en función de las unidades de los respectivos sistemas, se escribe:

$$\frac{U'}{U} = \frac{K}{K'} \left(\frac{U'_1}{U_1}\right)^{a_1} \left(\frac{U'_2}{U_2}\right)^{a_2} \cdots \left(\frac{U'_n}{U_n}\right)^{a_n}$$

relación que nos permite cambiar de sistema de unidades en la expresión de una ley física, al darnos el coeficiente K' de la expresión correspondiente al nuevo sistema de unidades:

$$K' = K \cdot \frac{U}{U'} \left(\frac{U'_1}{U_1}\right)^{a_1} \left(\frac{U'_2}{U_2}\right)^{a_2} \cdots \left(\frac{U'_n}{U_n}\right)^{a_n} \quad [1.9]$$

Una misma ley física, en un cierto sistema de unidades se expresa mediante una relación como la [1.7], mientras que en otro sistema de unidades se expresa mediante la [1.8], estando dado el coeficiente K' por la Ecuación [1.9].

EJEMPLO 1.1

En un movimiento circular se verifica la ley física:

$$F_n = \frac{m\,v^2}{r}$$

acorde con el sistema internacional de unidades. ¿Cómo debe transformarse la ley para que F siga viniendo en N, cuando m se expresa en g, v, en cm/s y r en cm?

Solución:

Magnitudes	$X = F$	$X_1 = M$	$X_2 = L$	$X_3 = v$
Unidades antiguas	$U = \text{N}$	$U_1 = \text{kg}$	$U_2 = \text{m}$	$U_3 = \text{m/s}$
Unidades nuevas	$U = \text{N}$	$U'_1 = \text{gr}$	$U'_2 = \text{cm}$	$U'_3 = \text{cm/s}$

Al comparar la expresión dada con la [1.7], se deduce que es $k = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$ y $a_3 = 2$.

La nueva ley será de la forma:

$$F_n = k' \frac{m v^2}{r}$$

siendo:

$$k' = \frac{U}{U'}\left(\frac{U_1'}{U_1}\right)\left(\frac{U_2'}{U_2}\right)^{-1}\left(\frac{U_3'}{U_3}\right)^2$$

y puesto que es:

$$\frac{U}{U'} = 1 \quad , \quad \frac{U_1'}{U_1} = \frac{\text{gr}}{\text{kg}} = 10^{-3}$$

$$\frac{U_2'}{U_2} = \frac{\text{cm}}{\text{m}} = 10^{-2} \quad \text{y} \quad \frac{U_3'}{U_3} = \frac{\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}} = 10^{-2}$$

resulta:

$$k' = 10^{-3} \cdot (10^{-2})^{-1} \cdot (10^{-2})^2 = 10^{-5}$$

y la ley física se expresa ahora:

$$F = 10^{-5} \frac{m v^2}{r}$$

EJEMPLO 1.2

La potencia desarrollada por una máquina viene dada por la expresión:

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

ley coherente con el Sistema Internacional de unidades. ¿Cómo debemos transformar la expresión para que dé P en CV, cuando se exprese $\mathbf{F}$ en kp y $\mathbf{v}$ en km/h?

Solución:

Magnitudes	$X \equiv P$	$X_1 \equiv F$	$X_2 \equiv v$
Unidades anteriores	$U = \text{J} \cdot \text{s}^{-1}$	$U_1 = \text{N}$	$U_2 = \text{m} \cdot \text{s}^1$
Unidades nuevas	$U' = \text{CV}$	$U_1' = \text{kp}$	$U_2' = \text{km/h}$

De la expresión dada se deduce, al compararla con la expresión general [1.7], que es $k = 1$, $a_1 = 1$ y $a_2 = 1$.

La nueva ley buscada es de la forma:

$$P = k' \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

siendo:

$$k' = k \cdot \frac{U}{U'} \cdot \frac{U_1'}{U_1} \cdot \frac{U_2'}{U_2}$$

Calculemos las relaciones entre las respectivas unidades:

$$\frac{U}{U'} = \frac{\text{J} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{CV}} = \frac{\text{J} \cdot \text{s}^{-1}}{75 \text{ g} \cdot \text{J} \cdot \text{s}^{-1}} = \frac{1}{75 \text{ g}}$$

$$\frac{U_1'}{U_1} = \frac{\text{kp}}{\text{N}} = \frac{\text{g} \cdot \text{N}}{\text{N}} = \text{g}$$

$$\frac{U_2'}{U_2} = \frac{\text{km/h}}{\text{m/s}} = \frac{\text{km} \cdot \text{s}}{\text{m} \cdot \text{h}} = \frac{10^3 \text{ m} \cdot \text{s}}{\text{m} \cdot 36\,000} = \frac{5}{18}$$

Por tanto, será:

$$k' = 1 \cdot \frac{1}{75 \text{ g}} \cdot \text{g} \cdot \frac{5}{18} = \frac{1}{15 \times 18} = \frac{1}{270}$$

y la ley buscada:

$$P = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{270}$$

1.12 Sistema cartesiano trirrectangular de referencia

Para referir los desarrollos teóricos y las aplicaciones vectoriales elegimos como sistema de referencia el trirrectangular a derechas, es decir, el formado por tres ejes *OX*, *OY*, *OZ*, perpendiculares dos a dos y orientados de forma que al girar la cabeza de un sacacorchos en el sentido que va de *OX* a OY, por el camino más corto, la punta avanza en el sentido positivo del eje *OZ* (Figura 1.10). Este sistema de referencia se denomina cartesiano por haber sido ideado por el matemático y filósofo francés Renato Descartes (1596-1650). El sistema a derechas también se denomina directo, destrorsum o dextrógiro.

Por el contrario, si al hacer girar la cabeza del sacacorchos en el sentido que va del eje *OX* al *OY* por el menor camino, la punta avanzase en sentido contrario a la dirección positiva del eje *OZ*, se dice que el sistema de referencia es a izquierdas, inverso, sinistrorsum o levógiro.

Sobre cada uno de los ejes tomaremos un vector unitario que denominaremos, respectivamente, **i**, **j**, **k**, y que constituyen los vectores fundamentales o base del sistema de referencia.

Evidentemente, al ser el espacio tridimensional, en virtud del Lema III, un conjunto de tres vectores linealmente independientes es una base de él. La terna de vectores elegidos son independientes entre sí, pues están dirigidos según las tres dimensiones del espacio, independientes entre sí. Todo vector **a** en este espacio dependerá de esta base y podrá expresarse, de acuerdo con el Lema I, de forma única en función de los vectores de la base.

Figura 1.10.

1.13 Componentes, módulos, cosenos directores y expresión analítica de un vector

Dado un vector **a**, siempre puede verse como suma geométrica, de tres vectores: $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$ y $\mathbf{a}_z$, que son la proyección del vector sobre cada uno de los ejes del sistema de referencia (Figura 1.11):

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z \qquad [1.10]$$

De acuerdo con lo indicado para la multiplicación de un vector por un escalar, podemos escribir:

$$\mathbf{a}_x = a_x\mathbf{i}, \quad \mathbf{a}_y = a_y\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}_z = a_z\mathbf{k} \qquad [1.11]$$

denominándose componentes del vector a los valores a_x, a_y y a_z, módulos de las proyecciones del vector sobre cada uno de los ejes de referencia. Ellas serán positivas o negativas, según que tengan el mismo sentido que el correspondiente vector de base **i**, **j**, **k**, o el opuesto, respectivamente.

A cada vector le corresponde una terna de componentes única y, recíprocamente, cada terna de componentes define un solo vector; hay, pues, una correspondencia biunívoca. De aquí que un vector se exprese mediante sus tres componentes, $\mathbf{a}(a_x, a_y, a_z)$. Concretamente, los vectores de la base se expresan:

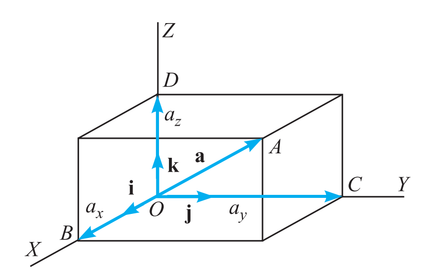


Figura 1.11.

$$\mathbf{i}(1, 0, 0), \quad \mathbf{j}(0, 1, 0) \quad \text{y} \quad \mathbf{k}(0, 0, 1)$$

El *módulo* del vector es el valor de la diagonal de un paralelepípedo recto rectángulo cuyas aristas son las componentes del vector, de aquí que sea:

$$a = (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)^{1/2} \qquad [1.12]$$

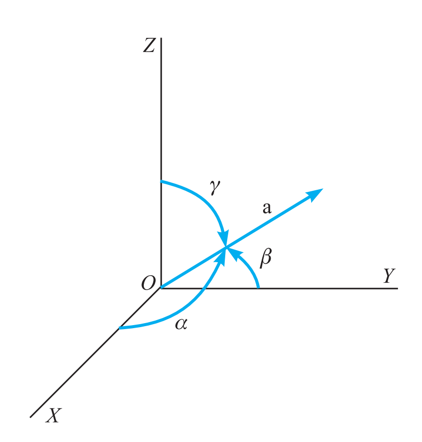


Figura 1.12.

Los *cosenos directores* de la dirección de un vector, son los cosenos de los ángulos que la dirección del vector forma con los ejes del sistema de referencia. Sus valores son:

$$\cos\alpha = a_x/a, \quad \cos\beta = a_y/a \quad \text{y} \quad \cos\gamma = a_z/a \qquad [1.13]$$

Es evidente que las componentes de un vector unitario coinciden con los cosenos directores de su dirección, de aquí que para determinar los cosenos directores de una dirección sea suficiente hallar el vector unitario de la misma. Sea el vector unitario **u**, las relaciones [1.13] son: $\cos\alpha = u_x$, $\cos\beta = u_y$ y $\cos\gamma = u_z$, y la [1.12] nos da:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad [1.14]$$

que es una importante relación entre los cosenos directores.

Llevando [1.11] a [1.10] se obtiene:

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

que es la expresión analítica del vector **a**, expresado en la base de referencia **i**, **j**, **k**, y que va a permitir trabajar analíticamente con los vectores, lo cual representa una gran ventaja en cuanto a facilidad de cálculo se refiere.



EJEMPLO 1.3

De un cierto vector **a** se conoce su módulo $a = 2$, el valor de su componente $a_y = 1$ y el ángulo que forma con el eje OX, $\alpha = 60^\circ$. Calculemos las componentes a_x y a_z, así como los ángulos que forma con los ejes OY y OZ.

Solución:

Puesto que es $\cos\alpha = a_x/a$, podemos despejar a_x:

$$a_x = a \cdot \cos 60^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

Asimismo, puesto que es $\cos\beta = a_y/a = 1/2$, se obtiene $\beta = 60^\circ$. De la relación $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, se obtiene:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{a_z^2}{4} = 1$$

de donde:

$$a_z = \pm\sqrt{2}$$

y con ello:

$$\cos\gamma = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

y:

$$\gamma = 45^\circ \quad \text{o} \quad \gamma = 135^\circ$$

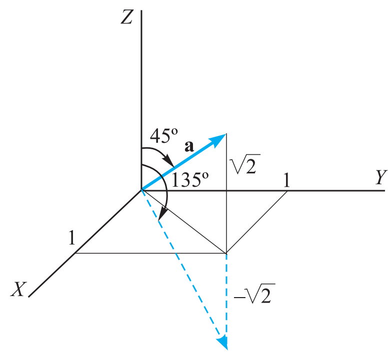


Figura 1.13.

1.14 Suma analítica de vectores

Consideremos los vectores:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= a_{1x}\,\mathbf{i} + a_{1y}\,\mathbf{j} + a_{1z}\,\mathbf{k}\\
\mathbf{a}_2 &= a_{2x}\,\mathbf{i} + a_{2y}\,\mathbf{j} + a_{2z}\,\mathbf{k}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mathbf{a}_n &= a_{nx}\,\mathbf{i} + a_{ny}\,\mathbf{j} + a_{nz}\,\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro y teniendo en cuenta la ley asociativa de la suma de vectores, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n = {} & (a_{1x}\,\mathbf{i} + a_{2x}\,\mathbf{i} + \cdots + a_{nx}\,\mathbf{i}) +\\
& + (a_{1y}\,\mathbf{j} + a_{2y}\,\mathbf{j} + \cdots + a_{ny}\,\mathbf{j}) +\\
& + (a_{1z}\,\mathbf{k} + a_{2z}\,\mathbf{k} + \cdots + a_{nz}\,\mathbf{k})
\end{aligned}$$

y de acuerdo con la ley distributiva respecto a la adición de escalares del producto de un vector por un escalar, resulta:

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n = (a_{1x} + a_{2x} + \cdots + a_{nx})\mathbf{i} +$$
$$+ (a_{1y} + a_{2y} + \cdots + a_{nx})\mathbf{j} + (a_{1z} + a_{2z} + \cdots + a_{nz})\mathbf{k}$$

Por tanto, *el vector suma tiene de componentes a la suma de las respectivas componentes de los vectores sumandos.*

1.15 Expresión analítica del producto de un vector por un escalar

Sea el escalar m y el vector $\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$. Teniendo en cuenta la ley distributiva respecto a la adición de vectores para el producto de un vector por un escalar, se verificará:

$$m\mathbf{a} = m(a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}) = ma_x\,\mathbf{i} + ma_y\,\mathbf{j} + ma_z\,\mathbf{k}$$

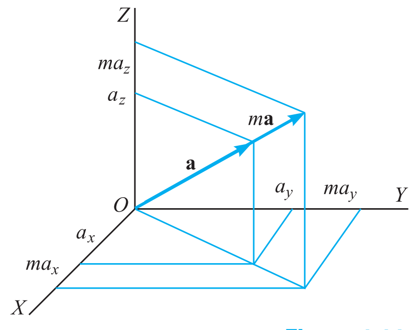


Figura 1.14.

y, por tanto, *el vector producto de un vector por un escalar tiene por componentes el producto de la respectiva componente del vector por el escalar.*

1.16 Producto escalar de dos vectores

El producto escalar de dos vectores es un escalar, cuyo valor es el producto de los módulos de los vectores por el coseno del ángulo que forman.

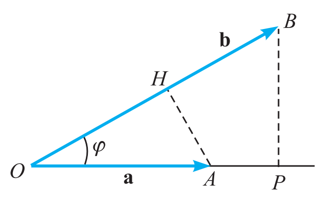


Figura 1.15.

Dados dos vectores $\mathbf{a}(a_x, a_y, a_z)$ y $\mathbf{b}(b_x, b_y, b_z)$, su producto escalar se expresa:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \varphi \qquad [1.15]$$

Teniendo en cuenta que la proyección del vector **b** sobre el **a** (Figura 1.15) es:

$$\text{proy}_a \mathbf{b} = OP = b \cos \varphi$$

y que la proyección del **a** sobre el **b** es:

$$\text{proy}_b \mathbf{a} = OH = a \cos \varphi$$

el producto escalar se puede escribir:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \, \text{proy}_a \mathbf{b} = b \, \text{proy}_b \mathbf{a}$$

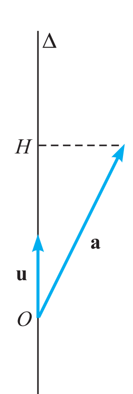


Figura 1.16.

Es decir, *el producto escalar es igual al producto del módulo de uno de los vectores por la proyección del otro sobre él.* En consecuencia, para proyectar un vector sobre una determinada dirección (Figura 1.16), bastará multiplicar escalarmente el vector por el unitario de la dirección, **u**:

$$\text{proy}_\Delta \mathbf{a} = OH = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}$$

De acuerdo con esto, las componentes de un vector son los productos escalares de éste por los vectores de base del sistema cartesiano trirrectangular de referencia:

$$a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}, \quad a_y = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j}, \quad a_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}$$

y el vector puede expresarse de la forma:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}$$

El producto escalar goza de las siguientes propiedades:

a) *Es conmutativo:*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

b) *Es asociativo respecto a la multiplicación por un escalar:*

$$(m\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = m(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (m\mathbf{b})$$

c) *Verifica la ley distributiva para la suma de vectores:*

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{b}_n) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_n$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{b}_n) &= a \, \text{proy}_a (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{b}_n) = \\ &= a(\text{proy}_a \mathbf{b}_1 + \text{proy}_a \mathbf{b}_2 + \cdots + \text{proy}_a \mathbf{b}_n) \\ &= a \, \text{proy}_a \mathbf{b}_1 + a \, \text{proy}_a \mathbf{b}_2 + \cdots + a \, \text{proy}_a \mathbf{b}_n \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_n \end{aligned}$$

d) *No cumple la propiedad asociativa para el producto escalar de vectores.*

Realmente no tiene sentido hablar de producto escalar sucesivo, puesto que el producto escalar de dos vectores es un escalar y el segundo producto sería el de un escalar por un vector.

Se define *la norma* de un vector como el producto escalar de él por sí mismo, lo que coincide con el cuadrado de su módulo:

$$\text{nor} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \qquad [1.16]$$

A continuación, indicamos todos los productos escalares posibles entre los vectores de la base de nuestro sistema de referencia:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \quad \text{y} \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$$

1.17 Producto escalar en función de las componentes de los vectores

Sean los vectores $\mathbf{a}(a_x, a_y, a_z)$ y $\mathbf{b}(b_x, b_y, b_z)$ su producto escalar:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \cdot (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k})$$

teniendo en cuenta las propiedades b) y c) de éste, y los productos escalares entre los vectores de la base, se expresa:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad [1.17]$$

Por tanto, *el producto escalar de dos vectores es igual a la suma de los productos de sus componentes homólogas.*

EJEMPLO 1.4

Calculemos la proyección del vector $\mathbf{a}(1, 4, 1)$ sobre una recta que pasa por O y tiene la dirección del vector $\mathbf{b}(1, 2, 2)$.

Solución:

Debemos obtener el unitario del vector **b**, que es $\mathbf{u} = \frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$.

La proyección del **a** sobre la citada recta será

$$OH = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}.$$

1.18 Ángulo entre dos vectores. Condición de perpendicularidad

Teniendo en cuenta las expresiones [1.15] y [1.17], el coseno del ángulo formado por dos vectores es:

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab} \qquad [1.18]$$

lo que, teniendo en cuenta [1.13], se escribe:

$$\cos\varphi = \cos\alpha \cdot \cos\alpha' + \cos\beta \cdot \cos\beta' + \cos\gamma \cdot \cos\gamma' = \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_b \qquad [1.19]$$

Por tanto, el coseno del ángulo formado por dos vectores es igual al producto escalar de los vectores unitarios correspondientes a los dados.

Condición de perpendicularidad

Si los dos vectores dados son perpendiculares, es decir, $\varphi = \pi/2$, será $\cos\varphi = 0$ y según [1.15] deberá ser $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$.

Recíprocamente, si es $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$, y es $a \neq 0$ y $b \neq 0$, según [1.15] deberá ser $\cos\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$ y los vectores serán perpendiculares. La condición de perpendicularidad $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ es necesaria, pero no suficiente para que sean perpendiculares, pues además deberá ser $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

Análogamente, si se verificara $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$, no necesariamente es $\mathbf{b} = \mathbf{c}$, pues escribiendo:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0$$

se verificará, cuando se cumplan cualquiera de las tres condiciones: $\mathbf{a} = 0$, $\mathbf{b} - \mathbf{c} = 0$ o $\mathbf{a}$ perpendicular a $\mathbf{b} - \mathbf{c}$.

EJEMPLO 1.5

Dados los vectores $\mathbf{OA} = \mathbf{a}(1, 2, 1)$ y $\mathbf{OB} = \mathbf{b}(m, 1, 2)$, hallar el valor del parámetro m para que el vector $\mathbf{AB}$ sea perpendicular al $\mathbf{a}$.

Solución:

El vector **AB** es:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = (m - 1,\ -1,\ 1)$$

La condición de perpendicularidad entre **AB** y **a** es:

$$\mathbf{AB}\cdot\mathbf{a} = m - 1 - 2 + 1 = 0$$

de donde $m = 2$.

EJEMPLO 1.6

Hallemos el ángulo que forman los vectores $\mathbf{a}(2, 1, 2)$ y $\mathbf{b}(1, 1, 4)$, cuyo origen común es O.

Solución:

El producto escalar de los vectores es $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 2 + 1 + 8 = 11$. El módulo de cada uno de ellos es: $a = 3$ y $b = 3\sqrt{2}$. La aplicación de la [1.18] permite escribir $\cos\varphi = \dfrac{11}{9\sqrt{2}}$, de donde $\varphi = 0{,}527$ rad.

1.19 Producto vectorial o exterior de dos vectores

Se define el producto vectorial de dos vectores **a** y **b**, que se expresará $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, como *un vector cuyo módulo es igual al producto de los módulos de los dos vectores por el seno del ángulo que forman, su dirección es la perpendicular al plano determinado por* **a** y **b**, *y su sentido es el que hace que el triedro* **a**, **b** y $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ sea *a derechas*. Geométricamente, el producto vectorial tiene un significado importante, puesto que su módulo es igual al área del paralelogramo que determinan los dos vectores (Figura 1.17):

$$A = ah = ab\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

Figura 1.17.

El producto vectorial tiene las siguientes propiedades:

a) *Es uniforme*. Si **a** y **a**′ son dos vectores iguales, y **b** y **b**′ también lo son, evidentemente se verifica:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}' \times \mathbf{b}'$$

b) *No cumple la propiedad conmutativa*. Verificando de acuerdo con la definición:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\,(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$

c) *Verifica la propiedad asociativa para la multiplicación por un escalar:*

$$(m\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (m\mathbf{b}) = m(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

d) *No cumple la propiedad asociativa para el producto vectorial sucesivo:*

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

Evidentemente, el vector primer miembro tiene distinta dirección del vector segundo miembro.

e) *Es distributivo:*

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{b}_n) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}_1 + \mathbf{a} \times \mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{a} \times \mathbf{b}_n$$

Veamos previamente una propiedad en la que nos basaremos para demostrar su propiedad distributiva. Sean los vectores **a** y **b,** y tomemos un plano π perpendicular al primero (Figura 1.18); proyectemos **b** sobre este plano y sea **b**′ el vector proyección. El vector **a** × **b** es perpendicular al plano determinado por **a** y **b**, y por tanto, contenido en el plano π y perpendicular a **b**′.

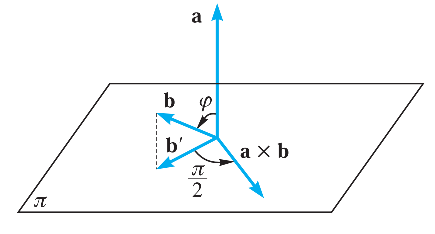


Figura 1.18.

Por otro lado es:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \operatorname{sen} \varphi = ab' \quad \text{luego es:} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}'$$

El vector producto vectorial **a** × **b** se obtiene proyectando uno de los vectores sobre un plano perpendicular al otro, multiplicando la proyección por el módulo de este último y girándola $\pi/2$ radianes en sentido tal que **a, b** y **a** × **b** formen triedro a derechas.

Consideremos ahora los vectores **a,** $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_n$, situados como se indica en la Figura 1.19, y sean sus proyecciones sobre un plano perpendicular al vector **a:** $\mathbf{b}'_1$, $\mathbf{b}'_2$, ..., $\mathbf{b}'_n$, respectivamente, obteniendo sobre éste la poligonal $OB_1B_2 \cdots B_{n-1}B_n$.

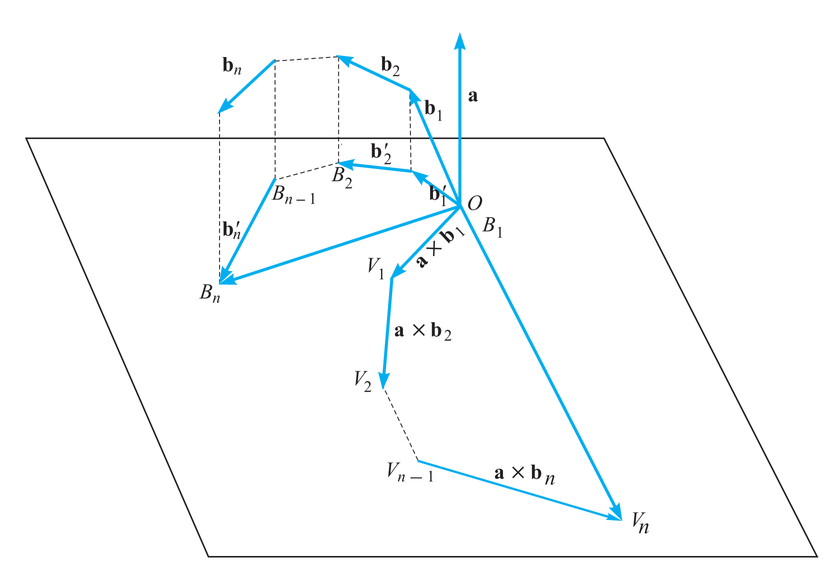


Figura 1.19.

Sean:

$$\mathbf{OV}_1 = \mathbf{a} \times \mathbf{b}_1$$
$$\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2 = \mathbf{a} \times \mathbf{b}_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\mathbf{V}_{n-1}\mathbf{V}_n = \mathbf{a} \times \mathbf{b}_n$$

Según la propiedad vista, los lados de la poligonal $OV_1V_2 \cdots V_{n-1}V_n$ son perpendiculares a sus homólogos en la $OB_1B_2 \cdots B_{n-1}B_n$, y su módulo es el de éstos multiplicado por a. En particular, será $\mathbf{OV}_n$ perpendicular a $\mathbf{OB}_n$ y su módulo el de éste multiplicado por a, es decir:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{OB}_n = \mathbf{OV}_n$$

Por tanto, es:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{b}_n) = \mathbf{a} \times \text{proy}_\pi(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{b}_n) =$$
$$= \mathbf{a} \times (\mathbf{b}'_1 + \mathbf{b}'_2 + \cdots + \mathbf{b}'_n) = \mathbf{a} \times \mathbf{OB}_n = \mathbf{OV}_n =$$
$$= \mathbf{OV}_1 + \mathbf{V}_1\mathbf{V}_2 + \cdots + \mathbf{V}_{n-1}\mathbf{V}_n = \mathbf{a} \times \mathbf{b}_1 + \mathbf{a} \times \mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{a} \times \mathbf{b}_n$$

Con lo cual queda demostrada la propiedad distributiva del producto vectorial.

1.20 Expresión analítica del producto vectorial

Para hallar la expresión analítica del producto vectorial de dos vectores:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \times (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k})$$

basta considerar que verifica las propiedades distributiva y asociativa para la multiplicación por un escalar, y tener en cuenta los productos vectoriales posibles entre los vectores de la base del sistema de referencia, que hemos recogido en la siguiente tabla:

×	**i**	**j**	**k**
i	**0**	**k**	−**j**
j	−**k**	**0**	**i**
k	**j**	−**i**	**0**

Por tanto, podemos escribir:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\mathbf{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\mathbf{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\mathbf{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad [1.20]$$

determinante simbólico en el que elementos de la primera fila deben tratarse de forma simbólica.

1.21 Condición de paralelismo de dos vectores

Si dos vectores son paralelos, su producto vectorial será nulo, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$, y para que sea nulo el determinante [1.20], es necesario que exista proporcionalidad entre las componentes de los vectores:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \frac{a}{b} = m \qquad [1.21]$$

Recíprocamente, si el producto vectorial de dos vectores es nulo, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ y son $a \neq 0$ y $b \neq 0$, deberán ser paralelos.

En consecuencia, la expresión $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ puede verificarse sin necesidad de que sea $\mathbf{b} = \mathbf{c}$, pues escrita de la forma:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0$$

se cumplirá, en cualquiera de los tres casos, $\mathbf{a} = 0$, $\mathbf{b} = \mathbf{c}$, y $\mathbf{a}$ paralelo a $\mathbf{b} - \mathbf{c}$.

EJEMPLO 1.7

¿Qué vector debe sumarse al $\mathbf{a}(1, 2, 1)$ para que dicha suma sea paralela al vector $\mathbf{b}(1, 2, 2)$ y tenga de módulo 6?

Solución:

Sea el vector buscado el $\mathbf{v}(v_x, v_y, v_z)$. Su suma con el $\mathbf{a}$ es:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{v}) = (1 + v_x, 2 + v_y, 1 + v_z)$$

La condición de paralelismo de esta suma con el $\mathbf{b}$ se expresa:

$$\frac{1 + v_x}{1} = \frac{2 + v_y}{2} = \frac{1 + v_z}{2} = \frac{6}{3}$$

de donde $v_x = 1$, $v_y = 2$ y $v_z = 3$. El vector buscado es: $\mathbf{v}(1, 2, 3)$.

EJEMPLO 1.8

Dados los vectores $\mathbf{a}(2, 1, 2)$ y $\mathbf{b}(2, 2, 1)$, hallemos la expresión general del vector $\mathbf{c}$ que verifique $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$.

Solución:

Puesto que es $a \neq 0$ y $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ es un caso particular, la solución general debe verificar que $\mathbf{a}$ es paralelo a $\mathbf{b} - \mathbf{c}$, lo que se expresa:

$$\frac{2}{2 - c_x} = \frac{1}{2 - c_y} = \frac{2}{1 - c_z} = \frac{3}{c}$$

de donde: $c_x = 2 - 2c/3$, $c_y = 2 - c/3$ y $c_z = 1 - 2c/3$.

Para $c = 0$, se obtiene la solución particular $\mathbf{c}(2, 2, 1) = \mathbf{b}$. Para $c = 3$, el vector es $\mathbf{c}(0, 1, -1)$. Comprobación:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

1.22 Producto mixto

El producto vectorial de dos vectores $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ es un nuevo vector y al producto escalar de éste por un tercer vector **a** se le denomina producto mixto, y se escribe:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

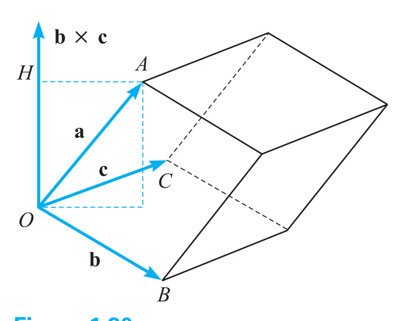


Figura 1.20.

El producto mixto tiene una interpretación geométrica simple. Los vectores **a, b** y **c** determinan un paralelepípedo (Figura 1.20), cuya base tiene por área $|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$, siendo su altura OH la proyección del vector **a** sobre la dirección de $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$, es decir:

$$OH = \mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|}$$

Por tanto, el volumen del paralelepípedo es:

$$V = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|\ \mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

El volumen de un paralelepípedo es igual al producto mixto de los tres vectores que lo determinan como aristas concurrentes del mismo.

Puesto que se puede tomar como base una cara cualquiera del sólido, se pueden obtener para el volumen del paralelepípedo las expresiones:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

Por gozar el producto escalar de la propiedad conmutativa, puede también escribirse:

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

Por tanto, sobre cualquier permutación circular de la **a, b, c**, los símbolos · y × pueden colocarse a voluntad. De aquí que el producto mixto se exprese **(a, b, c)**.

Analíticamente, puede escribirse el producto mixto bajo la forma de determinante de la siguiente manera:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (a_z\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \qquad [1.22]$$

Esta última igualdad se escribe teniendo en cuenta que el producto escalar de dos vectores es igual a la suma de los productos de sus componentes correspondientes.

El producto mixto cambia de signo al efectuar una permutación entre dos cualesquiera de los vectores, como se desprende, evidentemente, de [1.22].

El producto mixto es nulo cuando lo es alguno de los vectores o cuando éstos son coplanarios, por ser entonces nulo el volumen del paralelepípedo que determinan. De aquí que tres vectores coplanarios puedan escribirse en la forma $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}$, siendo λ y μ dos números reales, puesto que al ser nulo el determinante [1.22], una fila ha de ser combinación lineal de las otras dos.

EJEMPLO 1.9

Tomemos los vectores $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{a}_2 = 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, como aristas concurrentes en O de un paralelepípedo (Figura 1.21). Calculemos:

a) El volumen del citado paralelepípedo.

b) La altura desde el extremo de $\mathbf{a}_3$.

c) La altura desde el extremo de $\mathbf{a}_2$.

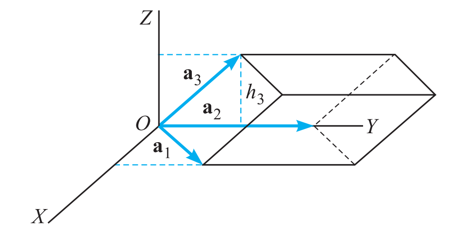


Figura 1.21.

Solución:

a) El volumen viene dado por $V = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)$:

$$V = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 16$$

b) La altura desde el extremo de $\mathbf{a}_3$, h_3, es:

$$h_3 = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{k} = 2$$

c) La altura desde el extremo de $\mathbf{a}_2$, h_2, se calcula así:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1|}$$

es un vector unitario normal a la cara $(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1)$.

La altura $h_2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{a}_2$ es la proyección de $\mathbf{a}_2$ sobre una dirección normal a la cara $(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1)$, luego es:

$$\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1| = 4\sqrt{3} \qquad \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) \qquad h_2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{a}_2 = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Como comprobación, debe ser:

$$V = h_2 \cdot |\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1| = 16$$

1.23 Doble producto vectorial

El doble producto vectorial $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ es un vector perpendicular al plano que determinan los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

El producto vectorial $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ es perpendicular al plano determinado por los vectores $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ (Figura 1.22). Todo vector perpendicular al $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ ha de estar contenido

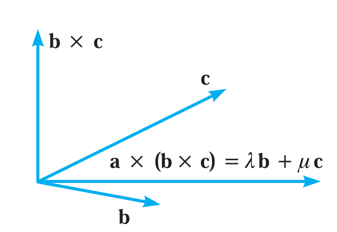


Figura 1.22.

en el plano determinado por **b** y **c**, por tanto, el vector doble producto vectorial **a × (b × c)** está contenido en ese plano, es decir, es coplanario con los vectores **b** y **c**, y podemos escribir:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{c}$$

Tomemos los ejes coordenados indicados en la Figura 1.23. La expresión analítica de los vectores **a**, **b** y **c** es la siguiente:

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \quad , \quad \mathbf{b} = b_x\mathbf{i} \quad \text{y} \quad \mathbf{c} = c_x\mathbf{i} + c_z\mathbf{k}$$

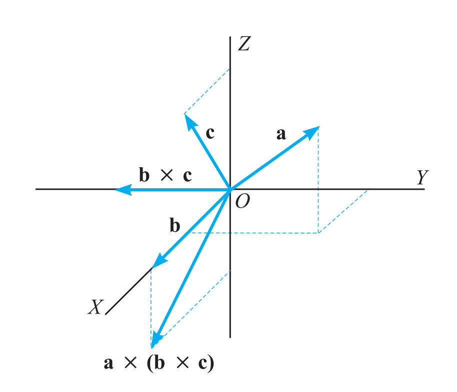


Figura 1.23.

Las expresiones analíticas del producto vectorial **(b × c)** y del doble producto vectorial **a × (b × c)** son las siguientes:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_x & 0 & 0 \\ c_x & 0 & c_z \end{vmatrix} = -b_x c_z \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ 0 & -b_x c_x & 0 \end{vmatrix} = a_z b_x c_z \mathbf{i} - a_x b_x c_z \mathbf{k}$$

Si sumamos y restamos la expresión $a_x b_x c_x \mathbf{i}$, se tiene:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (a_x c_x + a_z c_z) b_x \mathbf{i} - a_x b_x (c_x \mathbf{i} + c_z \mathbf{k}) =$$
$$= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

que puede escribirse bajo la forma de determinante simbólico:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \end{vmatrix} \qquad [1.23]$$



EJEMPLO 1.10

Dados los vectores **a** = **i** + **j**, **b** = 3**j** y **c** = **j** + **k**:

a) Calculemos su doble producto vectorial **a × (b × c)**.

b) Demostrar que ese doble producto vectorial es coplanario con los vectores **b** y **c**.

c) Dar la expresión del citado doble producto vectorial como combinación lineal de los vectores **b** y **c**.

Solución:

a)

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3\mathbf{k}$$

b) Los vectores $[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] = -3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son coplanarios si su producto mixto es nulo, lo que así sucede:

$$-3\mathbf{k} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -3\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{i} = 0$$

c) Para que el doble producto vectorial sea combinación lineal de $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$, debe cumplirse:

$$-3\mathbf{k} = m\mathbf{b} + n\mathbf{c} = m3\mathbf{j} + n(\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

o

$$-3\mathbf{k} = (3m + n)\mathbf{j} + n\mathbf{k}$$

de donde $n = -3$ y $m = 1$, con lo cual es:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} - 3\mathbf{c}$$

EUCLIDES

Nació en Alejandría, hacia el año 325 a.C. y murió en la misma ciudad hacia el 265 a.C. Lo poco que se sabe de su vida se debe al historiador Proclo. El emperador Ptolomeo I le invitó a trabajar en el «Museo» de Alejandría y allí fundó una escuela de estudios matemáticos. Su obra más importante es un tratado de geometría con el título de *Los Elementos*, que consta de trece libros. En los libros del I al VI desarrolla la geometría plana; del VII al IX, la teoría de números; el Libro X lo dedica a los inconmensurables; y los libros del XI al XIII, a la geometría del sólido. Parece ser que en este tratado recopila y perfecciona teoremas de matemáticos anteriores, como Eudoxio y Theaetetus. *Los Elementos* fueron traducidos al latín por Adelardo de Bath y Gerardo de Cremona, y publicados en imprenta en 1482. Han tenido más de 1 000 ediciones, lo que ha hecho de Euclides el matemático más leído de la historia. El propio Ptolomeo I comenzó a leer *Los Elementos*, pero enseguida se cansó por la dificultad que para él tenía seguir los razonamientos. Mandó llamar a Euclides y le preguntó si no habría otro camino u otra forma menos trabajosa para llegar a los mismos resultados, a lo que Euclides le respondió: «en matemáticas no hay caminos cortos (privilegiados)».

En el Libro I aparecen los fundamentos de su geometría y en él establece 23 definiciones, 5 axiomas, 5 postulados, 48 teoremas y cuestiones sobre lógica racional.

Definiciones:

1. *Punto*. Aquello que no tiene partes.
2. *Línea*. Aquello que no tiene anchura.
3. *Segmento*. Parte de línea limitada por dos puntos.
………
7. *Ángulo*. Inclinación de una línea respecto a otra.
………
17. *Diámetro*. El segmento de la línea recta que pasa por el centro de la circunferencia limitado a uno y otro lado por ésta.
………

Axiomas:

1. Cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.
2. Si a cosas iguales se les añade la misma cosa siguen iguales.
3. Si de cosas iguales se resta otra igual resultan iguales.
4. El conjunto es más grande que cualquiera de sus partes.
5. Las cosas que coinciden son iguales.

Postulados:

1. Siempre es posible dibujar un segmento de línea entre dos puntos cualquiera.
2. Todo segmento puede ser prolongado de forma ilimitada por ambos lados.
3. Siempre es posible trazar una circunferencia de centro dado y que pase por un punto dado.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Por un punto exterior a una recta dada siempre se puede trazar una recta, y sólo una, paralela a la dada.

Este quinto postulado ha sido el más controvertido y ha habido varios intentos para su demostración a partir de los otros, sin que haya llegado a conseguirse. Puesto que los postulados deben ser aceptados como ciertos sin que puedan ser demostrados y, a partir de ellos, mediante la lógica deductiva, se construye toda la geometría. En el siglo XIX, aparecen las geometrías no euclídeas, que no aceptan el quinto postulado y lo sustituyen, bien porque pueden ser trazadas dos paralelas a una recta dada por un punto exterior a ésta, bien porque no puede ser trazada paralela alguna, dando nacimiento a la geometría hiperbólica, en el primer caso, y a la elíptica, en el segundo, establecidas, respectivamente, por Lobatschawski, en 1826, y por Riemann, en 1854.

Vectores deslizantes

CAPÍTULO 2

2.1 Vectores deslizantes

Un vector deslizante queda definido cuando conocemos su módulo, dirección y recta soporte. Por tanto, dos vectores deslizantes serán iguales cuando tengan igual módulo, sentido y recta soporte, pudiendo ser dentro de ésta cualquiera su punto de aplicación. A todo vector libre $\mathbf{a}_1$, que tenga igual módulo, dirección y sentido que otro deslizante **a**, se le llama equipolente del **a** (Figura 2.1).

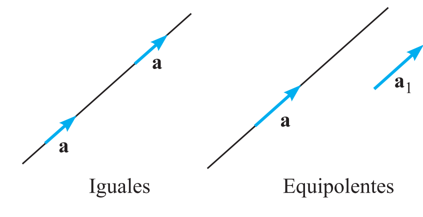


Figura 2.1.

Un vector deslizante queda determinado, por tanto, al conocer sus tres componentes (a_x, a_y, a_z) y un punto de su recta soporte, $A(x_1, y_1, z_1)$. En efecto: su módulo, dirección y sentido quedan definidos al conocer sus tres componentes, y su recta soporte tiene por ecuación:

$$\mathbf{r} = \mathbf{OA} + \lambda\mathbf{a} = (x_1 + \lambda a_x)\mathbf{i} + (y_1 + \lambda a_y)\mathbf{j} + (z_1 + \lambda a_z)\mathbf{k} \qquad [2.1]$$

que en cartesianas se escribe:

$$x = x_1 + \lambda a_x \quad ; \quad y = y_1 + \lambda a_y \quad ; \quad z = z_1 + \lambda a_z \qquad [2.2]$$

o bien:

$$\frac{x - x_1}{a_x} = \frac{y - y_1}{a_y} = \frac{z - z_1}{a_z} = \lambda \qquad [2.3]$$

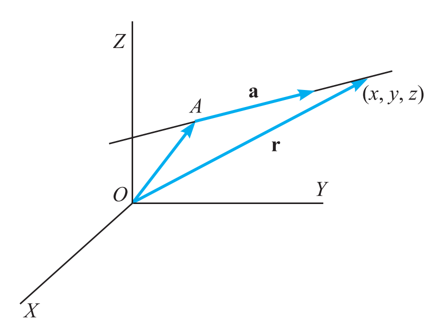


Figura 2.2.

De aquí que los vectores deslizantes se den frecuentemente bajo la expresión:

$$(A;\, \mathbf{a}) = (x_1, y_1, z_1; a_x, a_y, a_z)$$

Notación que también puede utilizarse para los vectores localizados, siendo **A** el punto de localización.

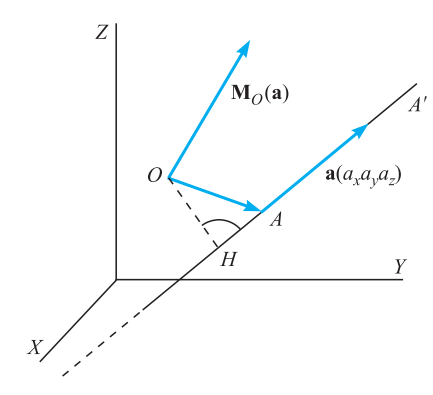


Figura 2.3.

2.2 Momento central

Se llama, por definición, *momento central* de un vector deslizante o momento de un vector deslizante **a**, respecto a un punto fijo O, al producto vectorial:

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{a}) = \mathbf{OA} \times \mathbf{a} \qquad [2.4]$$

siendo A un punto cualquiera de la recta soporte del vector **a**.

El momento central es unívoco, pues si en lugar del punto A hubiésemos tomado otro cualquiera A', de la recta soporte, el momento obtenido,

$$\mathbf{M}'_O(\mathbf{a}) = \mathbf{OA}' \times \mathbf{a}$$

sería el mismo. En efecto:

$$\mathbf{M}'_O(\mathbf{a}) - \mathbf{M}_O(\mathbf{a}) = \mathbf{OA}' \times \mathbf{a} - \mathbf{OA} \times \mathbf{a} = (\mathbf{OA}' - \mathbf{OA}) \times \mathbf{a} = \mathbf{AA}' \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

por ser colineales $\mathbf{AA}'$ y **a**, luego $\mathbf{M}'_O(\mathbf{a}) = \mathbf{M}_O(\mathbf{a})$.

La dirección del momento central es perpendicular al plano determinado por el punto respecto al cual se toman momentos y el vector **a**, y su módulo es igual al módulo del vector por la distancia del punto O a la recta soporte del vector deslizante, llamándose a esta distancia *brazo del vector*. *El módulo del momento central es igual al módulo del vector por su brazo*. El valor del brazo queda determinado por:

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{a}) = \mathbf{OA} \times \mathbf{a} = \mathbf{OH} \times \mathbf{a}$$

$$|\mathbf{OA} \times \mathbf{a}| = OH \cdot a \quad \Rightarrow \quad OH = \frac{|OA \times \mathbf{a}|}{a} = \frac{|\mathbf{M}_O(\mathbf{a})|}{a} = \frac{\mathbf{M}_O}{a} \qquad [2.5]$$

Los vectores **a**, $\mathbf{M}_O(\mathbf{a})$ y **OH** forman un triedro trirrectángulo, por tanto, el unitario de la dirección OH es:

$$\mathbf{u}_{OH} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{M}_O(\mathbf{a})}{|\mathbf{a} \times \mathbf{M}_O(\mathbf{a})|} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{M}_O(\mathbf{a})}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{M}_O(\mathbf{a})|}$$

y las coordenadas de pie H de la perpendicular vienen determinadas por:

$$\mathbf{OH} = OH \cdot \mathbf{u}_{OH} = \frac{|\mathbf{M}_O(\mathbf{a})}{a} \cdot \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{M}_O(\mathbf{a})}{a \cdot |\mathbf{M}_O(\mathbf{a})|} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{M}_O(\mathbf{a})}{a^2} \qquad [2.6]$$

EJEMPLO 2.1

Dado el vector deslizante $(\mathbf{a}; A) = (-1, 2, 2; 1, 2, 3)$, hallemos la distancia del origen O a la recta soporte del vector, la dirección de la perpendicular desde O a la citada recta soporte y las coordenadas del pie H de la perpendicular.

Solución:

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{a}) = \mathbf{OA} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{M}_O(\mathbf{a})| = 3\sqrt{5} \quad ; \quad a = 3 \quad ; \quad OH = \sqrt{5}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{M}_O(\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 18\mathbf{i} + 9\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{M}_O(\mathbf{a})| = 9\sqrt{5} \quad ; \quad \mathbf{u}_{OH} = \frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{OH} = \sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathbf{k}\right) = 2\mathbf{i} + \mathbf{k} \quad ; \quad \mathbf{h}(2,\,0,\,1)$$

2.3 Cambio de centro de momentos. Campos de momentos

Tomemos el momento respecto a un punto O' distinto del O (Figura 2.4):

$$\mathbf{M}_{O'}(\mathbf{a}) = \mathbf{O'A} \times \mathbf{a} = (\mathbf{O'O} + \mathbf{OA}) \times \mathbf{a} = \mathbf{OO} \times \mathbf{a} + \mathbf{M}_O(\mathbf{a}) =$$

$$= \mathbf{M}_{O'}(\mathbf{a}_O) + M_O(\mathbf{a}) \qquad [2.7]$$

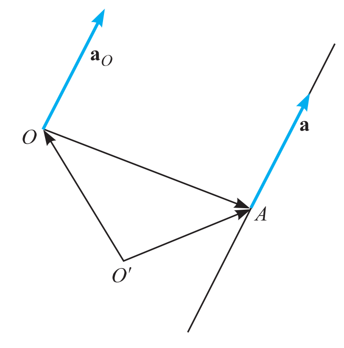


Figura 2.4.

lo que nos dice que *el momento respecto a un punto O' es igual al momento respecto a otro cualquiera O, más el momento respecto a O' de un vector* $\mathbf{a}_o$ *equipolente del* **a** *trazado por O.*

Dado un vector deslizante (A; **a**), cada punto del espacio lleva ligado un momento, constituyendo todos ellos un *campo de momentos*. En cada punto del espacio el momento es único, aunque puede haber diferentes puntos con el mismo momento.

2.4 Momento axial

Se llama *momento axial* de un vector deslizante **a** respecto de una recta E a la *proyección sobre E del momento del vector respecto de un punto cualquiera de la recta*.

Vamos a demostrar que el momento axial es único, es decir, independiente del punto elegido sobre la recta. Para ello, supongamos dos puntos cualesquiera P y Q de la recta E (Figura 2.5). Los momentos de **a** respecto a estos dos puntos han de verificar:

$$\mathbf{M}_Q(\mathbf{a}) = \mathbf{M}_P(\mathbf{a}) + \mathbf{QP} \times \mathbf{a}$$

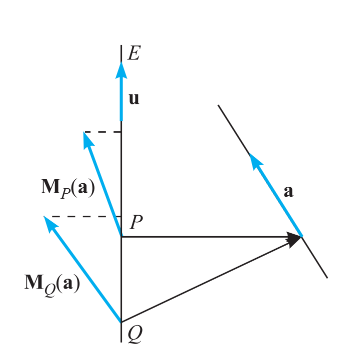


Figura 2.5.

Llamemos **u** al vector unitario en la dirección de la recta y proyectemos sobre ella la expresión anterior, lo que se escribe:

$$\text{proy}_E \mathbf{M}_Q(\mathbf{a}) = \text{proy}_E \mathbf{M}_P(\mathbf{a}) + \mathbf{u} \cdot (\mathbf{QP} \times \mathbf{a})$$

El último término es nulo, puesto que **u** y **PQ** son vectores de la misma dirección, luego las proyecciones sobre el eje E de los momentos del vector **a** respecto a dos puntos P y Q cualesquiera de E, son iguales y, por tanto, el momento axial único.

2.5 Expresiones analíticas de los momentos

Sea el vector deslizante $\mathbf{a} = a_z\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, referido a un sistema cartesiano trirrectangular y sea $P(x_1, y_1, z_1)$ un punto cualquiera de su línea de acción (Figura 2.6). El momento central de este vector, respecto del origen de coordenadas O, es:

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{a}) = \mathbf{OP} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$

$$= (y_1a_z - z_1a_y)\mathbf{i} + (z_1a_x - x_1a_z)\mathbf{j} + (x_1a_y - y_1a_x)\mathbf{k} = L\,\mathbf{i} + M\,\mathbf{j} + N\,\mathbf{k} \qquad [2.8]$$

siendo:

$$L = y_1a_z - z_1a_y \quad , \quad M = z_1a_x - x_1a_z \quad \text{y} \quad N = x_1a_y - y_1a_x \qquad [2.9]$$

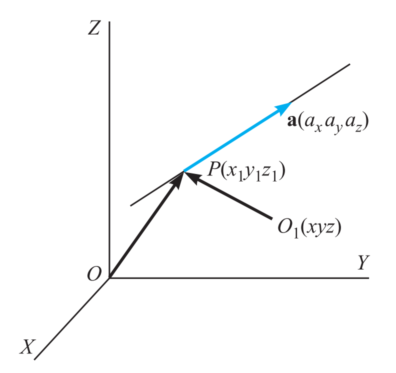


Figura 2.6.

La proyección de este momento sobre el eje OX es L, que por definición es el momento axial de **a** respecto al eje OX. Análogamente, los momentos axiales de **a** respecto a los ejes OY y OZ son M y N, respectivamente.

El momento central de un vector deslizante ya no respecto del origen de coordenadas, sino de un punto cualquiera del espacio $O_1(x, y, z)$ se calcula análogamente.

$$\mathbf{M}_{O_1}(\mathbf{a}) = \mathbf{O_1P} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$

$$= \{(y_1 - y)a_z - (z_1 - z)a_y\}\mathbf{i} + \{(z_1 - z)a_x - (x_1 - x)a_z\}\mathbf{j} +$$
$$+ \{(x_1 - x)a_y - (y_1 - y)a_x\}\mathbf{k} \qquad [2.10]$$

Por tanto, los momentos axiales respecto a unos ejes paralelos a los coordenados pasando por O_1 son:

$$L_1 = (y_1 - y)a_z - (z_1 - z)a_y$$
$$M_1 = (z_1 - z)a_x - (x_1 - x)a_z \qquad [2.11]$$
$$N_1 = (x_1 - x)a_y - (y_1 - y)a_x$$

El *momento axial*, ya no respecto a los ejes coordenados, sino respecto a una recta cualquiera E, se determina de la siguiente forma:

Sea **u** un vector unitario de dirección la recta E y cuyas componentes u_x, u_y, u_z, evidentemente coinciden con los cosenos directores de la recta $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$, respectivamente (Figura 2.7).

El momento axial del vector **a** respecto a la recta E es la proyección sobre la recta E del momento de **a** respecto de un punto de esa recta, como es el O_1, lo que analíticamente se expresa:

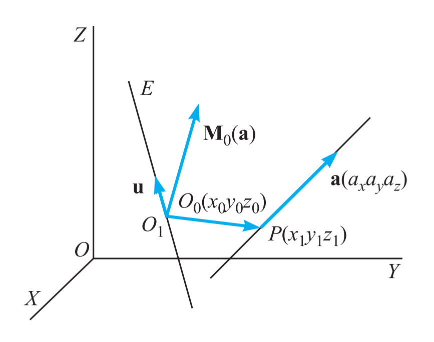


Figura 2.7.

$$M_E(\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \qquad [2.12]$$

2.6 Las cinco coordenadas de un vector deslizante

Dado un vector deslizante **a** y su momento $\mathbf{M}_O$, quedan determinadas las seis cantidades, a_x, a_y, a_z, componentes del vector, y L, M, N, momentos axiales del vector respecto de los tres ejes coordenados.

Ahora bien, como el momento central del vector deslizante **a** respecto al origen de coordenadas es normal al propio vector, se verifica:

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = 0$$

es decir:

$$a_x L + a_y M + a_z N = 0$$

y, por tanto, de las seis cantidades antes mencionadas, solamente cinco son independientes entre sí. De aquí que para determinar un vector deslizante solamente se necesiten cinco parámetros, llamados coordenadas del vector deslizante.

Sus tres componentes determinan el vector considerado como vector libre, y dos cualesquiera de los momentos axiales $L = y\,a_z - z\,a_y$, $M = z\,a_x - x\,a_z$ y $N = x\,a_y - y\,a_x$, determinan la línea soporte del vector. De aquí que con frecuencia un vector deslizante venga expresado de la forma:

$$(\mathbf{a};\, \mathbf{M}_O) = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k};\, L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}) = (a_x, a_y, a_z; L, M, N)$$

Entre las dos formas de expresar un vector deslizante (A; **a**) y (**a**; $\mathbf{M}_O$) existe una correspondencia biunívoca. En efecto, dado el vector deslizante (A; **a**) podemos calcular su momento, $\mathbf{M}_O = \mathbf{OA} \times \mathbf{a}$ y expresarlo de la forma (**a**; $\mathbf{M}_O$), siendo $\mathbf{a} \cdot \mathbf{M}_O = 0$.

Recíprocamente, dado el vector deslizante (**a**; $\mathbf{M}_O$), con la condición $\mathbf{a} \cdot \mathbf{M}_O = 0$ podemos hallar un punto de su línea de acción proyectando sobre ella el origen. Sea H el punto de proyección (Figura 2.8), el vector **OH** es:

$$\mathbf{OH} = |OH| \cdot \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{M}_O}{|\mathbf{a} \times \mathbf{M}_O|} = |OH| \cdot \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{M}_O}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{M}_O|}$$

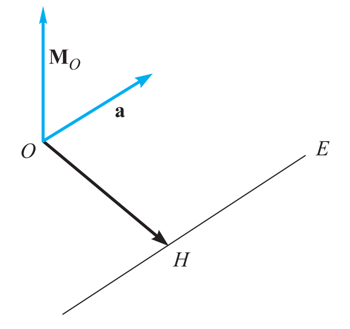


Figura 2.8.

Ahora bien, para que H sea el punto de la línea de acción de **a** proyección del O, habrá de verificar:

$$|OH| = \frac{|M_O|}{|\mathbf{a}|}$$

y, por tanto:

$$\mathbf{OH} = \frac{\mathbf{a} \times M_O}{|\mathbf{a}|^2}$$

Queda, pues, expresado el vector de la forma (H; **a**), siendo $\mathbf{M}_O = \mathbf{OH} \times \mathbf{a}$.

Cualquier otro vector (A, **a**) que verifique $\mathbf{M}_O = \mathbf{OA} \times \mathbf{a}$ será el mismo vector deslizante, pues restando ambas expresiones resulta:

$$0 = (\mathbf{OH} - \mathbf{OA}) \times \mathbf{a} = \mathbf{AH} \times \mathbf{a}$$

lo que nos indica que A pertenece a la línea de acción de **a**.

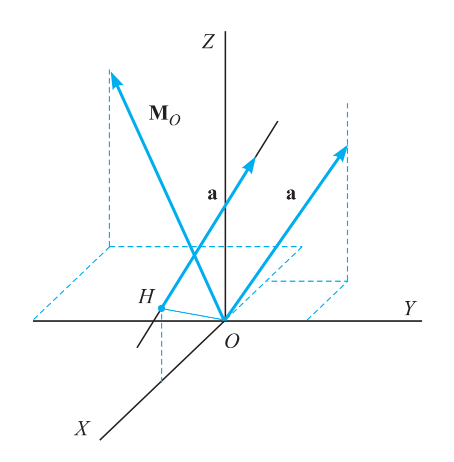


Figura 2.9.

EJEMPLO 2.2

Dado el vector deslizante $(\mathbf{a}; \mathbf{M}_O) = (-1, 2, 2; -2, -5, 4)$, vamos a expresarlo de la forma $(A; \mathbf{a})$, siendo A un punto cualquiera de su recta soporte.

Solución:

El vector **OH**, perpendicular desde O a la recta soporte, está dado por:

$$\mathbf{OH} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{M}_O}{a^2}$$

Siendo $a^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1 + 4 + 4 = 9$ y

$$\mathbf{a} \times \mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 18\mathbf{i} + 9\mathbf{k}$$

es:

$$\mathbf{OH} = 2\mathbf{i} + \mathbf{k} \quad \text{y} \quad H(2, 0, 1)$$

Con lo cual el vector deslizante se expresa:

$$(A; \mathbf{a}) = (2, 0, 1; -1, 2, 2)$$

Sistema de vectores

CAPÍTULO 3

3.1 Sistema de vectores deslizantes: resultante general y momento resultante

Se denomina *sistema de vectores deslizantes* al conjunto formado por un número cualquiera, finito o infinito, de vectores deslizantes (P_i; $\mathbf{a}_i$), en el primer caso, el sistema se denomina discontinuo y en el segundo, continuo.

Por definición, la *resultante general* de un sistema de n vectores deslizantes es *el vector libre suma de n vectores libres equipolentes a los del sistema:*

$$\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{a}_i \qquad [3.1]$$

Momento resultante, $\mathbf{M}_O$, de un sistema de vectores deslizantes respecto a un punto O, es la resultante localizada en O de los momentos respecto a O de cada uno de los vectores que componen el sistema:

$$\mathbf{M}_O = \sum_i \mathbf{OP}_i \times \mathbf{a}_i \qquad [3.2]$$

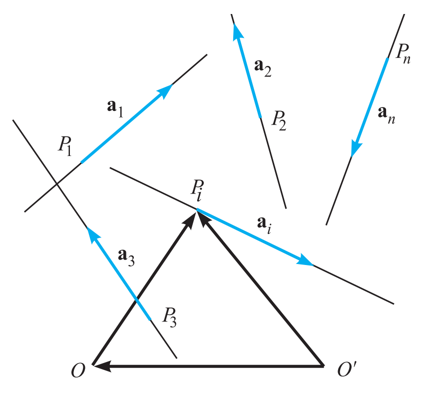


Figura 3.1.

3.2 Cambio de centro de momentos: invariantes

En el sistema de vectores considerado (Figura 3.1), tomemos momentos respecto a O':

$$\mathbf{M}_{O'} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{O'P}_i \times \mathbf{a}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{O'O} + \mathbf{OP}_i) \times \mathbf{a}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{O'O} \times \mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{OP}_i \times \mathbf{a}_i) = \mathbf{O'O} \times \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{a}_i + \mathbf{M}_O$$

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + \mathbf{O'O} \times \mathbf{R} \qquad [3.3]$$

que afirma que *el momento resultante respecto a un punto O′ es igual al momento resultante respecto al punto O, más el momento de la resultante general* $\boldsymbol{R}$ *localizada en O, respecto O′*. Conocida la resultante general de sistema $\mathbf{R}$ y el momento resultante de éste respecto a un punto O, $\mathbf{M}_O$, podemos determinar el momento resultante respecto a otro cualquiera del espacio O'.

Por tanto, cada sistema de vectores lleva asociado un campo de momentos. Para que el momento resultante respecto al punto O' sea igual al momento resultante respecto al punto O es necesario que sea $\mathbf{O'O} \times \mathbf{R} = 0$, es decir, que sea nula la resultante general $\boldsymbol{R} = 0$, o que la recta $\mathbf{O'O}$ sea paralela a $\mathbf{R}$.

Invariantes

Se denominan *invariantes de un sistema*, a aquellas cantidades que permanecen constantes al cambiar el centro de momentos y que, por tanto, son características de cada sistema.

De la definición de resultante general se deduce que ésta es la misma para cualquier punto del espacio, considerándola como el primer invariante del sistema. Hay autores que consideran como primer invariante el módulo de la resultante R, e incluso algunos, la norma de la resultante.

Ya vimos cómo el momento resultante variaba de un punto a otro, pero si multiplicamos escalarmente por $\mathbf{R}$ la Expresión [3.3]:

$$\mathbf{M}_{O'} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R} + (\mathbf{O'O} \times \mathbf{R}) \cdot \mathbf{R} = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R} \qquad [3.4]$$

observamos cómo aparece un segundo invariante, que es el producto escalar del momento resultante por la resultante. Es muy interesante expresar este segundo invariante dividido por el módulo de la resultante:

$$m = \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{R}}{R} = \mathbf{M} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} \qquad [3.5]$$

lo que nos dice que la proyección del momento resultante sobre la resultante es constante, a lo que se denomina tercer invariante del sistema.

Es evidente que el momento será mínimo cuando tenga la misma dirección de la resultante y su módulo valdrá m, es decir, el tercer invariante es el módulo del momento mínimo (Figura 3.2).

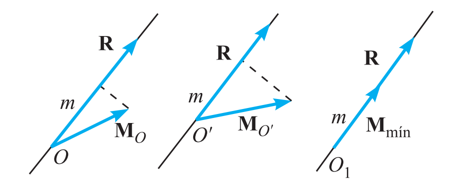


Figura 3.2.

EJEMPLO 3.1

Dado el sistema de vectores deslizantes:

$$(A; \mathbf{a}) = (1, 0, 2; 2, 3, 1)$$
$$(B; \mathbf{b}) = (1, 2, 1; 0, 1, 1)$$
$$(C; \mathbf{c}) = (0, 0, 0; 3, 3, 3)$$

determinemos:

a) Su resultante general.
b) Su momento resultante en el origen O.
c) Su momento resultante en el punto $O'(1, 1, 1)$.
d) El momento mínimo.

Solución:

a)

$$\mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

b)

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_O(\mathbf{a}) + \mathbf{M}_O(\mathbf{b}) + \mathbf{M}_O(\mathbf{c}) = \mathbf{OA} \times \mathbf{a} + \mathbf{OB} \times \mathbf{b} + \mathbf{OC} \times \mathbf{c} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

c)

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + \mathbf{O'O} \times \mathbf{R} = -5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ 5 & 7 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

d)

$$\mathbf{m} = m\mathbf{u}_R = \frac{\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R}}{R}\mathbf{u}_R$$

puesto que es:

$$\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R} = 9 \quad , \quad R = 3\sqrt{11} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_R = \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{1}{3\sqrt{11}}(5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k})$$

resulta:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{11}(5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k})$$

3.3 Eje central

Definiremos el eje central como *el lugar geométrico de los puntos del espacio que dan momento resultante mínimo*. Lo que equivale a decir, según hemos visto anteriormente, que el momento resultante y la resultante son paralelos.

El cálculo analítico de la ecuación del eje central se hace de la siguiente manera: sea la resultante $\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k}$ y supongamos conocido el momento resultante respecto a un punto $O(x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{M}_O = L_O\mathbf{i} + M_O\mathbf{j} + N_O\mathbf{k}$. El momento resultante respecto a otro punto cualquiera $P(x, y, z)$ es:

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{M}_O + \mathbf{PO} \times \mathbf{R} = L_O\mathbf{i} + M_O\mathbf{j} + N_O\mathbf{k} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_0 - x & y_0 - y & z_0 - z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} \qquad [3.6]$$

y para que el punto genérico $P(x, y, z)$ pertenezca al eje central, es necesario, por definición de éste, que el momento resultante en P sea paralelo a la resultante. La expresión analítica de esta condición de paralelismo es la ecuación del eje central:

$$\frac{L_O + (y_0 - y)R_z - (z_0 - z)R_y}{R_x} = \frac{M_O + (z_0 - z)R_x - (x_0 - x)R_z}{R_y} =$$

$$= \frac{N_O + (x_0 - x)R_y - (y_0 - y)R_x}{R_z} \qquad [3.7]$$

y en caso de coincidir O con el origen de coordenadas $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ y $L_O = L$, $M_O = M$ y $N_O = N$, las ecuaciones del eje central son:

$$\frac{L - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{N - (xR_y - yR_x)}{R_z} \qquad [3.8]$$

El eje central es una recta paralela a la resultante, puesto que si por un punto A de él trazamos una recta AB paralela a R, será:

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{M}_A + \mathbf{BA} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_A$$

luego $\mathbf{M}_B$ también es paralelo a $\mathbf{R}$ y, por tanto, B pertenece al eje central.

3.4 Momento de un sistema de vectores deslizantes respecto a un eje

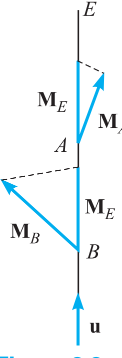


Figura 3.3.

El momento resultante de un sistema de vectores respecto a un eje E, es la proyección sobre el eje del momento resultante del sistema respecto de un punto cualquiera del eje. Si es $\mathbf{u}$ el vector unitario orientado según el eje y A un punto de este, el momento del sistema de vectores respecto al eje es: $M_E = \mathbf{M}_A \cdot \mathbf{u}$ (Figura 3.3).

El momento axial no depende del punto A elegido, pues si tomamos otro punto B del eje será:

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{M}_A + \mathbf{BA} \times \mathbf{R}$$

y al multiplicar escalarmente por $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{M}_B = \mathbf{u} \cdot \mathbf{M}_A$$

puesto que es:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{BA} \times \mathbf{R}) = 0$$

al ser $\mathbf{u}$ y $\mathbf{BA}$ colineales.

3.5 Sistema de vectores deslizantes concurrentes

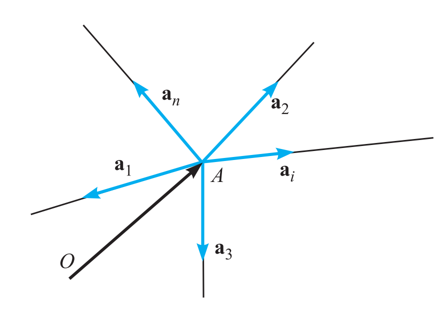


Figura 3.4.

Se dice que un sistema de vectores deslizantes es concurrente cuando las líneas de acción de todos los vectores que forman el sistema pasan por el mismo punto. Sea este el punto A (Figura 3.4).

La resultante general del sistema se calcula exactamente igual que en el caso general.

El momento resultante respecto a un punto cualquiera O puede expresarse de la forma:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OA} \times \mathbf{a}_1 + \mathbf{OA} \times \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{OA} \times \mathbf{a}_n =$$
$$= \mathbf{OA} \times (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n)$$

es decir, $\mathbf{M}_O = \mathbf{OA} \times \mathbf{R}$, igualdad que expresa el *teorema de Varignon*: *el momento resultante de un sistema de vectores deslizantes concurrentes respecto a un punto O, es igual al momento de la resultante, aplicada en el punto de concurrencia, respecto del mismo punto O*.

De esto se deduce que el momento resultante y la resultante son siempre perpendiculares y, por tanto, el segundo invariante es nulo. En consecuencia, el eje

central de este sistema de vectores será el lugar geométrico de los puntos del espacio cuyo momento resultante sea nulo, es decir, la recta que pase por A y sea paralela a la resultante, puesto que A es un punto de momento nulo y el eje central, según vimos, ha de ser siempre paralelo a la resultante. Sus ecuaciones son:

$$\frac{x - x_A}{R_x} = \frac{y - y_A}{R_y} = \frac{z - z_A}{R_z}$$

3.6 Sistema de vectores deslizantes paralelos

Pueden considerarse como caso particular del anterior cuando el punto de concurrencia es un punto impropio.

Sea $\mathbf{a}_i$ ($i = 1, 2, ..., n$) el sistema de vectores paralelos y $\mathbf{u}$ el vector unitario de la misma dirección de los vectores que constituyen el sistema. Tomemos como sentido positivo el del vector $\mathbf{u}$. Por tanto, un vector cualquiera del sistema puede escribirse de la forma $\mathbf{a}_i = \pm\, a_i\mathbf{u}$, según que tenga el mismo o contrario sentido que $\mathbf{u}$ (Figura 3.5).

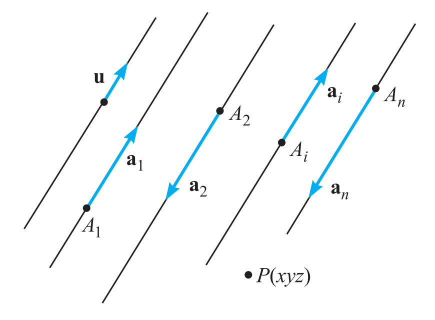


Figura 3.5.

La resultante del sistema es:

$$\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{a}_i = \sum a_i\mathbf{u} \qquad [3.9]$$

expresión en la que los módulos de los vectores han de tomarse con signo más o menos según que su sentido coincida o no con el de $\mathbf{u}$.

El momento de un vector genérico del sistema $\mathbf{a}_i = a_i\mathbf{u}$ respecto a un punto cualquiera $P(xyz)$ vale:

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{PA}_i \times \mathbf{a}_i = (\mathbf{OA}_i - \mathbf{OP}) \times \mathbf{a}_i = \mathbf{OA}_i \times \mathbf{a}_i - \mathbf{OP} \times \mathbf{a}_i$$

siendo O el origen de coordenadas. Si sumamos para todos los vectores del sistema obtenemos el momento resultante respecto al punto P:

$$\mathbf{M}_P = \sum (\mathbf{OA}_i \times \mathbf{a}_i) - \mathbf{OP} \times \sum \mathbf{a}_i = \sum (a_i\mathbf{OA}_i) \times \mathbf{u} - (\mathbf{OP} \times \mathbf{R})$$

Si ahora consideramos un punto genérico C, que llamaremos centro del sistema, tal que verifique:

$$\sum (a_i\,\mathbf{OA}_i) = R\;\mathbf{OC}$$

el momento resultante puede escribirse así:

$$\mathbf{M}_P = R\;\mathbf{OC} \times \mathbf{u} - \mathbf{OP} \times \mathbf{R} = \mathbf{OC} \times \mathbf{R} - \mathbf{OP} \times \mathbf{R} = \mathbf{PC} \times \mathbf{R}$$

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{PC} \times \mathbf{R} \qquad [3.10]$$

lo que supone una generalización del teorema de Varignon para los sistemas de vectores paralelos, que dice: *el momento central de un sistema de vectores deslizantes paralelos respecto a un punto cualquiera P, es igual al momento central de su resultante aplicada en un punto C definido por el vector*

$$\mathbf{OC} = \frac{\sum_i a_i\mathbf{OA}_i}{R} \qquad [3.11]$$

Centro del sistema

expresión vectorial que se desdobla en las tres escalares:

$$x_c = \frac{\sum a_i x_i}{R} \quad ; \quad y_c = \frac{\sum a_i y_i}{R} \quad ; \quad z_c = \frac{\sum a_i z_i}{R} \qquad [3.12]$$

El segundo invariante del sistema es nulo, lo que se pone de manifiesto sin más que multiplicar escalarmente la Expresión [3.10] por **R**, en efecto:

$$\mathbf{M}_P \cdot \mathbf{R} = (\mathbf{PC} \times \mathbf{R}) \cdot \mathbf{R} = 0$$

El eje central será, por tanto, el lugar geométrico de los puntos en los cuales el momento es nulo. Uno de estos puntos es el C, que pertenecerá, por tanto, al eje central y, como éste ha de tener siempre la misma dirección de la resultante, queda determinado como la recta que pasa por el centro del sistema y es paralela a la resultante:

$$\frac{x - x_c}{\alpha} = \frac{y - y_c}{\beta} = \frac{z - z_c}{\gamma}$$

siendo $\mathbf{u} = \alpha\,\mathbf{i} + \beta\,\mathbf{j} + \gamma\,\mathbf{k}$.

Si variamos los puntos de localización A_j de los vectores del sistema dentro de sus respectivas líneas de acción, de acuerdo con las definiciones, no afectará a la resultante ni al momento resultante, pero sí a la posición del punto C, según [3.11]. En virtud de [3.10], el punto C siempre será un punto de momento nulo y, por tanto, siempre pertenecerá al eje central; en consecuencia, al variar los puntos de localización A_i de los vectores del sistema a lo largo de su línea de acción, el punto C recorre el eje central del mismo.

Propiedades

Las propiedades de que goza este punto genérico C son las siguientes:

a) Si sustituimos los vectores considerados por otros proporcionales a ellos, la posición del punto C no variará, ya que:

$$\mathbf{OC} = \frac{\sum_i k a_i \mathbf{OA}_i}{\sum_i k a_i} = \frac{\sum_i a_i \mathbf{OA}_i}{\sum_i a_i}$$

b) La posición del punto C es independiente del sistema de referencia elegido, y sólo depende de la posición relativa de los puntos $A_i(x_i, y_i, z_i)$ de su línea de acción y del módulo $\mathbf{a}_i$ de los vectores. En efecto, supongamos que con otro origen O' de coordenadas el nuevo punto es el C', el cual verificará:

$$\mathbf{O'C'} = \frac{\sum_i a_i \mathbf{O'A}_i}{\sum a_i}$$

ahora bien, $\mathbf{O'A}_i = \mathbf{OA}_i - \mathbf{OO'}$, con lo que:

$$\mathbf{O'C'} = \frac{\sum_i a_i \mathbf{OA}_i}{\sum_i a_i} - \frac{\sum_i a_i \mathbf{OO'}}{\sum_i a_i} = \mathbf{OC} - \mathbf{OO'}$$

Por otro lado, al referirse el primitivo punto C al origen O', es:

$$\mathbf{O'C} = \mathbf{OC} - \mathbf{OO'}$$

lo que pone de manifiesto que C y C' coinciden.

3.7 Sistema de vectores localizados paralelos

Si en un sistema de vectores deslizantes, suponemos a estos localizados en los puntos fijos $A_i(x_i, y_i, z_i)$ obtenemos un sistema de vectores localizados paralelos, y la expresión del vector OC será única, llamándose a C *centro del sistema*.

Centro del sistema

El centro del sistema es independiente de la orientación de los vectores, puesto que ésta no figura en la Expresión [3.11], y cumple las mismas propiedades a) y b) estudiadas para los sistemas de vectores deslizantes paralelos.

3.8 Pares

El sistema más sencillo de vectores deslizantes paralelos es el constituido por dos vectores de igual módulo, direcciones paralelas y sentidos opuestos, al que se denomina *par de vectores* (Figura 3.6).

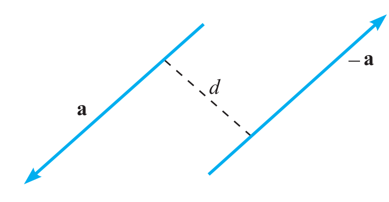


Figura 3.6.

La resultante del par es evidentemente nula, lo que lleva, teniendo en cuenta la Ecuación [3.3], a que el momento resultante de este sistema sea constante, igual para cualquier punto del espacio.

El módulo del momento del par es:

$$M = d \cdot a \qquad [3.13]$$

siendo d la distancia entre las rectas soporte de ambos vectores, denominada *brazo del par*, y a el módulo de los vectores. Como vemos, el módulo del momento del par es igual al área del paralelogramo que determinan los vectores que lo forman.

La dirección del momento es perpendicular al plano determinado por los dos vectores y su sentido es el del desplazamiento de un tornillo que girase en el sentido que indican los vectores que forman el par.

Dado un vector arbitrario **M** podemos encontrar infinitos pares de vectores que tengan por momento a **M**. Uno cualquiera de ellos se obtendría así (Figura 3.7): tracemos un plano π perpendicular al vector dado **M**; situados en este plano, tracemos dos vectores paralelos, de igual módulo y distinto sentido, de forma que su módulo a y la separación de sus líneas de acción d verifiquen [3.13], y cuidando de que el sentido de giro del par y el sentido del vector dado verifiquen la regla del tornillo enunciada anteriormente.

Figura 3.7.

3.9 Equivalencia de dos sistemas de vectores

Se dice que dos sistemas S y S' son equivalentes ($S \sim S'$) en un punto del espacio, cuando tienen la misma resultante y el mismo momento resultante respecto a ese punto:

$$S \approx S' \quad \text{si} \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}' \quad \text{y} \quad \mathbf{M}_O(S) = \mathbf{M}_O(S') \qquad [3.14]$$

Si dos sistemas S y S' son equivalentes en un punto O del espacio, también lo serán en cualquier otro punto O' del mismo. En efecto, para el sistema S se verifica:

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + \mathbf{O'O} \times \mathbf{R}$$

análogamente, para el sistema S':

$$\mathbf{M}'_{O'} = \mathbf{M}'_O + \mathbf{O'O} \times \mathbf{R}'$$

lo que teniendo en cuenta la invarianza de la resultante nos conduce a que si [3.14] es verificada en el punto O, también lo es en otro cualquiera O'.

3.10 Reducción de un sistema de vectores

La reducción de un sistema de vectores es la transformación de éste en otro lo más simplificado posible y que sea equivalente con el primitivo.

Dado un sistema de vectores, únicamente podrá presentarse uno de los casos, que recogemos en el presente cuadro, en el que, asimismo, hemos indicado el sistema más sencillo al cual puede reducirse y que estudiaremos caso por caso.

1. $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M} = 0$
   - a) $\mathbf{R} = 0$ y $\mathbf{M} = 0$: equivalente a dos vectores directamente opuestos.
   - b) $\mathbf{R} = 0$ y $\mathbf{M} \neq 0$: equivalente a un par.
   - c) $\mathbf{R} \neq 0$ y $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_P = 0$
     - c_1) $\mathbf{P} \in$ al E.C.: equivalente a la resultante como vector deslizante sobre el eje central.
     - c_2) $\mathbf{P} \notin$ al E.C.: equivalente a dos vectores coplanarios.
2. $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_P \neq 0$
   - a) $P \notin$ al E.C.: equivalente a un vector y a un par (torsor). Equivalente a dos vectores no coplanarios.
   - b) $P \in$ al E.C.: equivalente a la resultante sobre el eje central y a un par contenido en un plano normal al mismo.

Analicemos cada uno de los casos:

1.a) *Equivalencia a dos vectores directamente opuestos. Sistema nulo.*

Se dice que un sistema es equivalente a cero, o que es un *sistema nulo*, cuando su resultante y su momento resultante son nulos:

$$\mathbf{R} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{M} = 0$$

El ejemplo más sencillo de sistema nulo es el constituido por dos vectores deslizantes directamente opuestos (Figura 3.8):

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} + (-\mathbf{F}) = 0$$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_O(\mathbf{F}) + \mathbf{M}_O(-F) = 0$$

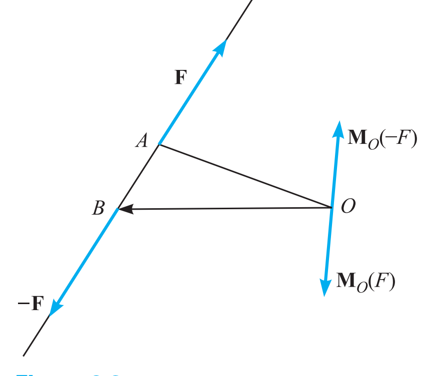


Figura 3.8.

Todo sistema de vectores nulo puede, por tanto, ser reducido a dos vectores deslizantes directamente opuestos.

1.b) *Equivalencia a un par.*

Cualquier sistema cuya resultante sea nula, puede ser reducido a un par, puesto que el momento resultante en cualquier punto del espacio es el mismo. La única condición es que el momento del par sea igual al momento resultante del sistema primitivo.

Dos pares cualesquiera son equivalentes entre sí si tienen el mismo momento, porque ambos tienen resultante nula y dan igual momento en cualquier punto del espacio.

Un sistema formado por pares en número cualquiera es siempre equivalente a un par único cuyo momento es la suma vectorial de los momentos de los pares

componentes. En efecto, el sistema formado por n pares $\mathbf{F}_1$, $-\mathbf{F}_1$; $\mathbf{F}_2$, $-\mathbf{F}_2$; ...; $\mathbf{F}_n$, $-\mathbf{F}_n$, tiene resultante nula y, por tanto, el momento resultante del sistema respecto a cualquier punto del espacio es el mismo y puede reducirse a un par, cuyo momento debe ser igual al momento resultante del sistema primitivo, es decir, a la suma de los momentos de los pares componentes del sistema.

1.c$_1$) *Equivalencia a la resultante situada como vector deslizante sobre el eje central.*

Si un sistema se reduce únicamente a su resultante como vector deslizante; en un punto cualquiera de la recta soporte de ésta, el momento del sistema ha de ser nulo, por serlo el momento de la resultante, equivalente al sistema (Figura 3.9). El segundo invariante ha de ser, por tanto, nulo, y en un punto cualquiera del espacio siempre han de ser perpendiculares el momento resultante y la resultante. Este caso no es realmente distinto del 1.c$_2$), que estudiaremos a continuación.

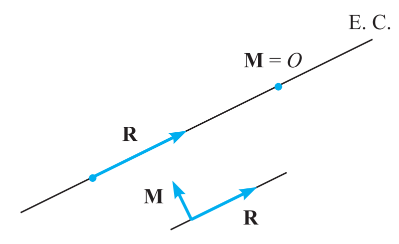


Figura 3.9.

Recíprocamente, si al reducir un sistema cualquiera de vectores en un punto, el momento resultante y la resultante son perpendiculares, el momento mínimo es nulo y si elegimos para reducir al sistema un punto de su eje central, es evidente que el sistema quedará reducido únicamente a su resultante, situada como vector deslizante sobre el eje central.

1.c$_2$) *Equivalencia a dos vectores coplanarios.*

Si un sistema cuyo segundo invariante es nulo tiene en un punto O del espacio $\mathbf{R} \neq 0$ y $\mathbf{M} \neq 0$, deberá ser $\mathbf{R} \perp \mathbf{M}_O$ y en ese punto puede reducirse a dos vectores coplanarios (Figura 3.10). En efecto, sustituyamos $\mathbf{M}_O$ por un par $\mathbf{F}$, $-\mathbf{F}$, situado en el plano π perpendicular a $\mathbf{M}_O$; en este plano se encuentra la resultante $\mathbf{R}$ y si elegimos la línea de acción de uno de los vectores del par pasando por O, podremos sumar este vector con la resultante, obteniéndose el vector $\mathbf{OA}$, y quedando el sistema reducido a los dos vectores $\mathbf{F}$ y $\mathbf{OA}$, ambos en el plano π.

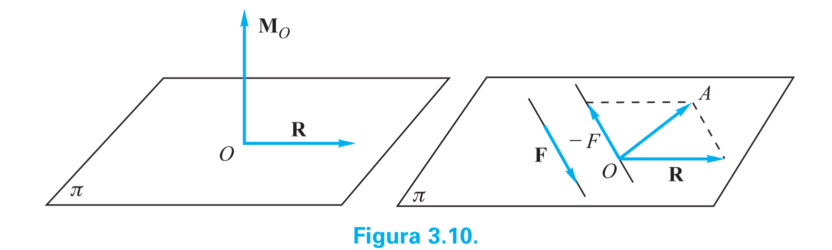


Figura 3.10.

Este sistema tiene nulo su tercer invariante y, por tanto, en un punto del eje central el momento será nulo, quedando el sistema reducido a la resultante situada sobre el eje central, que es el caso 1.c$_1$).

Vemos, pues, cómo un mismo sistema de vectores S puede reducirse al caso 1.c$_1$) o al 1.c$_2$), según que elijamos para la reducción un punto de su eje central o uno cualquiera del espacio, respectivamente.

2.a) *Equivalencia a un vector y un par* (*torsor*).

Todo sistema de vectores deslizantes es, en general, equivalente al sistema formado por la resultante aplicada en un punto O y un par, cuyo eje sea el momento resultante del sistema respecto a O. Al sistema formado por la resultante y el par o momento resultante, se le denomina *torsor*.

En efecto, sea $\mathbf{R}$ la resultante y $\mathbf{M}_O$ el momento resultante del sistema respecto al punto arbitrario O (Figura 3.11). Tomemos un plano π perpendicular a $\mathbf{M}_O$, podemos sustituir, como ya hemos visto, el vector $\mathbf{M}_O$ por un par $\mathbf{F}$, $-\mathbf{F}$, situado en

el plano π y cuyo eje sea $\mathbf{M}_O$. Con ello, hemos reducido el sistema a la resultante aplicada en O y un par $\mathbf{F}$, $-\mathbf{F}$, situado en un plano perpendicular a $\mathbf{M}_O$.

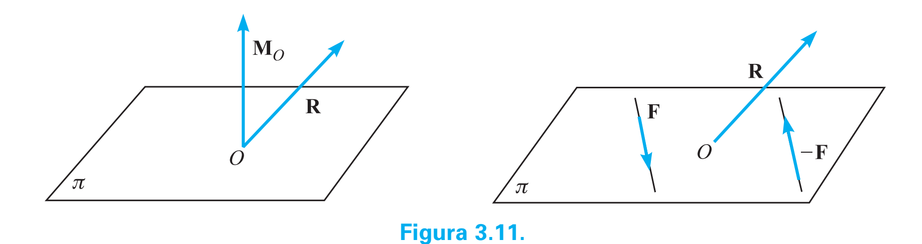


Figura 3.11.

2.b) *Equivalencia a la resultante y al momento en dirección del eje central.*

Si en particular elegimos el punto O sobre el eje central, la resultante general y el momento resultante serán paralelos, ambos tienen la dirección del eje central y en este caso el plano que contiene a los vectores $\mathbf{F}$, $-\mathbf{F}$ es perpendicular a la resultante (Figura 3.12).

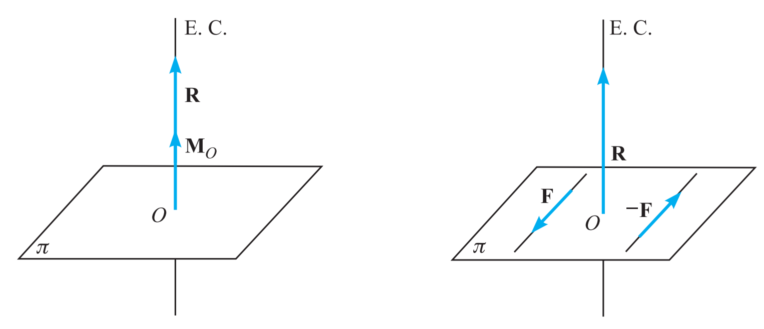


Figura 3.12.

Si elegimos uno de los vectores del par de forma que pase por O, podremos sumarlo con $\mathbf{R}$, y el sistema quedará reducido a dos vectores no coplanarios que son el $-\mathbf{F}$ y el $\mathbf{OA} = \mathbf{F} + \mathbf{R}$ (Figura 3.13).

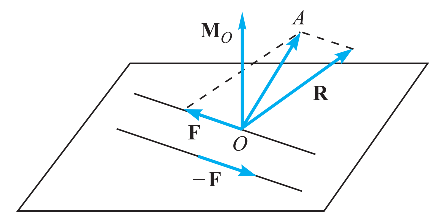


Figura 3.13.

Funciones vectoriales

CAPÍTULO



4.1 Definición

Un vector es función de una variable escalar si lo es alguna de sus componentes. Lo que de forma general se expresa:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \qquad [4.1]$$

Si hacemos coincidir invariablemente el origen del vector con el de coordenadas, el extremo del vector describe una curva, denominada **curva indicatriz** (Figura 4.1), cuya ecuación vectorial es la [4.1], siendo sus ecuaciones paramétricas:

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad \text{y} \quad z = z(t) \qquad [4.2]$$

Si entre las ecuaciones paramétricas eliminamos el tiempo, obtenemos las ecuaciones cartesianas de la curva.

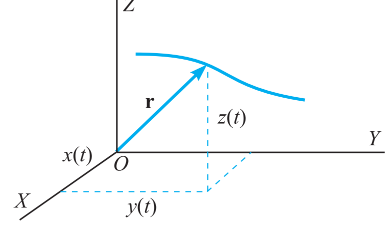


Figura 4.1.

EJEMPLO 4.1

Dada la función vectorial $\mathbf{r}(t) = 2\cos 2t\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,2t\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$, hallemos para su curva indicatríz: 1.º Su ecuación en paramétricas. 2.º Su ecuación en cartesianas.

Solución:

1.º Las ecuaciones paramétricas de la curva indicatríz de la función dada son:

$$x = 2\cos 2t \quad , \quad y = 2\,\text{sen}\,2t \quad \text{y} \quad z = 4$$

En consecuencia, se trata de una curva plana, ya que debe estar contenida en el plano $z = 4$.

2.º Las ecuaciones cartesianas se obtienen eliminando la variable t entre las ecuaciones paramétricas, lo que se consigue elevando las dos primeras al cuadrado y sumando:

$$x^2 + y^2 = 4 \quad , \quad z = 4$$

Por tanto, se trata de una circunferencia de radio 2, centro $C(0, 0, 4)$ y contenida en el plano $z = 4$ (Figura 4.2).

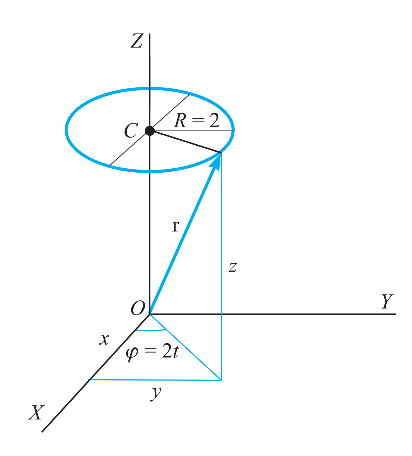


Figura 4.2.

4.2 Derivada de un vector función de una variable escalar

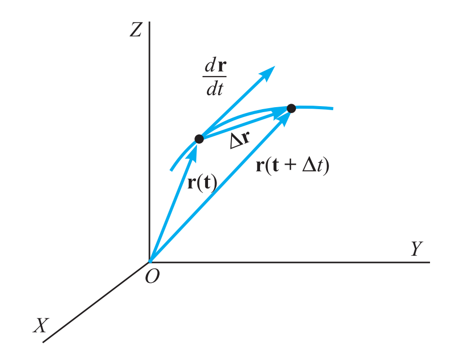


Figura 4.3.

A un valor dado de la variable t le corresponde un valor $\mathbf{r}(t)$ del vector [4.1]

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

Si se incrementa el valor de la variable escalar un Δt (Figura 4.3), el vector tomará el valor:

$$\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) = x(t + \Delta t)\mathbf{i} + y(t + \Delta t)\mathbf{j} + z(t + \Delta t)\mathbf{k}$$

al restar a esta expresión la [4.1] se obtiene:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) = [x(t + \Delta t) - x(t)]\mathbf{i} + [y(t + \Delta t) - y(t)]\mathbf{j} + $$
$$+ [z(t + \Delta t) - z(t)]\mathbf{k}$$

al dividir por Δt y tomar límites resulta:

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz(t)}{dt}\mathbf{k} \qquad [4.3]$$

La derivada de un vector función de una variable escalar es un nuevo vector cuyas componentes son las derivadas de las componentes.

El vector derivada es, por tanto, tangente a la curva indicatriz, ya que la dirección del vector $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$, al tender Δt a cero, tiende a la tangente a la curva.

4.3 Reglas de derivación

a) *Derivada de una suma de funciones vectoriales.*

La derivada de una suma de funciones vectoriales es la suma de las derivadas de las citadas funciones:

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t) + \cdots + \mathbf{r}_n(t)] = \frac{d}{dt}\{[x_1(t) + \cdots + x_n(t)]\,\mathbf{i} + $$
$$+ [y_1(t) + y_2(t) + \cdots + y_n(t)]\,\mathbf{j} + [z_1(t) + z_2(t) + \cdots + z_n(t)]\,\mathbf{k}\} = $$
$$= \left(\frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{dx_n}{dt}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{dy_1}{dt} + \frac{dy_2}{dt} + \cdots + \frac{dy_n}{dt}\right)\mathbf{j} + $$
$$+ \left(\frac{dz_1}{dt} + \frac{dz_2}{dt} + \cdots + \frac{dz_n}{dt}\right)\mathbf{k} = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \cdots + \frac{d\mathbf{r}_n}{dt}$$

b) *Derivada del producto de una función escalar por una vectorial.*

La derivada del producto de una función escalar por una vectorial es igual a la derivada de la función escalar multiplicada por la vectorial, más la función escalar multiplicada por la derivada de la función vectorial:

$$\frac{d}{dt}[\varphi(t)\mathbf{r}(t)] = \frac{d}{dt}[\varphi(t)x(t)\mathbf{i} + \varphi(t)y(t)\mathbf{j} + \varphi(t)z(t)\mathbf{k}] =$$

$$= \left(\frac{d\varphi}{dt}x + \varphi\frac{dx}{dt}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{d\varphi}{dt}y + \varphi\frac{dy}{dt}\right)\mathbf{j} +$$

$$+ \left(\frac{d\varphi}{dt}z + \varphi\frac{dz}{dt}\right)\mathbf{k} = \frac{d\varphi}{dt}\mathbf{r} + \varphi\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

c) *Derivada del producto escalar de dos funciones vectoriales.*

La derivada del producto escalar de dos funciones vectoriales es igual a la derivada de la primera multiplicada escalarmente por la segunda, más la primera multiplicada escalarmente por la derivada de la segunda:

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2(t)] = \frac{d}{dt}[x_1(t)\,x_2(t) + y_1(t)\,y_2(t) + z_1(t)\,z_2(t) =$$

$$= \frac{dx_1}{dt}x_2 + x_1\frac{dx_2}{dt} + \frac{dy_1}{dt}y_2 + y_1\frac{dy_2}{dt} +$$

$$+ \frac{dz_1}{dt}z_2 + z_1\frac{dz_2}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\cdot\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1\cdot\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}$$

d) *Derivada del producto vectorial de dos funciones vectoriales.*

La derivada del producto vectorial de dos funciones vectoriales es igual a la derivada de la primera multiplicada vectorialmente por la segunda más la primera multiplicada vectorialmente por la derivada de la segunda:

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t)] = \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{dx_1}{dt} & \frac{dy_1}{dt} & \frac{dz_1}{dt} \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ \frac{dx_2}{dt} & \frac{dy_2}{dt} & \frac{dz_2}{dt} \end{vmatrix} = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\times\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1\times\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}$$

e) *Derivada del producto mixto de tres funciones vectoriales.*

La derivada del producto mixto de tres funciones vectoriales es igual a la derivada del determinante correspondiente, es decir, a la suma de tres productos mixtos en cada uno de los cuales está derivada una de las funciones vectoriales:

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1\cdot(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3)] = \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dt} & \frac{dy_1}{dt} & \frac{dz_1}{dt} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} & \dfrac{dy_2}{dt} & \dfrac{dz_2}{dt} \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \dfrac{dx_3}{dt} & \dfrac{dy_3}{dt} & \dfrac{dz_3}{dt} \end{vmatrix} = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\cdot(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) +$$

$$+\ \mathbf{r}_1 \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \times \mathbf{r}_3\right) + \mathbf{r}_1 \cdot \left(\mathbf{r}_2 \times \frac{d\mathbf{r}_3}{dt}\right)$$

Una consecuencia muy importante se deduce del apartado c), y es que la derivada de una función vectorial, de módulo constante, es ortogonal a dicha función vectorial. En efecto, sea:

$$\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(t) = r^2 = \text{cte.}$$

al derivar respecto a t resultará $\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}/dt = 0$, lo que al no ser nulo ni $\mathbf{r}$, ni $d\mathbf{r}/dt$, exige que ambos sean ortogonales.

4.4 Fórmulas de Frenet. Triedro intrínseco

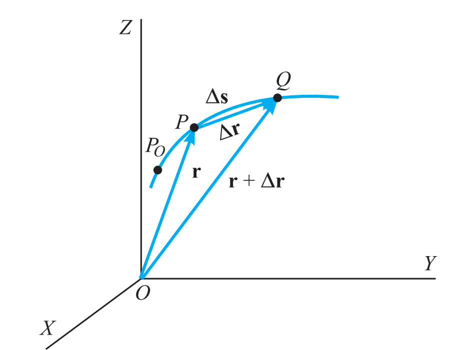


Figura 4.4.

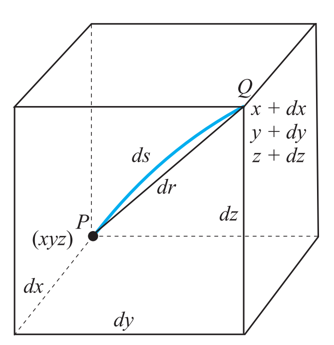


Figura 4.5.

Si tomamos como parámetro del vector $\mathbf{r}$ que define una curva cualquiera a la longitud del arco que describe su extremo, contado a partir de un punto P_O (Figura 4.4), será:

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}$$

y la derivada de este vector es:

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}(s)}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}$$

y, como la cuerda y el arco son infinitésimos equivalentes (Figura 4.5), su cociente será la unidad, es decir:

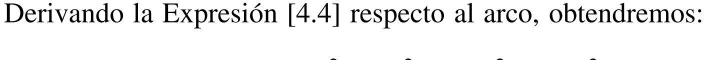
$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right| = 1$$

y, por tanto,

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \qquad [4.4]$$

es el *vector unitario* dirección de la *tangente*.

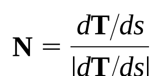
Derivando la Expresión [4.4] respecto al arco, obtendremos:



$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d^2x}{ds^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{ds^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{ds^2}\mathbf{k}$$

Normal principal

Este vector, por ser $\mathbf{T}$ de módulo constante, ha de ser perpendicular a $\mathbf{T}$; pues bien, se denomina *normal principal* $\mathbf{N}$ al vector unitario de su dirección:



$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/ds}{|d\mathbf{T}/ds|}$$

o bien:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|\mathbf{N} \qquad [4.5]$$

Sean A y B dos puntos de la trayectoria separados por un incremento de arco Δs y en ellos consideremos el vector tangente unitaria $\mathbf{T}$. Ambas tangentes en A y B, al igual que las normales, forman un ángulo $\Delta\alpha$, y la variación de $\mathbf{T}$ al pasar del punto A al B se obtiene restando ambos vectores tangente unitaria, verificándose $\Delta T = \Delta\alpha$ (Figura 4.6). Dividiendo esta expresión por Δs y tomando límites cuando Δs tiende a cero, resulta:

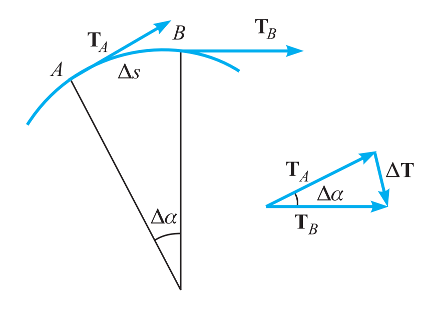


Figura 4.6.

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{T}|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$$

Radio de curvatura

lo que, definiendo el radio de curvatura ρ como la derivada del arco respecto al ángulo, es:

$$\left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

y [4.5] se escribe:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{1}{\rho}\mathbf{N} \qquad [4.6]$$

siendo la curvatura:

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} \qquad [4.7]$$

Binormal

Se define el *vector binormal*, $\mathbf{B}$, a la curva en un punto P de la misma, mediante la relación:

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} \qquad [4.8]$$

siendo perpendicular a los vectores $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$, y formando estos tres vectores un triedro tirrectangular $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$, característico para cada punto de la curva, al que se denomina *triedro intrínseco*.

Derivando la [4.8] respecto al arco y teniendo en cuenta la [4.6], se obtiene:

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds}$$

lo que demuestra que $d\mathbf{B}/ds$ es un vector perpendicular a $\mathbf{T}$, y como $\mathbf{B}$ es también un vector unitario, su derivada $d\mathbf{B}/ds$ es perpendicular a él, lo que hace que forzosamente $d\mathbf{B}/ds$ tenga la dirección de la normal unitaria, pudiéndose escribir:

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\frac{1}{\tau}\mathbf{N} \qquad [4.9]$$

Radio de torsión

Al escalar $1/\tau$ se le denomina *torsión* de la curva y es positiva cuando el triedro móvil gira en sentido positivo alrededor de la tangente, al desplazarse el punto a lo largo de la curva en sentido positivo.

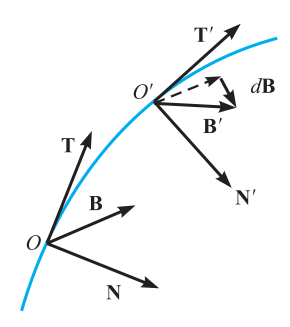


Figura 4.7.

De aquí la necesidad del signo negativo, pues al pasar el triedro de la posición O a la O', si gira en sentido positivo alrededor de la tangente, $d\mathbf{B}$ y $\mathbf{N}$ tienen distinto sentido (Figura 4.7).

Derivando respecto al arco la relación $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$ y teniendo en cuenta [4.6] y [4.9], resulta:

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \frac{d\mathbf{B}}{ds} \times \mathbf{T} + \mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{T}}{ds} = -\frac{1}{\tau}(\mathbf{N} \times \mathbf{T}) + (\mathbf{B} \times \mathbf{N})\frac{\mathbf{1}}{\rho}$$

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \frac{1}{\tau}\mathbf{B} - \frac{1}{\rho}\mathbf{T} \qquad [4.10]$$

Las ecuaciones [4.6], [4,9] y [4.10] son las denominadas *fórmulas de Frenet*.

Estas fórmulas pueden condensarse en una sola expresión matricial, que puede servir como regla nemotécnica:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{d\mathbf{T}}{ds} \\ \dfrac{d\mathbf{N}}{ds} \\ \dfrac{d\mathbf{B}}{ds} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho} & 0 \\ -\dfrac{1}{\rho} & 0 & \dfrac{1}{\tau} \\ 0 & \dfrac{1}{\tau} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} \qquad [4.11]$$

Para determinar el valor de la torsión multipliquemos escalarmente por $\mathbf{B}$ la Ecuación [4.10] y tengamos en cuenta las [4.8] y [4.6]:

$$\frac{1}{\tau}\mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{ds} = (\mathbf{T} \times \mathbf{N}) \cdot \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \rho\left(\mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{T}}{ds}\right) \cdot \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \rho^2\left(\mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{T}}{ds}\right) \cdot \frac{d^2\mathbf{T}}{ds^2}$$

pudiendo escribirse en forma determinante:

$$\frac{1}{\tau} = \rho^2 \begin{vmatrix} \dfrac{dx}{ds} & \dfrac{dy}{ds} & \dfrac{dz}{ds} \\ \dfrac{d^2x}{ds^2} & \dfrac{d^2y}{ds^2} & \dfrac{d^2z}{ds^2} \\ \dfrac{d^3x}{ds^3} & \dfrac{d^3y}{ds^3} & \dfrac{d^3z}{ds^3} \end{vmatrix} \qquad [4.12]$$

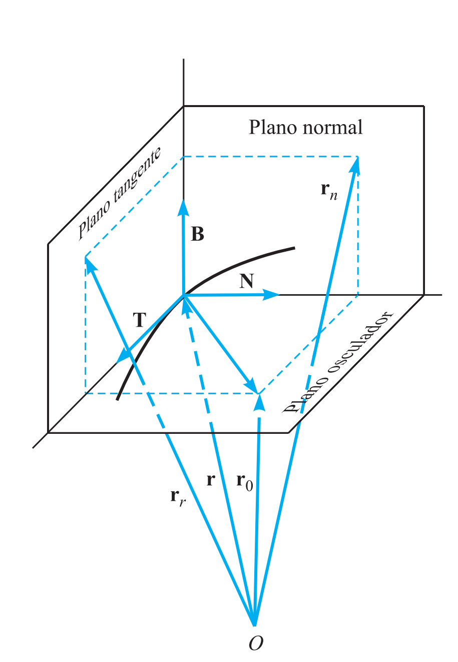


Figura 4.8.

estando ρ determinado por la [4.7].

Al plano determinado por los vectores $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$ se le denomina *plano osculador*; al determinado por los vectores $\mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$, *plano normal*; y al determinado por los vectores $\mathbf{T}$ y $\mathbf{B}$, *plano rectificante* (Figura 4.8).

Las ecuaciones de estos planos se determinan de forma inmediata, así:

$$\begin{aligned} &\text{Plano osculador:} && (r_0 - r) \cdot \mathbf{B} = 0 \\ &\text{Plano normal:} && (r_n - r) \cdot \mathbf{T} = 0 \qquad [4.13] \\ &\text{Plano rectificante:} && (r_r - r) \cdot \mathbf{N} = 0 \end{aligned}$$

EJEMPLO 4.2

Hallemos los vectores unitarios y las ecuaciones de los planos del triedro intrínseco correpondiente a la curva dada por la ecuación:

$$\mathbf{r}(s) = \cos\frac{s}{\sqrt{2}}\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{2}}\,\mathbf{j} + \frac{s}{\sqrt{2}}\,\mathbf{k}$$

Asimismo, determinaremos su curvatura y su torsión.

Solución:

El vector tangente unitario es:

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{2}}\,\mathbf{i} + \cos\frac{s}{\sqrt{2}}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$$

Derivando éste respeto al arco se obtiene:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{1}{2}\left(-\cos\frac{s}{\sqrt{2}}\,\mathbf{i} - \operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{2}}\,\mathbf{j}\right)$$

cuyo módulo es la curvatura:

$$\frac{1}{\rho} = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{1}{2}$$

y cuyo vector unitario es la normal principal:

$$\mathbf{N} = -\cos\frac{s}{\sqrt{2}}\,\mathbf{i} - \operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{2}}\,\mathbf{j}$$

El vector binormal es:

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{2}} & \cos\frac{s}{\sqrt{2}} & 1 \\ -\cos\frac{s}{\sqrt{2}} & -\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{2}}\,\mathbf{i} - \cos\frac{s}{\sqrt{2}}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$$

La derivada de **B** respecto del arco es:

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{2}}\,\mathbf{j}\right)$$

cuyo módulo es la torsión:

$$\frac{1}{\tau} = \left|\frac{d\mathbf{B}}{ds}\right| = \frac{1}{2}$$

La ecuación del plano osculador $(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})\cdot\mathbf{B} = 0$, puesto que es:

$$\mathbf{r}_0 - \mathbf{r} = \left(x - \cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{i} + \left(y - \operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j} + \left(z - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{k}$$

será:

$$\left(x - \cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{2}} - \left(y - \operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\cos\frac{s}{\sqrt{2}} + \left(z - \frac{s}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

es decir:

$$x \operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{2}} - y\cos\frac{s}{\sqrt{2}} + z = \frac{s}{\sqrt{2}}$$

La ecuación del plano normal $(\mathbf{r}_n - \mathbf{r})\cdot\mathbf{T} = 0$ es:

$$-\left(x - \cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{2}} + \left(y - \operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\cos\frac{s}{\sqrt{2}} + z - \frac{s}{\sqrt{2}} = 0$$

o bien:

$$x \operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{2}} - y\cos\frac{s}{\sqrt{2}} - z = -\frac{s}{\sqrt{2}}$$

Análogamente, la ecuación del plano rectificante $(\mathbf{r}_r - \mathbf{r})\cdot\mathbf{N} = 0$ es:

$$-\left(x - \cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\cos\frac{s}{\sqrt{2}} - \left(y - \operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{2}} = 0$$

es decir:

$$x\cos\frac{s}{\sqrt{2}} + y\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{2}} = 1$$

LA CINEMÁTICA

La Cinemática es la ciencia que estudia el movimiento sin preocuparse de las causas que lo producen. Etimológicamente la palabra cinemática se deriva del griego *kinema*, *kinematos*, que significa movimiento.

La concepción aristotélica del movimiento unía indisolublemente la causa y el efecto: *movimiento es un proceso que requiere una causa continua*, es decir, *el motor debe siempre acompañar al cuerpo que se mueve*.

Filopon de Alejandría (siglo VI d.C.), cristiano neoplatónico, fue el primero en rechazar las ideas de Aristóteles sobre el movimiento y propone que *una cierta fuerza motriz debe darse al proyectil en el acto del lanzamiento*, *fuerza motriz o energeia* (energía), *que es prestada y que decrece según la naturaleza del proyectil y del medio*.

Budiran, rector de la universidad de París, en 1328 y 1340, siguió defendiendo que el motor debe acompañar al cuerpo y estableció que debía ser proporcional a la cantidad de materia y a la velocidad, lo que parece ser precursor de la *quantitè de mouvemente* de Descartes, el *ímpetu*, de Galileo o la *fuerza viva* de Leibniz.

Los primeros estudios sobre cinemática propiamente dicha se deben a Alberto de Sajonia (1316-1390), en su libro *Questiones in libros y de Caelo*; a Nicolás de Oresme (-1382), obispo de Lesieux, en *De Configuratione Qualitatum*, el cual empleó los métodos de la geometría analítica para representar el cambio en la velocidad lineal, y a Guillermo de Heytesbury (1313-1372), en su *Regulae Solvendi Sophismata*, donde define los movimientos uniformemente acelerado y retardado como *movimientos en los cuales se adquieren o se pierden incrementos iguales de velocidad en periodos iguales de tiempo*.

La ley correcta de caída libre fue establecida por vez primera por Domingo de Soto, dominico nacido en Segovia en 1494, que estudió en las universidades de Alcalá y París y fue confesor de Carlos I, muriendo en Salamanca en 1560. Pero hay que llegar a Galileo para encontrar un estudio sistemático de las leyes de la cinemática, así, en su tratado *Dos sistemas principales*, puede leerse: *llamamos velocidades iguales cuando los espacios recorridos se encuentran en la misma proporción que los tiempos empleados*, y en su obra *Dos nuevas ciencias*, cuando al referirse al movimiento local, define el movimiento uniformemente acelerado, como *aquel que partiendo del reposo adquiere durante intervalos iguales de tiempo incrementos iguales de velocidad*. Lo que ya había establecido al estudiar la caída libre en la cual *la velocidad es proporcional al tiempo*, y el movimiento es *uniformemente disforme* (uniformemente acelerado) *e igual para todos los cuerpos*.

Galileo también fue el primero en establecer la posibilidad de estudiar el movimiento de forma abstracta: *porque cualquiera puede inventar un tipo arbitrario de movimiento y estudiar sus propiedades* (Dos ciencias nuevas).

La cinemática ha ido cambiando progresivamente las explicaciones cualitativas de la escuela aristotélica por el formalismo matemático iniciado por Euclídes y Arquímedes y seguido por Galileo y Newton, quien estableció el concepto de variable como *una magnitud que fluye con el tiempo*, y el concepto de derivada a la que llamó *fluxión*, como la *variación de la variable con el tiempo*.

Diferentes científicos han seguido ampliando los conocimientos matemáticos que han permitido el desarrollo de la cinemática. Así, Rene Descartes (1596-1650) estableció el sistema de referencia de coordenadas cartesianas; Leibniz (1646-1716), en 1675, en uno de sus manuscritos utilizó por primera vez el simbolismo diferencial y en 1684 publicó *Nova Methodus pro maximi et minimis...*, en donde establece los principios del cálculo diferencial y utiliza expresiones de curvas en cartesianas; Euler (1707-1783), en 1748, publicó sus trabajos sobre análisis infinitesimal en *Introductio in análisis infinitorum*, y Gibbs (1839-1903), hacia 1880, desarrolló el álgebra vectorial e introdujo el simbolismo actualmente utilizado.

En cinemática únicamente son necesarias dos magnitudes, el espacio y el tiempo. La cinemática clásica usa el espacio euclídeo, homogéneo, isótropo y tridimensional, y el tiempo absoluto, es decir, independiente del sistema de referencia. La cinemática relativista utiliza el tiempo relativo, es decir, dependiendo del sistema de referencia elegido, y toma como invariante la velocidad de la luz, que es independiente del sistema de referencia. Ello obliga a usar un espacio cuadrimensional, denominado espacio de Minkowski, lo que será desarrollado en el segundo tomo de este libro.

Iniciaremos el estudio de la cinemática clásica con un capítulo dedicado a la cinemática del punto, en el

cual se establecen los conceptos básicos en cinemática. Se dice que un punto se mueve respecto a un sistema de referencia, cuando su posición respecto a aquél cambia con el tiempo. Por tanto, un punto móvil respecto a un sistema de referencia puede resultar inmóvil respecto a otro; así; un punto de un vehículo en marcha puede estar inmóvil respecto a éste, pero móvil respecto al sistema de referencia ligado al suelo. Resulta, pues, evidente la relatividad del movimiento y al estudio del movimiento relativo dedicaremos un capítulo.

Finalizaremos el estudio de la cinemática clásica dedicando un capítulo al estudio de la cinemática del sólido, en el cual expondremos los aspectos fundamentales, básicos para estudios posteriores más especializados, como la cinemática de mecanismos y máquinas.

Cinemática del punto

CAPÍTULO 5

5.1 Vector posición

Para fijar la posición de un punto dentro del sistema de referencia en el cual queremos estudiar su movimiento, utilizaremos un vector, cuyo origen coincidirá invariablemente con el origen del sistema de referencia y cuyo extremo estará sobre el lugar ocupado por el punto móvil. A este vector se le denomina *vector posición*, siendo función del tiempo y simbolizándose mediante:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

La trayectoria del punto móvil es el lugar geométrico de los puntos del espacio ocupados por el móvil en los diferentes instantes y será la curva indicatriz del vector $\mathbf{r}$ (Figura 5.1).

Para los desarrollos teóricos utilizaremos el sistema de referencia cartesiano trirrectangular, en el cual es:

$$\mathbf{r} = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k} \qquad [5.1]$$

Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria son:

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad z = z(t)$$

siendo el parámetro el tiempo. La eliminación del tiempo entre estas ecuaciones permite obtener la ecuación cartesiana de la trayectoria.

Figura 5.1.

5.2 Vector velocidad

El *vector velocidad es*, por definición, *la derivada del vector posición respecto al tiempo*:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}(t)\,\mathbf{i} + \dot{y}(t)\,\mathbf{j} + \dot{z}(t)\,\mathbf{k} \qquad [5.2]$$

Las componentes del vector velocidad en el sistema de referencia cartesiano elegido son:

$$v_x = \dot{x}(t) \quad ; \quad v_y = \dot{y}(t) \quad \text{y} \quad v_z = \dot{z}(t) \qquad [5.3]$$

y el módulo de la velocidad es:

$$v = \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]^{1/2} = \frac{ds}{dt} \qquad [5.4]$$

Esta ley física nos relaciona el módulo de la magnitud velocidad con las magnitudes fundamentales espacio y tiempo, y nos permite establecer para la velocidad las dimensiones LT^{-1}, siendo su unidad en el S.I. el m/s, que no tiene denominación especial. El módulo de la velocidad es denominado por algunos autores celeridad o rapidez.

Velocidad en el triedro intrínseco

Por la definición de derivada de un vector, el vector velocidad es tangente a la trayectoria y su sentido el del movimiento del punto, pudiendo expresarse en el triedro intrínseco para cada punto de la curva (Figura 5.2):

$$\mathbf{v} = v\,\mathbf{T} \qquad [5.5]$$

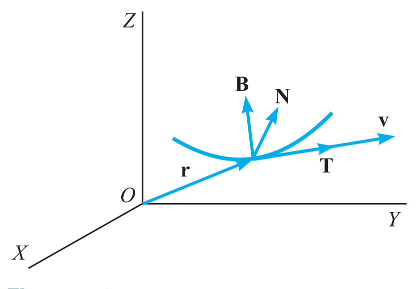


Figura 5.2.

5.3 Vector aceleración

Se define el *vector aceleración* como la *derivada respecto al tiempo del vector velocidad*, y lo simbolizaremos mediante **a**:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}(t)\,\mathbf{i} + \ddot{y}(t)\,\mathbf{j} + \ddot{z}(t)\,\mathbf{k} \qquad [5.6]$$

Las componentes de la aceleración en el sistema cartesiano trirrectangular son:

$$a_x = \ddot{x}(t) \quad , \quad a_y = \ddot{y}(t) \quad \text{y} \quad a_z = \ddot{z}(t)$$

Aceleración en el triedro intrínseco

La expresión del vector aceleración en el triedro intrínseco se consigue derivando respecto al tiempo la expresión de la velocidad en el sistema intrínseco:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{T}) = \frac{dv}{dt}\,\mathbf{T} + v\,\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\mathbf{T} + v\,\frac{d\mathbf{T}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} =$$

$$= \frac{dv}{dt}\,\mathbf{T} + v^2\,\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{dv}{dt}\,\mathbf{T} + \frac{v^2}{\rho}\,\mathbf{N} \qquad [5.7]$$

Componentes intrínsecas de la aceleración

Esta última igualdad se escribe teniendo en cuenta la Expresión [4.6], resultando ser las componentes de la aceleración en el triedro intrínseco:

$$a_T = \frac{dv}{dt} \quad ; \quad a_N = \frac{v^2}{\rho} \quad \text{y} \quad a_B = 0 \qquad [5.8]$$

lo que pone de manifiesto que el vector aceleración está situado en el correspondiente plano osculador de la trayectoria. La componente de la aceleración sobre la dirección de la tangente se denomina *aceleración tangencial* y la componente sobre la dirección de la normal principal, *aceleración normal*.

Podemos utilizar las expresiones [5.8] para establecer que la ecuación de dimensiones de una aceleración es LT^{-2}, siendo su unidad en el S.I. el $m.s^{-2}$.

EJEMPLO 5.1

Un móvil parte del origen del sistema de referencia y recorre la parábola $2y = x^2$, en la que x e y están expresadas en metros, siendo la proyección del movimiento sobre el eje OX de velocidad constante $v_o = 2$ m/s. Calculemos:

1.º La velocidad. 2.º La aceleración. 3.º Las componentes intrínsecas de la aceleración. 4.º El radio de curvatura. 5.º. La aplicación al instante $t = \sqrt{2}$.

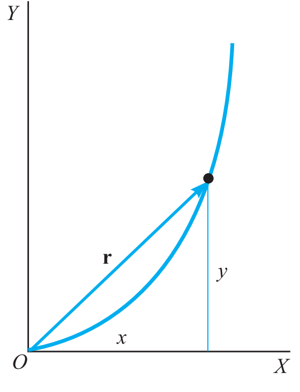


Figura 5.3.

Solución:

1.º El vector posición es $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} = x\,\mathbf{i} + \dfrac{x^2}{2}\,\mathbf{j}$ y la velocidad es $\mathbf{v} = \dot{x}\,\mathbf{i} + x\dot{x}\,\mathbf{j}$.
Puesto que debe ser $\dot{x} = 2$, es $x = 2t$ y, con ello, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4t\,\mathbf{j}$, cuyo módulo es $v = 2\sqrt{1 + 4t^2}$.



2.º El vector aceleración es $\mathbf{a} = 4\,\mathbf{j}$.

3.º El vector tangente unitaria se expresa:

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{v} = \frac{\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}}{\sqrt{1 + 4t^2}}$$

y las componentes de la aceleración sobre el triedro intrínseco son:

$$a_T = \mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = \frac{8t}{\sqrt{1 + 4t^2}}$$

y

$$\mathbf{a}_N = (\mathbf{T} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{T} = \frac{4}{\sqrt{1 + 4t^2}}\,\mathbf{k} \times \mathbf{T} = \frac{4}{1 + 4t^2}\,(\mathbf{j} - 2t\,\mathbf{i})$$

cuyo módulo es:

$$a_N = \frac{4}{\sqrt{1 + 4t^2}}$$

4.º El radio de curvatura es:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = (1 + 4t^2)^{3/2}$$

5.º Particularizando para $t = \sqrt{2}$, son: $\mathbf{v} = 2\,\mathbf{i} + 4\sqrt{2}\,\mathbf{j}$, $v = 6$ m/s,

$$a_T = 8\,\frac{\sqrt{2}}{3} \quad , \quad a_N = 4/3 \quad \text{y} \quad \rho = 27$$

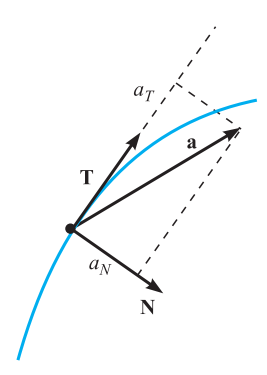


Figura 5.4.

5.4 Determinación de la base del triedro intrínseco. Método cinemático

Si el vector de posición viene expresado en función del tiempo, que es lo más frecuente, la determinación del vector **T** se realiza teniendo en cuenta que el vector velocidad $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ es tangente a la trayectoria. Por tanto, es:

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{v} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{v} \qquad [5.9]$$

La componente de la aceleración sobre la tangente (Figura 5.4) es:

$$a_T = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{v}}{v}$$

La componente de la aceleración sobre la normal es:

$$a_N = |\mathbf{T} \times \mathbf{a}| = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{v}$$

la cual, como vector, se expresa:

$$\mathbf{a}_N = (\mathbf{T} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{T}$$

cuyo vector unitario es el vector *normal principal*:

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{a}_N}{a_N} = \frac{(\mathbf{T} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{T}}{|\mathbf{T} \times \mathbf{a}|} \qquad [5.10]$$

También podemos obtener la expresión del vector normal principal a partir de la expresión de la aceleración en el triedro intrínseco: $\mathbf{a} = a_T \mathbf{T} + a_N \mathbf{N}$, de donde despejamos el vector normal principal:

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{a} - \mathbf{a}_T \mathbf{T}}{a_N} = \frac{\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{T})\mathbf{T}}{|\mathbf{T} \times \mathbf{a}|} \qquad [5.11]$$

El vector *binormal*, **B**, es el que forma triedro trirrectangular a derechas con la tangente unitaria y la normal principal, por tanto, será:

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} \qquad [5.12]$$

El radio de curvatura viene dado por la expresión:

$$\rho = \frac{v^2}{a_N} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{T} \times \mathbf{a}|} \qquad [5.13]$$

EJEMPLO 5.2

Una partícula móvil tiene como coordenadas: $x = t^2$, $y = 2t$, $z = 1$. Calculemos:

1.º La ecuación cartesiana de la trayectoria.
2.º Los vectores posición, velocidad y aceleración.
3.º La expresión de la velocidad y la aceleración en el triedro intrínseco.
4.º El radio de curvatura de la trayectoria.

Solución:

1.º Eliminando el tiempo entre las ecuaciones dadas, obtenemos $4x = y^2$, $z = 1$. Lo que nos indica que la trayectoria es una parábola situada en el plano $z = 1$, la cual hemos representado en la figura.

2.º El vector posición es:

$$\mathbf{r} = t^2\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

el vector velocidad:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = 2t\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$$

y el vector aceleración $\mathbf{a} = 2\mathbf{i}$.

3.º El módulo de la velocidad es $v = 2\sqrt{t^2 + 1}$. La expresión de la velocidad en el triedro intrínseco será $\mathbf{v} = v\mathbf{T} = 2\sqrt{t^2 + 1}\,\mathbf{T}$.

Las componentes de la aceleración sobre el triedro intrínseco son:

$$a_T = \mathbf{a}\cdot\mathbf{T} = 2t\,(t^2 + 1)^{-1/2}$$

y

$$a_N = |\mathbf{a}\times\mathbf{T}| = 2\,(t^2 + 1)^{-1/2}$$

con lo cual, la aceleración expresada en el triedro intrínseco es

$$\mathbf{a} = 2(t^2 + 1)^{-1/2}(t\,\mathbf{T} + \mathbf{N})$$

4.º El radio de curvatura se obtiene de la segunda [5.8], siendo:

$$\rho = v^2/a_N = 2\,(t^2 + 1)^{3/2}$$

EJEMPLO 5.3

Una partícula móvil tiene como vector de posición: $\mathbf{r} = t\,\mathbf{i} + mt^2\,\mathbf{j} + n\,\mathbf{k}$.

Determínense los vectores de base del triedro intrínseco de su trayectoria y el radio de curvatura ρ de la misma.

Solución:

El vector velocidad es $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2mt\,\mathbf{j}$ y su módulo $v = (1 + 4m^2t^2)^{1/2}$, con ello el vector tangente unitaria es:

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{i} + 2mt\,\mathbf{j}}{(1 + 4m^2t^2)^{1/2}}$$

El vector aceleración, derivada del vector velocidad, es $\mathbf{a} = 2m\,\mathbf{j}$. Por tanto, es:

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{a} = \frac{4m^2t}{(1 + 4m^2t^2)^{1/2}} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{T}\times\mathbf{a} = \frac{2m\,\mathbf{k}}{(1 + 4m^2t^2)^{1/2}}$$

Con ello, la [5.11] da:

$$\mathbf{N} = \frac{2m\,\mathbf{j} - \dfrac{4m^2t(\mathbf{i} + 2mt\,\mathbf{j})}{1 + 4m^2t^2}}{\dfrac{2m}{(1 + 4m^2t^2)^{1/2}}} = \frac{-2mt\,\mathbf{i} + \mathbf{j}}{(1 + 4m^2t^2)^{1/2}}$$

El vector binormal es:

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \mathbf{k}$$

El radio de curvatura está dado por la [5.12]:

$$\rho = \frac{1 + 4m^2t^2}{\dfrac{2m}{(1 + 4m^2t^2)^{1/2}}} = \frac{1}{2m}(1 + 4m^2t^2)^{3/2}$$

5.5 Algunos tipos de movimiento

Atendiendo a la geometría del movimiento podemos clasificar éste en: *rectilíneo*, *curvilíneo*, *plano* y *circular*.

Un movimiento es *rectilíneo* cuando la trayectoria es una línea recta, en cuyo caso es $\rho \to \infty$ y $a_N = 0$. Recíprocamente, si $a_N = 0$ y hay movimiento, debe ser $\rho = \infty$; la trayectoria, por tanto, es una línea recta y el movimiento rectilíneo.

Movimiento *curvilíneo* es todo tipo de movimiento que verifica $a_N \neq 0$.

Movimiento *plano* es aquél cuya trayectoria está contenida en un plano. Debiendo verificarse:

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \text{cte.} \qquad \text{o bien} \qquad \tau \to \infty$$

Movimiento *circular* es todo movimiento plano en el cual ρ es constante.

En función de la componente tangencial de la aceleración, un movimiento puede ser: *uniforme*, *variado* o *uniformemente variado*.

Movimiento *uniforme* es aquél en el cual la componente tangencial de la aceleración es nula, $a_T = 0$.

Movimiento *variado* es aquél en el cual la componente tangencial de la aceleración es función del tiempo, $a_T = f(t)$.

Movimiento *uniformemente variado* es aquél en el cual se mantiene constante la componente tangencial de la aceleración, $a_T = \text{cte}$.

5.6 Movimiento rectilíneo uniforme

Por ser el movimiento rectilíneo, es $a_N = 0$, y por ser uniforme, $a_T = 0$, en definitiva, $\mathbf{a} = 0$. Para hallar el vector velocidad es necesario, únicamente, integrar la ecuación:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0$$

lo que nos da $\mathbf{v}$ = cte; es decir, si en el instante inicial el móvil fue lanzado con velocidad $\mathbf{v}_0$, éste conserva invariable esa velocidad, verificándose en todo momento:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \qquad [5.14]$$

El vector posición $\mathbf{r}$ se obtiene integrando la ecuación:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_0$$

lo que da $\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t$ + cte.

Para el cálculo de la constante de integración es necesario conocer una condición del movimiento, por ejemplo, la posición inicial del móvil ($t = 0$), dada por $\mathbf{r}_0$. Escribiendo la última ecuación para el instante inicial, es $\mathbf{r}_0$ = cte y, en definitiva, resulta:

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 \qquad [5.15]$$

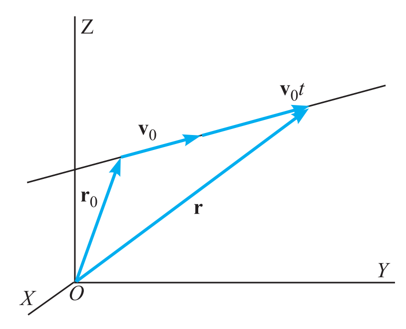


Figura 5.5.

EJEMPLO 5.4

Un móvil parte de la posición $P(2, 3, 6)$ en el instante que se toma como origen de tiempos y lleva la velocidad $\mathbf{v}_0 = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$, que mantiene constante. Determinemos su posición en el instante $t = 10$ segundos.

Solución:

Puesto que mantiene su velocidad constante, su aceleración será nula y el movimiento uniformemente acelerado $\mathbf{a} = 0$.

La definición de velocidad nos permite escribir $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$, que puede expresarse $d\mathbf{r} = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k})dt$, cuya integración es inmediata:

$$\mathbf{r} = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k})t + \mathbf{r}_0$$

Puesto que conocemos la posición inicial, debe verificarse:

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0 = 2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 6\,\mathbf{k}$$

y el vector posición es:

$$\mathbf{r} = 2(1 + t)\mathbf{i} + (3 + 4t)\mathbf{j} + (t + 6)\mathbf{k}$$

que para el instante $t = 10$ s, da:

$$\mathbf{r}(10) = 22\,\mathbf{i} + 43\,\mathbf{j} + 16\,\mathbf{k}$$

5.7 Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

Por ser rectilíneo el movimiento, será $a_N = 0$ y la aceleración se expresará en el triedro intrínseco $\mathbf{a} = a\mathbf{T}$. Siendo $\mathbf{T}$ constante, pues su dirección es la de la trayectoria, y $a\mathbf{T}$ también, por ser el movimiento uniformemente variado, resultará ser la aceleración un vector constante dirigido según la trayectoria.

Para hallar el vector velocidad, debemos integrar la ecuación:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}$$

resultando $\mathbf{v} = \mathbf{a}t + \text{cte}$, que escrita para el instante inicial ($t = 0$), es $\mathbf{v}_0 = \text{cte}$, luego la constante de integración es la velocidad inicial con que es lanzado el móvil, escribiéndose:

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}\,t + \mathbf{v}_0 \qquad [5.16]$$

Obtendremos el vector posición integrando esta última ecuación, que podemos escribir de la forma:

$$d\mathbf{r} = (\mathbf{a}\,t + \mathbf{v}_0)\,dt$$

y cuya integral es:

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2}\,\mathbf{a}\,t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 \qquad [5.17]$$

siendo $\mathbf{r}_0$ el vector posición de la partícula en el instante inicial.

EJEMPLO 5.5

Un avión lleva aceleración constante $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. Se ha medido su velocidad en el instante $t = 10$ s, $\mathbf{v}(10) = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}$, y se ha observado que en el instante $t = 4$ s pasaba por la vertical (eje OZ) con cota $z = 6$. Calculemos, en función del tiempo, la velocidad y la posición del avión.

Solución:

De la definición de aceleración $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, podemos escribir:

$$d\mathbf{v} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j})\,dt$$

que integrada da $\mathbf{v} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j})t + \mathbf{v}_0$.

Puesto que conocemos la velocidad en el instante 10 segundos, podemos calcular la constante de integración $\mathbf{v}_0$:

$$5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j})10 + \mathbf{v}_0$$

por tanto, es $\mathbf{v}_0 = -5\mathbf{i} - 14\mathbf{j} + \mathbf{k}$, y con ello la velocidad en función del tiempo:

$$\mathbf{v} = (t - 5)\mathbf{i} + (2t - 14)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

De la definición de velocidad $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, podemos escribir:

$$d\mathbf{r} = [(t - 5)\mathbf{i} + (2t - 14)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}]\,dt$$

Cuya integración es inmediata:

$$\mathbf{r} = (t^2/2 - 5t)\mathbf{i} + (t^2 - 14t)\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k} + \mathbf{r}_0$$

La constante de integración $\mathbf{r}_0$ se obtiene al conocer que en el instante $t = 4$ s el avión pasa por $z = 6$:

$$6\mathbf{k} = -12\,\mathbf{i} - 40\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k} + \mathbf{r}_0$$

de donde:

$$\mathbf{r}_0 = 12\,\mathbf{i} + 40\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$$

y la posición del avión en función del tiempo es:

$$\mathbf{r} = (t^2/2 - 5t + 12)\mathbf{i} + (t^2 - 14t + 40)\,\mathbf{j} + (t + 2)\mathbf{k}$$

EJEMPLO 5.6 Alcance

Un coche circula con exceso de velocidad a 144 km/h. El coche de la policía, que está parado, arranca en el instante en que el infractor pasa por su lado. Admitiendo que la carretera es recta, que el infractor mantiene su velocidad constante y que el coche policía lleva aceleración constante de 2 m/s^2, calculemos: 1.º El tiempo que tarda en alcanzar al coche infractor. 2.º El espacio recorrido para ello.

Solución:

1.º El espacio recorrido por el infractor es $x_1 = v_0 t = 40t$.
El espacio recorrido por el coche policía es $x_2 = 1/2\ a\ t^2 = t^2$.
En el instante del alcance ambos han recorrido el mismo espacio desde que arrancó el policía, luego:

$$40t = t^2 \quad \text{y} \quad t = 40 \text{ s}$$

2.º Durante este tiempo el espacio que han recorrido es $x = 40 \times 40 = 1\,600$ m.

EJEMPLO 5.7 Tiempo de frenado

Un coche circula en línea recta a la velocidadd de 90 km/h. La aplicación de los frenos le provoca una aceleración, que supondremos constante, de -8 m/s^2. Suponiendo que no resbala y que el tiempo de reacción del conductor es de 0,6 s, calculemos: 1.º El tiempo que tarda en parar. 2.º El espacio recorrido hasta pararse.

Solución:

1.º Una vez que el conductor pisa el freno, el coche es decelerado de forma constante hasta pararse, para lo que necesita un tiempo t_1:

$$dv = -8dt \quad , \quad v = -8t + v_0 \quad , \quad 0 = -8t_1 + 25 \quad , \quad t_1 = 3{,}125 \text{ s}$$

2.º Durante el tiempo de reacción del conductor el coche sigue con velocidad constante y recorre el espacio x_1:

$$x_1 = v_0 t = 25 \times 0{,}6 = 15 \text{ m}$$

El espacio recorrido desde que pisa el freno, x_2, está dado por la [5.17]:

$$x_2 = -4t_1^2 + v_0 t_1 = -4 \times 3{,}125^2 + 25 \times 3{,}125 = 39{,}0625 \text{ m}$$

El espacio total recorrido hasta pararse es $x = x_1 + x_2 = 54{,}0625$ m.

5.8 Movimiento circular

Es todo movimiento plano en el cual el radio de curvatura de la trayectoria es constante, es decir, la trayectoria es una cincunferencia. Elegido un punto de ésta como origen de arcos y el radio correspondiente como origen de ángulos, definimos la *velocidad angular* ω como la derivada del ángulo descrito respecto al tiempo:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad [5.18]$$

La relación que liga a las velocidades lineal y angular puede deducirse de la siguiente manera:

$$\mathbf{v} = v\,\mathbf{T} = \frac{ds}{dt}\,\mathbf{T} = \frac{ds}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{T} = R\omega\,\mathbf{T}$$

y en módulos:

$$v = R\omega \qquad [5.19]$$

El módulo de la velocidad lineal es igual al producto del radio por la velocidad angular. La Expresión [5.19] nos permite establecer las dimensiones de ω, que resultan ser las de un tiempo elevado a menos uno:

$$LT^{-1} = L[\omega]$$

de donde:

$$[\omega] = T^{-1}$$

Hercio

cuya unidad s^{-1} se denomina hercio (Hz).

La velocidad angular puede considerarse como vector deslizante cuyo eje es normal al plano del movimiento en el centro de la trayectoria y sentido el del avance de la punta de un tornillo al girar la cabeza en el mismo sentido del movimiento. Es fácil comprobar cómo el vector velocidad lineal del móvil, en un cierto instante, es el momento del vector velocidad angular respecto al punto donde se halle el móvil en ese instante (Figura 5.6):

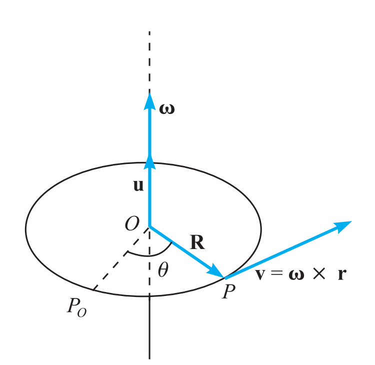


Figura 5.6.

$$\mathbf{M}_P(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{v} = \mathbf{PO} \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \qquad [5.20]$$

Debemos hacer notar el carácter de vector deslizante de $\boldsymbol{\omega}$, pues su momento respecto a P no cambia al suponerle localizado en O en otro punto cualquiera de su eje, como el O' (Figura 5.7).

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Aceleración angular

Definimos el *vector aceleración angular* $\boldsymbol{\alpha}$ como la derivada respecto al tiempo del vector velocidad angular:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega\mathbf{u}) = \frac{d\omega}{dt}\,\mathbf{u}$$

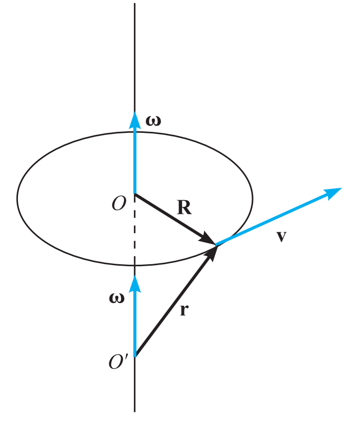


Figura 5.7.

siendo $\mathbf{u}$ el vector unitario normal al plano de la trayectoria, con el sentido indicado al definir $\boldsymbol{\omega}$, resultando tener $\boldsymbol{\alpha}$ esta misma dirección (Figura 5.8) y pudiendo escribirse:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad [5.21]$$

En este movimiento, las componentes tangencial y normal de la aceleración son, respectivamente:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = R\,\frac{d\omega}{dt} = R\,\alpha \qquad \text{y} \qquad a_N = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 \qquad [5.22]$$

La componente tangencial de la aceleración es igual al producto del radio por el módulo de la aceleración angular. La componente normal de la aceleración es igual al producto del radio por el cuadrado de la velocidad angular.

A la componente normal, por estar dirigida según el radio, también se la denomina radial.

Vectorialmente, la [5.22] se escribe:

$$\mathbf{M}_P(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{a}_T = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R} \qquad [5.23]$$

lo que fácilmente se comprueba tan sólo aplicando la definición de producto vectorial.

Utilizando la [5.20], puede expresarse el vector aceleración de la siguiente forma:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

Puesto que es:

$$\mathbf{a}_T = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R}$$

debe forzosamente ser:

$$\mathbf{a}_N = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\omega} & \mathbf{R} \\ \omega^2 & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2 \mathbf{R} = R\omega^2 \mathbf{N} \qquad [5.24]$$

En el sistema intrínseco de referencia se expresan:

$$\mathbf{R} = -R\,\mathbf{N}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\mathbf{B} = \omega\,\mathbf{B}$$

$$\mathbf{v} = R\omega\mathbf{T} = R\frac{d\theta}{dt}\mathbf{T}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\mathbf{B} = \frac{d^2\theta}{dt^2}\mathbf{B} = \alpha\,\mathbf{B}$$

$$\mathbf{a}_T = R\alpha\,\mathbf{T} = R\frac{d^2\theta}{dt^2}\mathbf{T}$$

$$\mathbf{a}_N = \boldsymbol{\omega} \times R\omega\mathbf{T} = R\omega^2\mathbf{N} = R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\mathbf{N}$$

$$\mathbf{a} = R(\alpha\,\mathbf{T} + \omega^2\mathbf{N}) = R\left[\frac{d^2\theta}{dt^2}\mathbf{T} + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\mathbf{N}\right]$$

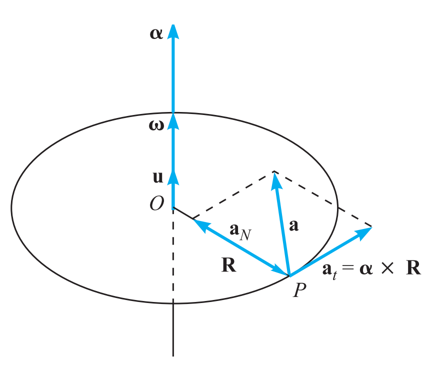


Figura 5.8.

5.9 Movimiento circular uniforme

Al ser el movimiento uniforme, la componente tangencial de la aceleración será nula, $a_T = 0$; en consecuencia, de la primera [5.22] se deduce que el módulo de la velocidad lineal es constante, v = cte y, de acuerdo con [5.19], también será constante la velocidad angular, ω = cte.

Integrando la [5.18], deducimos el ángulo descrito en función del tiempo:

$$\theta = \omega t + \theta_0 \qquad [5.25]$$

siendo θ_0 la posición en el instante $t = 0$.

La expresión del vector velocidad es $\mathbf{v} = v\,\mathbf{T} = R\omega\,\mathbf{T}$.

La aceleración angular, según [5.22], también es nula, pero hay que señalar que no lo es la aceleración normal, cuyo valor sigue dado por la segunda [5.22], $a_N = R\omega^2$.

La expresión de vector aceleración es $\mathbf{a} = R\omega^2\,\mathbf{N}$.

Periodo

Este tipo de movimiento es periódico, puesto que el móvil pasa por cada punto de la trayectoria a intervalos iguales de tiempo. A este intervalo de tiempo se le denominará *periodo* y es el mínimo tiempo que tarda el móvil en volver a ocupar una determinada posición, o lo que es igual, el tiempo que tarda en dar una vuelta. Su cálculo se hace de la siguiente manera: sea θ_1 una cierta posición ocupada por el móvil en el instante t_1, verificando $\theta_1 = \omega_1 + \theta_o$. El tiempo P que tarda en recorrer 2 π rad será el periodo, puesto que es el tiempo que tarda en volver a la posición primitiva, es decir, $\theta_1 + 2\pi = \omega(T_1 + P) + \theta_0$ y, restando ambas ecuaciones, resulta ser:

$$P = \frac{2\pi}{\omega} \qquad [5.26]$$

El periodo, pues, tiene la dimensión de un tiempo y se mide en segundos.

Frecuencia



Se define la *frecuencia* ν como la inversa del periodo:

$$\nu = \frac{1}{P} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad [5.27]$$

es decir, es el número de vueltas por unidad de tiempo. Su dimensión es T^{-1} y su unidad de medida el hercio (Hz).

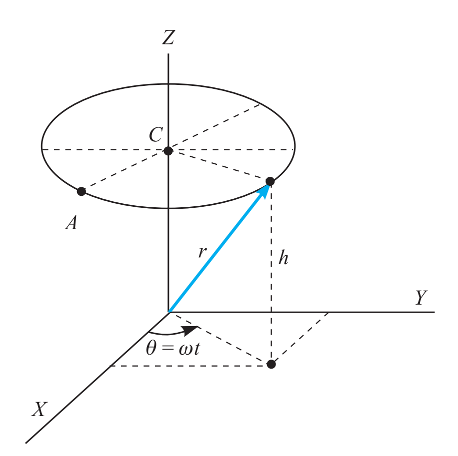


Figura 5.9.

EJEMPLO 5.8

Una partícula parte del reposo en la posición $A(R, O, h)$ y recorre con velocidad angular constante ω la circunferencia de radio R y centro $C(0, 0, h)$, que está contenida en el plano $z = h$. Determínese:



a) La ecuación vectorial de la trayectoria.

b) El vector velocidad lineal.

c) El vector aceleración.

d) La expresión de los citados vectores en el triedro intrínseco.

e) El periodo del movimiento.



Solución:

a) Las coordenadas de la partícula móvil en función del tiempo son:

$$x = R\cos\omega t \quad , \quad y = R\,\mathrm{sen}\,\omega t \quad \text{y} \quad z = h$$

El vector posición es:

$$\mathbf{r} = R\cos\omega t\,\mathbf{i} + R\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{j} + h\,\mathbf{k}$$

b) El vector velocidad será:

$$\mathbf{v} = -R\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{i} + R\omega\cos\omega t\,\mathbf{j}$$

c) El vector aceleración es:

$$\mathbf{a} = -R\omega^2(\cos\omega t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\omega t\,\mathbf{j})$$

d) La velocidad en el triedro intrínseco se expresa $\mathbf{v} = R\omega\,\mathbf{T}$, y la aceleración: $\mathbf{a} = R\alpha\,\mathbf{T} + R\omega^2\,\mathbf{N}$, ya que es $\alpha = 0$.

e) El periodo de movimiento es $P = 2\pi/\omega$.

5.10 Movimiento circular uniformemente acelerado

Al ser el movimiento uniformemente acelerado, la aceleración tangencial será constante y de la [5.22] se deduce que también lo será la aceleración angular, lo que facilita la integración de la [5.21], obteniéndose la velocidad angular en función del tiempo:

$$\omega = \alpha t + \omega_0 \qquad [5.28]$$

en la que ω_0 es la velocidad angular en el instante $t = 0$.

Sustituyendo el valor de ω en la [5.18] e integrando, calculamos el ángulo descrito en función del tiempo:

$$\frac{d\theta}{dt} = \alpha t + \omega_0$$

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \qquad [5.29]$$

en la que θ_0 es la posición en el instante $t = 0$.

La aceleración normal es:

$$a_N = R\omega^2 = R(\alpha t + \omega_0)^2$$

El vector aceleración en el triedro intrínseco es:

$$\mathbf{a} = R\alpha\,\mathbf{T} + R(\alpha t + \omega_0)^2\,\mathbf{N}$$

El vector velocidad en el citado referencial es:

$$\mathbf{v} = R\omega\,\mathbf{T} = R(\alpha t + \omega_0)\,\mathbf{T}$$

EJEMPLO 5.9 Velocidad y aceleración del centro de la Tierra

Podemos admitir que el centro de la Tierra en su movimiento alrededor del Sol describe una circunferencia de radio $R = 150 \cdot 10^6$ km, con velocidad de módulo constante. Calculemos: 1.º El módulo de la citada velocidad. 2.º La aceleración del centro de la Tierra.

Solución:

1.º La Tierra recorre la órbita alrededor del Sol en 365,25 días, es decir, tarda:

$$t = 365{,}25 \text{ días} \times 24 \text{ h/día} \times 60 \text{ min/h} \times 60 \text{ s/min} = 31\,557\,600 \text{ s}$$

El espacio recorrido o longitud de la órbita es:

$$s = 2\pi R = 2\pi\, 150 \times 10^9 \text{ m} = 9{,}4248 \times 10^{11} \text{ m}$$

Admitiendo que el módulo de la velocidad es constante, la aplicación de la [5.4] da:

$$v = s/t = 29{,}865 \times 10^3 \text{ m/s} = 29{,}865 \text{ km/s} = 107\,515{,}15 \text{ km/h}$$

2.º Al ser la velocidad constante, de acuerdo con [5.8] la aceleración sobre la tangente es nula. La aceleración del centro de la Tierra sólo tiene componente normal, que está dirigida hacia el Sol, y su valor es:

$$a = a_N = v^2/R = 5{,}946 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

EJEMPLO 5.10

Un disco está girando alrededor de un eje vertical, normal a él por su centro, con velocidad angular ω_0 constante. En un cierto instante actúa un momento que le ocasiona una aceleración angular constante de 300 r.p.m. cada segundo, que se opone al movimiento. El momento actúa durante 9 s, al final de los cuales la velocidad angular del disco es de 1 200 r.p.m. en sentido contrario al inicial. Determinemos ω_0 y el número total de revoluciones que da el disco durante los 9 s en que actúa el momento.

Solución:

Tomemos el eje de rotación como eje OZ y sea la velocidad inicial de rotación $\boldsymbol{\omega}_0 = -\omega_0\,\mathbf{k}$.

La aceleración angular ges $\boldsymbol{\alpha} = 300\,\mathbf{k}$ rpm/s $= 5\,\mathbf{k}$ rev/s^2 $= 10\pi\,\mathbf{k}$ rad/s^2.

De la definición de aceleración angular es $d\boldsymbol{\omega}/dt = 10\pi\,\mathbf{k}$, cuya integración da:

$$\boldsymbol{\omega} = 10\pi\, t\,\mathbf{k} + \boldsymbol{\omega}_0 = (10\pi t - \omega_0)\mathbf{k}$$

Al cabo de los 9 s, la velocidad angular es $\boldsymbol{\omega} = 1\,200\,\mathbf{k}$ rpm $= 40\pi\,\mathbf{k}$ rad/s, dato que nos permite calcular $\boldsymbol{\omega}_0$:

$$10\pi \times 9 - \omega_0 = 40\pi \qquad \text{de donde:} \qquad \omega_0 = 50\pi \text{ rad/s} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{\omega}_0 = -50\pi\,\mathbf{k},$$

con lo que la velocidad angular se expresa $\boldsymbol{\omega} = 10\pi(t - 5)\mathbf{k}$.

El disco se para en el instante t_1, que verifica $10\pi t_1 = \omega_0$, es decir, en $t_1 = 5$ s.

Veamos las vueltas que ha dado durante este tiempo. La definición de velocidad angular permite escribir:

$$d\theta/dt = 10\pi(t - 5), \text{ cuya integración es } \theta = 5\pi t^2 - 50\pi t \text{ rad}$$

expresión que para $t = 5$ s da $\theta_1 = 125\pi$ rad $= 62{,}5$ rev.

Una vez que el disco se ha parado, comienza a girar en sentido contrario con la misma aceleración angular $\boldsymbol{\alpha} = 40\,\pi\,\mathbf{k}$ rad/s^2, y la velocidad angular está dada por $\boldsymbol{\omega} = 10\pi t\,\mathbf{k}$, puesto que ahora la velocidad inicial es nula.

El ángulo girado será ahora $\theta = 5\pi t^2$ y, puesto que en este sentido está girando 4 segundos, el ángulo girado será $\theta = 5\pi \times 16 = 80\pi$ rad. $= 40$ rev.

El número total de revoluciones es de 62,5 en el sentido primitivo de giro y de 40, en el contrario.

LA MEDIDA DEL TIEMPO

El hombre ha observado el transcurrir del tiempo de forma natural al contemplar la periodicidad de ciertos fenómenos naturales, como el día, tiempo que tarda la Tierra en completar una vuelta alrededor de su eje polar; el mes, tiempo que tardan en repetirse las fases lunares, y el año, o tiempo que tardan en repetirse las estaciones. Ya Julio Cesar, en el año 708 de la fundación de Roma, aproximadamente el 45 de la era cristiana, estableció el Calendario Juliano, que dividía el año en doce meses y para ajustarlo al tiempo real añadía a febrero un día cada cuatro años. Los primeros instrumentos para la medida del tiempo fueron los relojes de sol, que aún hoy día pueden observarse en muchas fachadas de nuestros pueblos. Las clépsidras de arena o de agua permitieron medir tiempos más pequeños. Posteriormente, aparecieron los relojes mecánicos, cuyas primeras referencias se encuentran en *Los Libros del Saber de Astronomía* de Alfonso X El Sabio, publicados entre 1267 y 1277. A finales del XVI, Galileo construyó el primer reloj de péndulo, con el cual se consiguió una gran precisión en la medida del tiempo.

El desajuste del Calendario Juliano con respecto a la realidad hizo que el Papa Gregorio XII introdujera el Calendario Gregoriano, suprimiendo diez días del año 1582 y liminando el año bisiesto al comienzo de cada siglo a partir de 1700, salvo cada cuatrocientos años que debe incluirse. Este calendario adoptado por todos los países católicos no fue aceptado en Inglaterra hasta el año 1752, hoy es de uso general en todo el mundo, salvo en algunas pequeñas iglesias orientales que siguen un calendario propio.

El *día solar* es el tiempo transcurrido entre dos pasos sucesivos del sol por un mismo meridiano. Evidentemente, es variable según la época del año, debido a la excentricidad de la eclíptica y a la inclinación del eje polar de la Tierra respecto a aquélla. Por ello, se define, el *día solar medio* suponiendo que la proyección del Sol sobre la esfera celeste se mueve con movimiento uniforme, y se divide en 24 horas de 60 minutos, cada uno de ellos de sesenta segundos. Un día solar medio son $24 \times 60 \times 60 = 86\,400$ s.

El *día sidéreo* es el tiempo transcurrido entre dos pasos sucesivos de una estrella muy alejada por el meridiano del lugar. Como referencia para la medida global del tiempo se toma el correspondiente al meridiano de Greenwich.

El *año trópico* es el tiempo transcurrido entre dos pasos sucesivos del Sol por el punto vernal. Evidentemente, no es constante debido a la precesión de los equinoccios y su determinación debe hacerse mediante observaciones astronómicas.

En 1956, la Conferencia Internacional de Pesas y Medidas definió el segundo tomando como referencia el tiempo que tardó la Tierra en recorrer su órbita alrededor del Sol en el año 1900, puesto que estaba muy bien descrito por las observaciones astronómicas realizadas desde 1750 y recogidas en la Tablas del Sol. Así quedó definido el *segundo de las efemérides* como la fracción 1/31 556 925,974 7 del año trópico de 1900, es decir, el *año trópico* son:

$$31\,556\,925{,}974\,7 \text{ s} = 365{,}242\,198\,78 \text{ días}$$

Tiempo atómico es el que se obtiene por comparación con las frecuencias de emisión de átomos en estados excitados. La relación entre el segundo de las efemérides y el tiempo atómico fue realizado por investigadores del U.S. Naval Observatory (USNO) utilizando átomos de cesio-133 y, en 1968, la XIII Conferencia Internacional de Pesas y Medidas definió la unidad de tiempo del Sistema Internacional de Unidades, el *segundo atómico*, como *la duración de* 9 192 631 770 *periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio*-133.

Para obtener una escala práctica de referencia es necesario construir un ingenio que mida segundos basado en el patrón citado, al cual se denomina *reloj atómico*. El más preciso de los construidos es el *Master Clock*, desarrollado por el U.S. Naval Laboratory, el cual incorpora maseres de hidrógeno, que lo hacen mucho mas estable que los basados en cesio; la precisión relativa puede ser de $\pm 2.10^{-14}$.

El *tiempo universal* toma como unidad el segundo atómico, fue introducido en 1972, y mantiene el tiempo ajustando el tiempo solar medio correspondiente al meridiano de Greenwich y tomando como origen (0 horas) la media noche. Así, las 11 horas AM son simplemente las 11:00 h, y las 4 horas PM son las 16:00 h.

Al dividir el día en 24 horas, a cada hora le corresponde una zona de superficie terrestre entre meridianos o huso horario, cuyo ancho tiene una longitud de 15º. La primera zona se centra en el meridiano de Greenwich (longitud 0º) y sus límites son 7,5º E y 7,5º O. El tiempo horario en cada zona es el mismo salvo excepciones. Cada zona en dirección este tiene una hora más que la anterior, y cada zona en dirección oeste tiene una hora menos que la anterior. Al llegar al antimeridiano de Greenwich (longitud 180º), si lo hacemos siguiendo la dirección este, nos encontramos con una zona de +12 horas, pero si lo hacemos siguiendo la dirección oeste, nos encontramos con una zona de −12 horas. Por ello, al atravesar el citado antimeridiano hay que variar la fecha en un día. La primera experiencia de este hecho se obtuvo al completarse la primera vuelta a la Tierra, iniciada por Magallanes, el 20 de septiembre de 1519 y, tras su muerte en Filipinas, el 27 de abril de 1521, completada por Juan Sebastián Elcano, que al mando de la nave Victoria y con 17 marineros, llegó a Sevilla en septiembre de 1952, constatando en su cuaderno de abordo que había transcurrido un día menos del que realmente era en Sevilla a su llegada, el día 8.

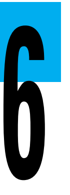
En las definiciones establecidas no se han tenido en cuenta los efectos relativistas, necesario si se quieren obtener mediciones más precisas. Puesto que en relatividad el tiempo depende del sistema de referencia, aparecen dos tiempos fundamentales: uno, referido al sistema ligado a la Tierra, que se denomina Terrestrial Time (TT), y otro, referido al centro de masas del sistema solar, denominado Barycentric Dynamical Time (TDB), lo cual cae fuera de nuestros objetivos.

Para otros usos se puede definir el tiempo de forma específica; así, el tiempo GPS comenzó su cuenta a las 0 horas del domingo 6 de enero de 1980, y estructura el tiempo en semanas de 604 799 segundos, comenzando de nuevo la cuenta a las 0 h del domingo siguiente. Por tanto, el día GPS tiene 86 399,857 segundos. La cuenta de semanas llega hasta la 1 024, momento en el que el contador vuelve a cero, lo que sucedió por vez primera entre los días 21 y 22 de agosto de 1999.

La precisión a la que se ha llegado en la medición del tiempo está constatando una ralentización en la velocidad de rotación de la Tierra alrededor de su eje polar, lo que era de esperar, por una parte, al ser la Tierra un sistema disipativo, debido al movimiento de las mareas y, por otra, debido a la fusión de los casquetes polares, que hace aumentar su momento de inercia respecto a su eje de rotación. Usando datos de observaciones, que desde muy antiguo se vienen realizando sobre eclipses, se ha podido constatar que en el último siglo la deceleración media ha sido de 1,4 milisegundos por día.

Movimiento relativo

CAPÍTULO



6.1 Movimiento absoluto, relativo y de arrastre

El movimiento se considera absoluto cuando se realiza respecto a un sistema en reposo absoluto. En verdadero rigor no existe en la realidad este tipo de movimiento, ya que unos ejes fijos sobre la superficie terrestre se hallan en movimiento por estarlo ésta, y el sistema de referencia cuyo origen se sitúa en el centro de la Tierra y cuyos ejes se dirigen hacia tres estrellas fijas, que denominaremos sistema Tierra-estrellas, es móvil alrededor del Sol. Asimismo, el sistema de referencia de Copérnico, cuyo origen se sitúa en el centro de gravedad del sistema solar y cuyos ejes se dirigen hacia tres estrellas fijas, es móvil por serlo todo el sistema solar dentro de nuestra galaxia. Por tanto, los movimientos que nosotros observamos son únicamente movimientos relativos, puesto que el sistema de referencia siempre será móvil.

Sistema Tierra-estrellas

Sistema de Copérnico

Dependiendo el movimiento del sistema de referencia elegido para su estudio, se hace necesario, conocido el movimiento respecto a un cierto sistema, saber determinar el mismo en otro sistema respecto al cual se mueva el primero.

Nosotros, en adelante, razonaremos en abstracto y denominaremos al sistema que consideremos como fijo $S_1(O_1X_1Y_1Z_1)$, siendo sus vectores de base $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$; el movimiento respecto a él, *movimiento absoluto*; y la trayectoria, velocidad y aceleración, *absolutas*.

Consideremos un nuevo sistema de referencia $S(OXYZ)$, con vectores de base $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, móvil respecto al sistema S_1. Al movimiento referido al sistema S, como si fuera fijo, se le denominará *relativo* y a la trayectoria, velocidad y aceleración, *relativas*.

Todo punto fijo del sistema S se moverá respecto a S_1 por ser S móvil respecto a S_1; a este movimiento se le denominará *de arrastre* y a la trayectoria, velocidad y aceleración correspondientes, *trayectoria*, *velocidad* y *aceleración de arrastre*.

6.2 Composición de velocidades

Sea M un punto móvil respecto al sistema $S(OXYZ)$ que, a su vez, es móvil respecto al sistema $S_1(O_1X_1Y_1Z_1)$, al cual consideraremos fijo (Figura 6.1).

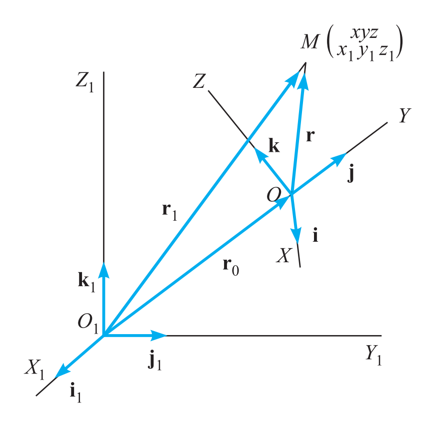


Figura 6.1.

Denominaremos $\mathbf{r}_1$ al vector posición absoluta, es decir, al vector que fija la posición de M en el sistema S_1; $\mathbf{r}$ es el vector de posición del móvil en el sistema S, y $\mathbf{r}_0$ es el vector que fija la posición O dentro del sistema S_1. Siempre se verificará:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}$$

que, expresado en el sistema móvil, es:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

Derivando esta expresión respecto al tiempo resulta:

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt} + \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \qquad [6.1]$$

Velocidad absoluta

El vector $d\mathbf{r}_1/dt$ es, evidentemente, la *velocidad absoluta* $\mathbf{v}_A$, por ser la derivada respecto al tiempo del vector posición absoluta. El vector:

Velocidad relativa

$$\mathbf{v}_r = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \qquad [6.2]$$

es la derivada respecto al tiempo del vector posición relativa, es decir, del vector que fija la posición M en el sistema S, supuesto este fijo y, por tanto, sus vectores de base, siendo en consecuencia este vector la *velocidad relativa*, $\mathbf{v}_r$.

Velocidad de arrastre

Si consideramos al punto M fijo en el sistema S, es decir, con x, y, z constantes, su movimiento respecto al sistema S, será el de arrastre, y la derivada respecto al tiempo del vector $\mathbf{r}_1$, con x, y, z constantes, será la *velocidad de arrastre* $\mathbf{v}_a$:

$$\mathbf{v}_a = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt} \qquad [6.3]$$

Ley de composición de velocidades

En consecuencia, la Expresión [6.1] puede escribirse:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_a \qquad [6.4]$$

que es la ley de composición de velocidades. Esta ley no es rigurosamente cierta, como pondremos de manifiesto al estudiar Mecánica Relativista, pero es válida con error prácticamente inapreciable para velocidades inferiores a un veinteavo de la velocidad de la luz en el vacío. Puede enunciarse diciendo que *la velocidad de un móvil respecto a un sistema S_1 es igual a la que tiene respecto del sistema S más la velocidad que tiene respecto a S_1, por el hecho de pertenecer al sistema S, móvil respecto a* S_1; o bien: *la velocidad absoluta es igual a la suma de la relativa más la de arrastre*.

La Expresión [6.3] de la velocidad de arrastre puede transformarse teniendo en cuenta que $d\mathbf{i}/dt$ es la velocidad relativa del extremo del vector $\mathbf{i}$, y por ser éste de módulo constante, de acuerdo con [5.20], es $d\mathbf{i}/dt = \mathbf{w} \times \mathbf{i}$ y, análogamente, $d\mathbf{j}/dt = \mathbf{w} \times \mathbf{j}$ y $d\mathbf{k}/dt = \mathbf{w} \times \mathbf{k}$, lo que llevado a la [6.3] la transforma en:

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_0 + x(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}) + y(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}) + z(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}) = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad [6.5]$$

con lo que la velocidad absoluta se expresa:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_r \qquad [6.6]$$

Consideremos dos partículas A y B que se mueven respecto a un sistema de referencia fijo con velocidades $\mathbf{v}_{1A}$ y $\mathbf{v}_{1B}$, respectivamente; veamos cuál es la velocidad relativa de la partícula B respecto de la A, $\mathbf{v}_{B/A}$ (Figura 6.2).

Para ello, consideremos un sistema de referencia móvil con origen en A y cuyos ejes se conserven paralelos a los fijos. En este caso es $\omega = 0$ y la [6.3] se expresa:

$$\mathbf{v}_{1B} = \mathbf{v}_{1A} + \mathbf{v}_{B/A}$$

En consecuencia, la velocidad relativa de B respecto de A es la diferencia de las velocidades absolutas de las partículas:

$$\mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_{1B} - \mathbf{v}_{1A}$$

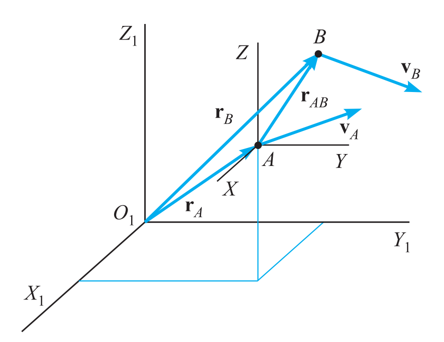


Figura 6.2.

EJEMPLO 6.1

Un avión vuela siguiendo una recta horizontal en dirección N con velocidad 630 km/h, constante. Un segundo avión vuela siguiendo otra recta horizontal con dirección E. En un cierto instante, que se tomará como origen de tiempos, ambos están sobre la misma vertical, momento en el cual el segundo avión lleva velocidad de 720 km/h y aceleración constante de 8 m/s^2. Calculemos la velocidad relativa del segundo respecto del primero, en función del tiempo (Figura 6.3).

Solución:

En el sistema de referencia fijo indicado en la figura, la velocidad del primer avión es $\mathbf{v}_A = -630\mathbf{i}$ km/h $= -175\mathbf{i}$ m/s.

La velocidad inicial del segundo avión es $\mathbf{v}_{0B} = 720\mathbf{j}$ km/h $= 200\mathbf{j}$ m/s, puesto que lleva aceleración constante $\mathbf{a} = 8\mathbf{j}$, la velocidad de éste en función del tiempo es:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{0B} + \mathbf{a}t = 200\,\mathbf{j} + 8t\,\mathbf{j} = (200 + 8t)\mathbf{j}$$

La velocidad relativa del segundo avión respecto del primero es:

$$\mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = 175\mathbf{i} + (200 + 8t)\mathbf{j}$$

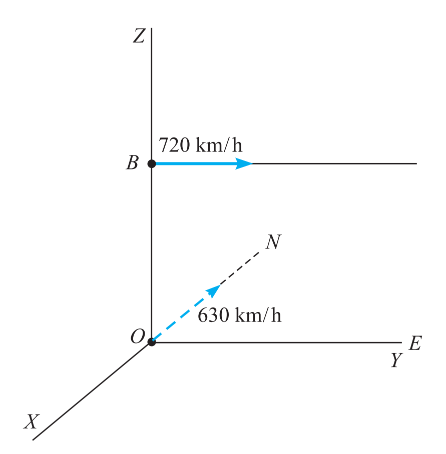


Figura 6.3.

6.3 Composición de aceleraciones. Teorema de Coriolis

La *aceleración absoluta*, derivada respecto al tiempo de la velocidad absoluta, puede expresarse derivando [6.4] así:

$$\mathbf{a}_A = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} \qquad [6.7]$$

Derivando respecto al tiempo la Expresión [6.2], es:

$$\frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\mathbf{k} + \frac{dx}{dt}\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\mathbf{k}}{dt} =$$

$$= \mathbf{a}_r + \frac{dx}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}) + \frac{dy}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}) + \frac{dz}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}) = \mathbf{a}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r \qquad [6.8]$$

siendo el vector *aceleración relativa*:

Aceleración relativa

$$\mathbf{a}_r = \frac{d^2x}{dt^2}\,\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\mathbf{k} \qquad [6.9]$$

Derivando respecto al tiempo la Expresión [6.5], es:

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \mathbf{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \omega \times (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_0)$$

y, de acuerdo con [6.6], es:

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \mathbf{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r \qquad [6.10]$$

Aceleración de arrastre

El vector *aceleración de arrastre* es la derivada del vector velocidad de arrastre en el movimiento de arrastre, es decir, suponiendo x, y, z constantes, obteniéndose al derivar [6.5] en estas condiciones:

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \qquad [6.11]$$

lo que permite simplificar la [6.10], resultando:

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \mathbf{a}_a + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r \qquad [6.12]$$

Sustituyendo en [6.7] las [6.8] y [6.12] obtenemos, para la aceleración absoluta, la expresión:

Ley de composición de aceleraciones

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_a + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r \qquad [6.13]$$

Aceleración de Coriolis.

que nos indica que *la aceleración absoluta es igual a la suma de la aceleración relativa más la de arrastre, más un término complementario llamado aceleración de Coriolis*:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_a + \mathbf{a}_c \quad , \quad \mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r \qquad [6.14]$$

Es evidente que la *aceleración de Coriolis* será nula cuando no exista rotación, cuando no haya movimiento relativo o, cuando existiendo ambos, los vectores velocidad angular de rotación y velocidad relativa sean paralelos.

En el caso de dos partículas, A y B, que se mueven respecto a un sistema de referencia considerado fijo, la aceleración relativa de la B respecto de la A, $\mathbf{a}_{B/A}$, puede obtenerse sin más que considerar un sistema de referencia móvil con origen en A y cuyos ejes se mantienen paralelos a los fijos (Figura 6.2). En esta situación es $\omega = 0$ y la [6.13] se expresa:

$$\mathbf{a}_{1B} = \mathbf{a}_{B/A} + \mathbf{a}_{1A}$$

con lo cual resulta:

$$\mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_{1B} - \mathbf{a}_{1A}$$

EJEMPLO 6.2

En el ejemplo de los dos aviones visto anteriormente, las aceleraciones son $\mathbf{a}_A = 0$ y $\mathbf{a}_B = 8\mathbf{j}$, con lo cual, la aceleración relativa del avión B respecto del A es $\mathbf{a}_{B/A} = 8\mathbf{j}$.

EJEMPLO 6.3

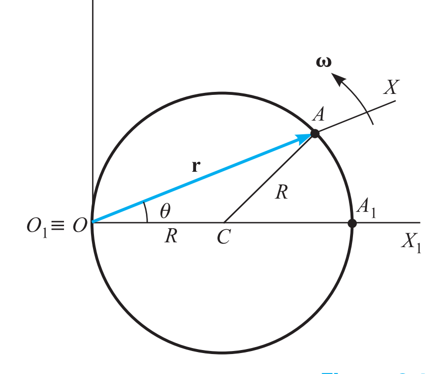


Figura 6.4.

Un anillo A de dimensiones despreciables puede moverse a lo largo de una circunferencia fija de radio R, que se representa en la Figura 6.4. Un eje móvil OX pasa siempre por el punto fijo O de la circunferencia y por el interior del anillo. Si este eje gira alrededor de O con velocidad angular constante ω y sabiendo que el anillo parte de la posición A_1, calculemos para el anillo, expresándolo en el sistema de referencia móvil:

1.º El vector posición relativa.
2.º Las velocidades relativa, de arrastre y absoluta.
3.º El diagrama de velocidades en la posición $\theta = 30$.
4.º Las aceleraciones relativa, de arrastre, complementaria y absoluta.
5.º El diagrama de aceleraciones para la posición citada.

Solución:

1.º $\mathbf{r} = OA\,\mathbf{i} = 2R\cos\theta\,\mathbf{i}$.

2.º $\mathbf{v}_r = -2R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{i}\,\dfrac{d\theta}{dt} = -2R\omega\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{i}$

Ya que al ser $\omega = $ cte, la integración de $\omega = d\theta/dt$ es $\theta = \omega t +$ cte y, puesto que en el instante inicial es $\theta = 0$, resulta $\theta = \omega t$.

La velocidad de arrastre es $\mathbf{v}_a = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \omega\,\mathbf{k} \times 2R\cos\theta\,\mathbf{i} = 2R\omega\cos\theta\,\mathbf{j}$.

También hubiera podido obtenerse derivando el vector posición absoluta, supuesto fijo A en el sistema móvil, es decir:

$$\mathbf{v}_a = (d\mathbf{r}/dt)_{x=\mathrm{cte}} = OA\,\frac{d\,\mathbf{i}}{dt} = 2R\cos\theta\,\omega\,\mathbf{j}$$

La velocidad absoluta será:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_a = 2R\omega(-\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j})$$

Asimismo hubiéramos podido obtener este resultado directamente haciendo la derivada total respecto al tiempo del vector posición absoluta, $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{v}_A = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(2R\cos\theta\,\mathbf{i}) = -2R\omega\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{i} + 2R\cos\theta\,\frac{d\,\mathbf{i}}{dt} =$$

$$= -2R\omega\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{i} + 2R\omega\cos\theta\,\mathbf{j} = 2R\omega\,(-\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j})$$

3.º Para $\theta = 30^{\circ}$, son: $\mathbf{v}_r = -R\omega\,\mathbf{i}$ y $\mathbf{v}_a = R\omega\sqrt{3}\,\mathbf{j}$, velocidades que han sido representadas en la Figura 6.5.

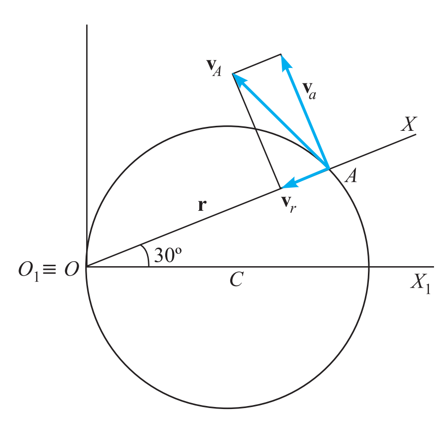


Figura 6.5.

4.º La aceleración relativa, derivada de la velocidad relativa respecto al tiempo, supuesto fijo el sistema de referencia móvil, es $\mathbf{a}_r = -2R\omega^2\cos\theta\,\mathbf{i}$.

La aceleración de arrastre es:

$$\mathbf{a}_a = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \omega\,\mathbf{k} \times 2R\omega\cos\theta\,\mathbf{j} = -2R\omega^2\cos\theta\,\mathbf{i}$$

También hubiéramios podido calcularla como derivada respecto al tiempo del vector posición absoluta, supuesto fijo A en el sistema móvil, es decir:

$$\mathbf{a}_a = \left(\frac{d\mathbf{v_a}}{dt}\right)_{x=\mathrm{cte}} = OA\,\omega\,d\mathbf{j}/dt = 2R\omega\cos\theta\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j} = -2R\omega^2\cos\theta\,\mathbf{i}$$

La aceleración complementaria es

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r = 2\omega\,\mathbf{k} \times (-2R\omega\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{i}) = -4R\omega^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{j}$$

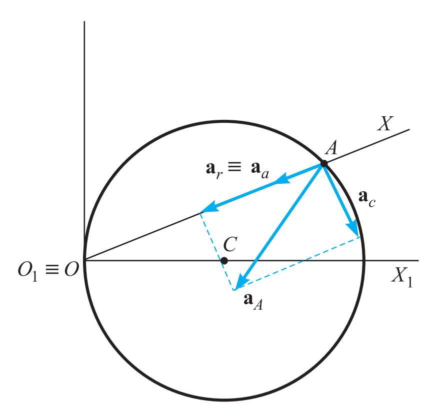


Figura 6.6.

La aceleración absoluta se obtiene simplemente sumando:

$$\mathbf{a}_A = -4R\omega^2(\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j})$$

Hubiéramos podido calcular la aceleración absoluta directamente como derivada respecto al tiempo del vector velocidad absoluta, de la siguiente forma:

$$\mathbf{a}_A = d\mathbf{v}_A/dt = 2R\omega\,(-\cos\theta\,\omega\,\mathbf{i} - \operatorname{sen}\theta\,\omega\,\mathbf{j} - \operatorname{sen}\theta\,d\mathbf{i}/dt + \cos\theta\,d\mathbf{j}/dt) =$$
$$= 2R\omega\,(-\cos\theta\,\omega\,\mathbf{i} - \operatorname{sen}\theta\,\omega\,\mathbf{j} - \operatorname{sen}\theta\,\omega\,\mathbf{j} - \cos\theta\,\omega\,\mathbf{i}) =$$
$$= -4R\omega^2\,(\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j})$$

5.º Para $\theta = 30^\circ$ son:

$$\mathbf{a}_r = -R\omega^2\sqrt{3}\,\mathbf{i} \quad , \quad \mathbf{a}_a = -R\omega^2\sqrt{3}\,\mathbf{i} \quad , \quad \mathbf{a}_c = -2R\omega^2\,\mathbf{j}$$

y

$$\mathbf{a}_A = -2R\omega^2(\sqrt{3}\,\mathbf{i} - \mathbf{j})$$

que han sido representadas en la Figura 6.6.

EJEMPLO 6.4

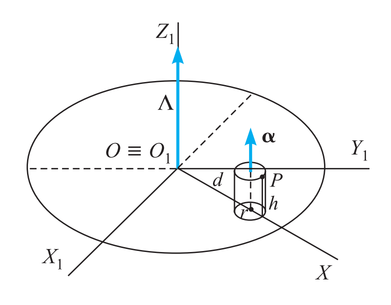


Figura 6.7.

Una plataforma circular y horizontal gira alrededor del eje vertical que pasa por su centro, con aceleración angular constante $\boldsymbol{\Lambda}$. Sobre ella, un cilindro circular recto de radio r y altura h, gira alrededor de su eje, normal a la plataforma y separado una distancia d del eje de giro de ésta, con aceleración angular constante $\boldsymbol{\alpha}$ (Figura 6.7). Determínese para el punto P superior de la generatriz y más alejado del centro de la plataforma:

a) La velocidad relativa, de arrastre y absoluta.

b) La aceleración relativa, de arrastre, complementaria y absoluta.

Solución:

a) La velocidad angular de la plataforma verifica:

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = \boldsymbol{\Lambda} = \Lambda\mathbf{k}$$

de donde:

$$\boldsymbol{\Omega} = \Lambda t\,\mathbf{k}$$

Análogamente, para la velocidad angular del cilindro respecto a la plataforma es:

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\alpha} = \alpha\,\mathbf{k}$$

de donde:

$$\boldsymbol{\omega} = \alpha\,t\,\mathbf{k}$$

El movimiento relativo es un movimiento circular de velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. La velocidad relativa del punto P es $\mathbf{v}_r = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O'P}$, siendo $\mathbf{O'P} = r\,\mathbf{i} + h\,\mathbf{k}$:

$$\mathbf{v}_r = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \alpha t \\ r & 0 & h \end{vmatrix} = \alpha\, r\, t\,\mathbf{j}$$

El movimiento de arrastre es otro movimiento circular de velocidad angular Ω. La velocidad de arrastre del punto P es $\mathbf{v}_a = \Omega \times \mathbf{OP}$, siendo $\mathbf{OP} = (d + r)\,\mathbf{i} + h\,\mathbf{k}$:

$$\mathbf{v_a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \Lambda t \\ \alpha + r & 0 & h \end{vmatrix} = \Lambda(d + r)t\,\mathbf{j}$$

La velocidad absoluta será:

$$\mathbf{v}_A = [\alpha r + \Lambda(d + r)]t\,\mathbf{j}$$

b) Tanto las aceleraciones relativa como de arrastre son las correspondientes a sendos movimientos circulares, y tendrán sus respectivas componentes tangencial y radial:

$$\mathbf{a}_r = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{O'P} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \alpha \\ r & 0 & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \alpha t \\ 0 & \alpha r t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\alpha^2 r\, t^2\,\mathbf{i} + \alpha\, r\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a_a} = \boldsymbol{\Lambda} \times O\mathbf{P} + \Omega \times \mathbf{v}_a = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \Lambda \\ d + r & 0 & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \Lambda t \\ 0 & \Lambda(d + r)t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\Lambda^2(d + r)t^2\,\mathbf{i} + \Lambda(d + r)\,\mathbf{j}$$

La aceleración complementaria es:

$$\mathbf{a}_c = 2\Omega \times \mathbf{v}_r = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 20 & 0 & \Lambda t \\ 0 & \alpha r t & 0 \end{vmatrix} = -2\alpha\Lambda t^2 r\,\mathbf{i}$$

con todo ello, la aceleración absoluta resulta:

$$\mathbf{a}_A = -[\alpha r t^2(2\Lambda + 1) + \Lambda^2 t^2(d + r)]\mathbf{i} + [\alpha r + \Lambda(d + r)]\mathbf{j}$$

6.4 Movimiento de arrastre rectilíneo uniforme. Transformaciones de Galileo

Al ser el movimiento rectilíneo uniforme, es $\omega = 0$ y $\mathbf{v}_0 =$ cte, por tanto, todos los puntos del sistema móvil S describen en el fijo S_1 trayectorias rectilíneas (Figura 6.8). Las velocidades están dadas por la Ecuación [6.6], que en este caso particular es:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}$$

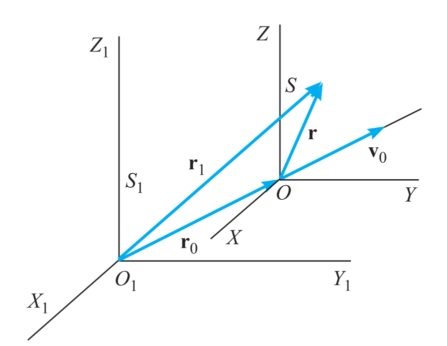


Figura 6.8.

y cuya integración da:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \mathbf{v}_0 t$$

suponiendo que en el instante inicial, $t = 0$, O coincide con O_1.

Esta transformación, que hace corresponder, en cada instante, a cada punto del sistema S uno del S_1, se denomina *transformación de Galileo* o *transformación galileana*.

Al ser $\boldsymbol{\omega} = 0$ y $\mathbf{a}_0 = 0$, serán nulas las aceleraciones de arrastre y de Coriolis, y la composición de aceleraciones se reduce a:

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}$$

Principio de relatividad de Galileo

La aceleración de una partícula es la misma en todos los sistemas de referencia con movimiento relativo de traslación uniforme. Este principio de relatividad de Galileo fue generalizado por Einstein al postular que *todas las leyes de la naturaleza son las mismas para todos los observadores en movimiento relativo de traslación uniforme*, lo que constituirá la base de la Física relativista.

6.5 Movimiento de arrastre de rotación uniforme

Por ser el movimiento de arrastre de rotación uniforme, es $\boldsymbol{\omega} = \text{cte}$ y $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$. Al no haber traslación del punto O, es $\mathbf{v}_0 = 0$ y $\mathbf{a}_0 = 0$. Con ello, la velocidad de arrastre se expresa:

$$\mathbf{v}_a = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

y la velocidad absoluta:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

La aceleración de arrastre, dada por [6.11], será, en este caso:

$$\mathbf{a}_a = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

lo que permite escribir la aceleración absoluta, dada por la [6.13], así:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_r + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r \qquad [6.15]$$

Apliquemos esta ecuación al estudio del movimiento de un punto M, fijo sobre una superficie esférica que gira alrededor de uno de sus diámetros con velocidad angular constante (Figura 6.9).

Tomemos el sistema que supondremos fijo con origen O_1 en el centro de la esfera y con el eje O_1Z_1 coincidente con el de rotación. La esfera girará respecto a este sistema con movimiento de rotación definido por el vector $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$. El sistema móvil de referencia ligado a la esfera tendrá su origen en el centro de la misma y su eje OZ coincidente con el de rotación. Por ser el punto M fijo sobre la esfera, $\mathbf{v}_r = 0$ y $\mathbf{a}_r = 0$, con lo que la aceleración absoluta, dada por la [6.15], es en este caso:

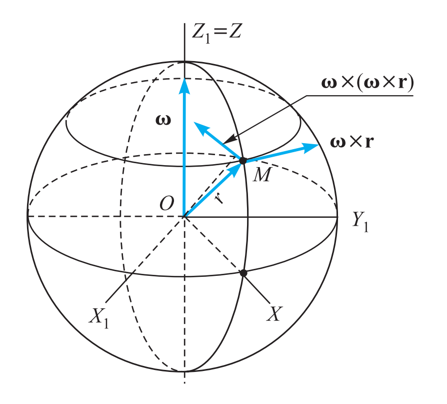


Figura 6.9.

$$\mathbf{a}_A = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \qquad [6.16]$$

lo que pone de manifiesto que el punto M está sometido a una aceleración normal, por estar $\mathbf{a}_A$ dirigida según el radio del paralelo que pasa por M.

EJEMPLO 6.5

Una persona inmóvil sobre la superficie de la Tierra en un punto de latitud λ, está sometida a una velocidad y unas aceleraciones por el hecho de estar la Tierra girando alrededor de su eje polar. Veamos su determinación (Figura 6.10).

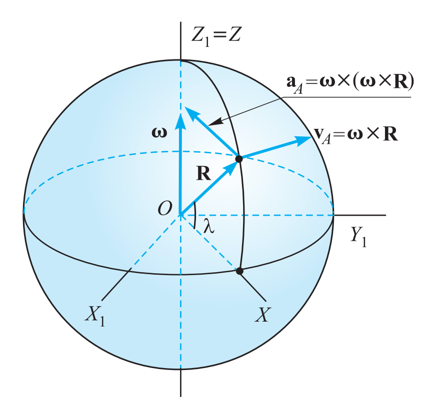


Figura 6.10.

Solución:

La velocidad relativa es nula y la absoluta coincide con la de arrastre:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_a = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$$

En los ejes móviles se expresan $\boldsymbol{\omega} = \omega\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{R} = R(\cos\lambda\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\lambda\,\mathbf{k})$, con lo cual es:

$$\mathbf{v}_A = R\omega\cos\lambda\,\mathbf{j}$$

Por tanto, la velocidad está dirigida según la tangente al paralelo del lugar.

Las aceleraciones relativa y complementaria son nulas y la aceleración absoluta coincide con la de arrastre, la cual se expresa:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_a = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) = \boldsymbol{\omega} \times R\omega\cos\lambda\,\mathbf{j} = -R\omega^2\cos\lambda\,\mathbf{i}$$

poniéndose de manifiesto que la aceleración está dirigida hacia el eje de rotación y es normal a él.

Tomando para la velocidad de rotación de la Tierra alrededor de su eje $\omega = 7{,}27 \times 10^{-5}$ rad/s, y para su radio, suponiendo a aquélla esférica, $R = 6\,375$ km, resulta:

$$\mathbf{v}_A = 463{,}46\cos\lambda\,\mathbf{j}\ \text{m/s} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}_A = -3\,369{,}37 \times 10^{-5}\cos\lambda\,\mathbf{i}$$

En un lugar de latitud 40º, los valores son:

$$\mathbf{v}_A = 355\,\mathbf{j}\ \text{m/s} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}_A = -0{,}026\,\mathbf{i}\ \text{m/s}^2$$

6.6 Velocidad y aceleración en polares planas

Vamos a deducir las expresiones de la velocidad y aceleración de una partícula, en coordenadas polares planas, por aplicación de los conceptos de movimiento relativo.

Consideremos un sistema de referencia como fijo en el plano del movimiento, cuyos vectores de base son $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$ y $\mathbf{k}_1$, y un sistema S móvil, ligado a la partícula, como se indica en la Figura 6.11, cuyos vectores de base son $\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_\theta$ y $\mathbf{k}_1$.

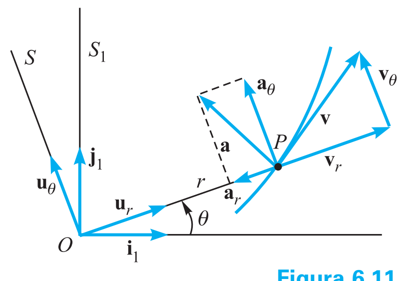


Figura 6.11.

En el sistema de referencia S, la posición de la partícula está dada por $\mathbf{r} = r\,\mathbf{u}_r$. La velocidad relativa o velocidad respecto al sistema móvil S, será:

$$\mathbf{v}_r = \dot{r}\,\mathbf{u}_r$$

El movimiento de arrastre o movimiento que tiene la partícula por pertenecer a un sistema móvil, será un movimiento circular de radio r y velocidad angular $\omega = \dot{\theta}$. En consecuencia, la velocidad de arrastre es:

$$\mathbf{v}_a = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \dot{\theta}\,\mathbf{k}_1 \times r\,\mathbf{u}_r = r\dot{\theta}\,\mathbf{u}_\theta$$

Aplicando la ley de composición de velocidades, para la velocidad absoluta de la partícula resulta la expresión:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_a = \dot{r}\,\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\,\mathbf{u}_\theta \qquad [6.17]$$

Analicemos ahora las aceleraciones de la partícula. La aceleración relativa, o aceleración respecto al sistema móvil S, es $\mathbf{a}_r = \ddot{r}\,\mathbf{u}_\theta$. La aceleración de arrastre será la correspondiente a un movimiento circular ya definido, la cual tendrá dos componentes, una sobre la tangente y otra sobre la normal, es decir:

$$\mathbf{a}_a = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_a = \ddot{\theta}\,\mathbf{k} \times r\,\mathbf{u}_r + \dot{\theta}\,\mathbf{k}_1 \times r\dot{\theta}\,\mathbf{u}_\theta$$

con lo que la aceleración de arrastre se expresa:

$$\mathbf{a}_a = r\ddot{\theta}\,\mathbf{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\,\mathbf{u}_r$$

La aceleración complementaria es:

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r = 2\begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & \mathbf{u}_\theta & \mathbf{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ \dot{r} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\omega\,\dot{r}\,\mathbf{u}_\theta$$

En definitiva, al aplicar la ley de composición de aceleración, para la aceleración absoluta resulta la expresió[1]n:

$$\mathbf{a}_A = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}\,\dot{r})\,\mathbf{u}_\theta \qquad [6.18]$$

La componente de la aceleración sobre $\mathbf{u}_\theta$, $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$, es fácil comprobar que también puede expresarse de la forma:

$$a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} \qquad [6.19]$$

EJEMPLO 6.6

Un avión A vuela horizontalmente en línea recta con una aceleración constante de 1 m/s^2. En un cierto instante inicial, en el cual su velocidad es de 720 km/h, localiza en su radar otro avión B volando en su mismo sentido y siguiendo una trayectoria paralela a la suya 2 km por encima de él, siendo $\theta_0 = 30^{\text{o}}$ y $\mathbf{v}_B$ = cte = 900 km/h (Figura 6.12). Calculemos:

1.º La velocidad relativa de B respecto de A.

2.º Los valores de r y θ en el instante inicial.

3.º La aceleración relativa de B respecto de A.

4.º Los valores de r y θ en el instante inicial.

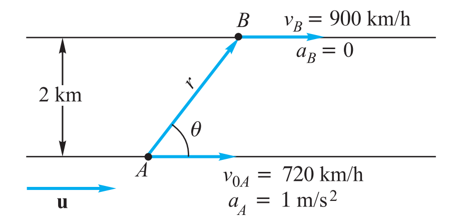


Figura 6.12.

Solución:

1.º Tomemos como vector unitario $\mathbf{u}$ el indicado en la Figura 6.12. La velocidad de B se expresa $\mathbf{v}_B = 250\,\mathbf{u}$. La velocidad inicial de A se expresa $\mathbf{v}_A(0) = 200\,\mathbf{j}$ y su aceleración, $\mathbf{a}_A = d\mathbf{v}_A/dt = \mathbf{u}$. La integración de ésta nos da:

$$\mathbf{v}_A = t\,\mathbf{u} + \mathbf{v}_A(0) = (t + 200)\,\mathbf{u}$$

La velocidad relativa de B respecto de A es:

$$\mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = (50 - t)\,\mathbf{u}$$

En la base de polares planas el vector **u** es $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{u}_r - \operatorname{sen}\theta\mathbf{u}_\theta$ y, con ello, la velocidad relativa de B respecto de A es:

$$\mathbf{v}_{B/A} = (50 - t)(\cos\theta\,\mathbf{u}_r - \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{u}_\theta)$$

2.º La velocidad relativa de B respecto de A en el instante inicial $t = 0$, $\theta = 30°$ (Figura 6.13), es:

$$\mathbf{v}_{B/A}(0) = 50\,(1/2\sqrt{3}\,\mathbf{u}_r - \frac{1}{2}\,\mathbf{u}_\theta) = 25\sqrt{3}\,\mathbf{u}_r - 25\,\mathbf{u}_\theta$$

Por tanto, deben ser $\dot{r}_0 = 25\sqrt{3}$ y $r_0\dot{\theta}_0 = -25$.

Puesto que es $r_0 = 2\,000/\operatorname{sen}30 = 4\,000$, resulta:

$$\dot{\theta}_0 = -25/4\,000 = -1/160$$

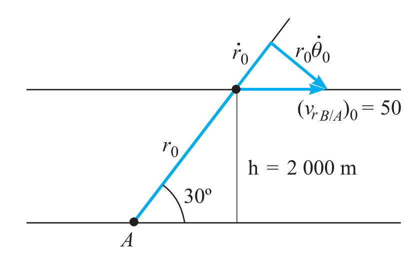


Figura 6.13.

3.º La aceleración relativa de B respecto de A es:

$$\mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A = -\mathbf{a}_A = -\mathbf{u} = -\cos\theta\,\mathbf{u}_r + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{u}_\theta$$

4.º En el instante inicial, $t = 0$ y $\theta_0 = 30$ (Figura 6.14), la aceleración relativa es:

$$\mathbf{a}_{B/A}(0) = -1/2\sqrt{3}\,\mathbf{u}_r + \frac{1}{2}\,\mathbf{u}_\theta$$

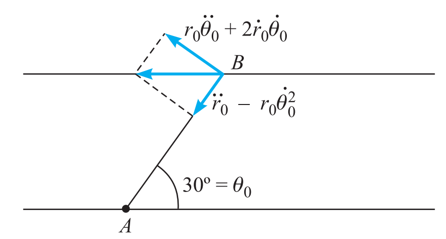


Figura 6.14.

Por tanto, en el instante inicial deben verificarse

$$\ddot{r}_0 - r_0\,\dot{\theta}_0^2 = -1/2\sqrt{3} \quad \text{y} \quad r_0\,\ddot{\theta}_0 + 2\dot{r}_0\,\dot{\theta}_0 = 1/2$$

De la primera se despeja:

$$\ddot{r}_0 = r_0\,\dot{\theta}_0^2 - 1/2\sqrt{3} = 4\,000/160^2 - 1/2\sqrt{3} = -0{,}71\ \text{m/s}^2$$

De la segunda se obtiene $\ddot{\theta}_0 = (1/2 - 2\dot{r}_0\,\dot{\theta}_0)r_0^{-1} = 0{,}00026\ \text{m/s}^2$.

6.7 Velocidad y aceleración en coordenadas esféricas

Aplicando los conceptos de movimiento relativo, vamos a deducir las expresiones de la velocidad y aceleración en coordenadas esféricas.

Consideremos un sistema de referencia como fijo S_1, cuyos vectores de base son $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$, y un sistema de referencia móvil, ligado a la partícula como se indica en la Figura 6.15, cuyos vectores de base son $\mathbf{u}_R$, $\mathbf{u}_\theta$, $\mathbf{u}_\varphi$.

El movimiento de la partícula se descompone en dos: uno de arrastre, por estar la partícula en el plano móvil AO_1Z_1, que es un movimiento de rotación definido por el vector $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{k}_1$, y otro relativo, que se realiza dentro del citado plano móvil y que será un movimiento en polares planas.

La velocidad relativa será, según lo visto en polares planas:

$$\mathbf{v}_r = \dot{R}\,\mathbf{u}_R + R\dot{\theta}\,\mathbf{u}_\theta$$

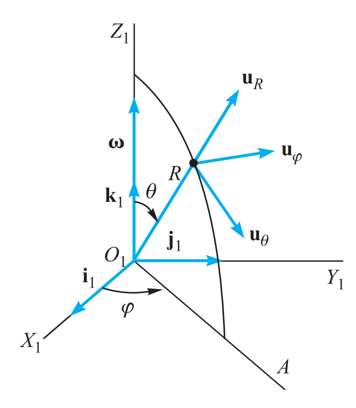


Figura 6.15.

La velocidad de arrastre, por ser un movimiento circular, es $\mathbf{v}_a = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$, lo cual, al ser $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}(\cos\theta\,\mathbf{u}_R - \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{u}_\theta)$ y $\mathbf{R} = R\,\mathbf{u}_R$, se expresa:

$$\mathbf{v}_a = \dot{\varphi}\begin{vmatrix} \mathbf{u}_R & \mathbf{u}_\theta & \mathbf{u}_\varphi \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ R & 0 & 0 \end{vmatrix} = \dot{\varphi}R\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{u}_\varphi$$

con lo cual la velocidad absoluta se escribe:

Velocidad en esféricas

$$\mathbf{v}_A = \dot{R}\,\mathbf{u}_R + R\dot{\theta}\,\mathbf{u}_\theta + R\dot{\varphi}\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{u}_\varphi \qquad [6.20]$$

Analicemos ahora las aceleraciones de la partícula. La aceleración relativa, puesto que el movimiento relativo es un movimiento en polares planas, será, según lo visto:

$$\mathbf{a}_r = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_R + (R\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}\dot{R})\mathbf{u}_\theta$$

La aceleración de arrastre será la correspondiente al movimiento circular ya definido, cuya expresión vectorial es $\mathbf{a}_a = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$. Hallando los productos vectoriales en el triedro móvil:

$$\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_R & \mathbf{u}_\theta & \mathbf{u}_\varphi \\ \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ R & 0 & 0 \end{vmatrix} \ddot{\varphi} = R\ddot{\varphi}\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{u}_\varphi$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R) = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_R & \mathbf{u}_\theta & \mathbf{u}_\varphi \\ \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ 0 & 0 & R\dot{\varphi}\,\text{sen}\,\theta \end{vmatrix}$$

$$= -R\dot{\varphi}^2\,\text{sen}^2\,\theta\,\mathbf{u}_R - R\dot{\varphi}^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,\mathbf{u}_\theta$$

se expresa:

$$\mathbf{a}_a = -R\dot{\varphi}^2\,\text{sen}^2\,\theta\,\mathbf{u}_R - R\dot{\varphi}^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,\mathbf{u}_\theta + \text{R}\ddot{\varphi}\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{u}_\varphi$$

La aceleración de Coriolis, $\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$, expresada también en el triedro móvil, es:

$$\mathbf{a}_c = 2\begin{vmatrix} \mathbf{u}_R & \mathbf{u}_\theta & \mathbf{u}_\varphi \\ \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ \dot{R} & R\dot{\theta} & 0 \end{vmatrix} \dot{\varphi} = 2\dot{\varphi}\,(R\dot{\theta}\cos\theta + \dot{R}\,\text{sen}\,\theta)\,\mathbf{u}_\varphi$$

En consecuencia, teniendo en cuenta la ley de composición de aceleraciones, la aceleración absoluta en coordenadas esféricas se expresa:

Aceleración en esféricas

$$\mathbf{a}_A = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2 - R\dot{\varphi}^2\,\text{sen}^2\,\theta)\mathbf{u}_R + (R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta} - R\dot{\varphi}^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta)\,\mathbf{u}_\theta +$$
$$+ (R\ddot{\varphi}\,\text{sen}\,\theta + 2\text{R}\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{\text{R}}\dot{\varphi}\,\text{sen}\,\theta)\,\mathbf{u}_\varphi \qquad [6.21]$$

EJEMPLO 6.7

Un satélite describe una órbita circumpolar de radio $R + h$, con velocidad angular constante Ω, respecto a un sistema fijo de referencia con origen en el centro de la Tierra. La Tierra gira respecto a dichos ejes con velocidad $\boldsymbol{\omega} = \omega\,\mathbf{k}$. Determinemos la velocidad y la aceleración relativas del satélite respecto al punto O de la superficie de la Tierra, que en un instante se encuentra en su misma vertical.

Solución:

En el sistema de referencia $(\mathbf{u}_R, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\varphi)$ son:

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega\,\mathbf{u}_\varphi \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\omega} = \omega\,(\text{sen}\,\lambda\,\mathbf{u}_R - \cos\lambda\,\mathbf{u}_\theta)$$

La velocidad absoluta del satélite es:

$$\mathbf{v}_{AS} = \Omega \times (R + h)\,\mathbf{u}_R = \Omega\,(R + h)\mathbf{u}_\theta$$

La velocidad absoluta de O es:

$$\mathbf{v}_{AO} = \boldsymbol{\omega} \times R\,\mathbf{u}_R = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_R & \mathbf{u}_\theta & \mathbf{u}_\varphi \\ \operatorname{sen}\lambda & -\cos\lambda & 0 \\ R & 0 & 0 \end{vmatrix} \omega = R\omega\cos\lambda\,\mathbf{u}_\varphi$$

La velocidad relativa del satélite respecto a O es:

$$\mathbf{v}_{rS/O} = \mathbf{v}_{AS} - \mathbf{v}_{AO} = \Omega\,(R + h)\mathbf{u}_\theta - R\omega\cos\lambda\,\mathbf{u}_\varphi$$

La aceleración absoluta del satélite es la correspondiente a un movimiento circular uniforme:

$$\mathbf{a}_{AS} = \Omega \times \mathbf{v}_{AS} = \Omega\mathbf{u}_\varphi \times \Omega(R + h)\mathbf{u}_\theta = -\Omega^2(R + h)\mathbf{u}_R$$

La aceleración absoluta de O, que es la correspondiente a otro movimiento circular:

$$\mathbf{a}_{AO} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{AO} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_R & \mathbf{u}_\theta & \mathbf{u}_\varphi \\ \operatorname{sen}\lambda & -\cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cos\lambda \end{vmatrix} R\omega^2 =$$

$$= -R\omega^2(\cos^2\lambda\,\mathbf{u}_R + \operatorname{sen}\lambda\cos\lambda\,\mathbf{u}_\theta)$$

La aceleración relativa de S respecto a O, cuando ambos están en la misma vertical será

$$\mathbf{a}_{rS/O} = \mathbf{a}_{AS} - \mathbf{a}_{AO} = [R\omega^2\cos^2\lambda - (R + h)\Omega^2]\,\mathbf{u}_R + R\omega^2\operatorname{sen}\lambda\cos\lambda\,\mathbf{u}_\theta$$

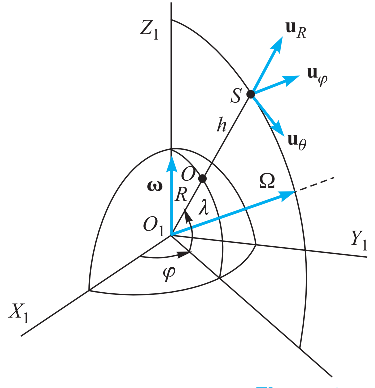


Figura 6.15.

COPÉRNICO

Nicolás Copérnico nació en Toru (Polonia), el 19 de febrero de 1473. Su padre murió cuando él tenía 10 años y fue adoptado por su tio materno Lucas Watzelrode, sacerdote católico, que fue obispo de Ermland, el cual se ocupó de darle una sólida formación. Copérnico estudió en la Facultad de Artes Liberadas de la universidad de Cracovia, recibiendo una sólida formación matemática.

En 1497 comenzó a estudiar derecho canónico en la universidad de Bolonia, alojándose en casa de Doménico María de Novara, gran matemático y muy crítico con las teorías cosmológicas de Tolomeo, lo cual ejerció una influencia decisiva sobre Copérnico. Parece ser que juntos observaron el eclipse de la estrella *Aldebaran* causado por la Luna el 9 de marzo de 1497.

Después de una corta estancia en Roma, donde siguió estudiando astronomía volvió a Polonia en 1503, residiendo en el castillo de Lidzbark sede del obispo de Warmia, donde escribió su primer tratado de astronomía con el título *Nicolai Copernici de hipothesibus motum coelestium a se constitutis commentariolus*, conocido simplemente con el nombre de *Comentariolus*, donde expone por primera vez su Teoría Heliocéntrica, según la cual el Sol está inmóvil en el centro del mundo y la Tierra y los planetas giran alrededor de él. La Tierra gira sobre si misma una vez al día y da una vuelta completa alrededor del Sol una vez al año; además señaló que *el eje de la Tierra va inclinado como el de un trompo*.

Ya hubo sabios de la antigua Grecia que habían apuntado alguna de estas ideas, como Filolao, que admitía un movimiento de traslación de la Tierra; Heráclides de Ponto, que fue el primero en admitir el movimiento de rotación de la Tierra alrededor de su eje, pero no alrededor del Sol, y fundamentalmente Aristarco de Samos, que en el siglo III a.C. defendió la idea de que no era la Tierra, sino el Sol, el centro del mundo. Arquímedes cita a Aristarco, diciendo que este *suponía que las estrellas y el Sol eran inamovibles y la Tierra, en cambio, giraba en un círculo alrededor del Sol*. Aristarco también es citado por Copérnico, lo que indudablemente indica que conocía sus teorías.

Estas ideas fueron desapareciendo dominadas por el prestigio de Aristóteles y Tolomeo, que habían establecido un sistema cosmológico geocéntrico, según el cual la Tierra está inmóvil en el centro del universo y la Luna, los planetas y el Sol giran alrededor de ella en esferas concéntricas.

En el siglo XI Jabir de Sevilla y Averroes de Córdoba criticaron el sistema geocéntrico, pero sus ideas no tuvieron eco alguno. Alfonso X, el Sabio, en el siglo XIII, reunió a los sesenta mejores astrónomos, en general judíos y árabes, para recopilar y reelaborar todos los datos astronómicos conocidos hasta entonces, lo que dio lugar a las *Tablas Alfonsinas*, que proporcionaron infinidad de datos muy acordes con las observaciones, pero que no explicaban su obtención ni las razones por las cuales se habían eliminado ciertos parámetros y se habían sustituido por otros. En 1377, Nicolás de Oresme, obispo de Lesieux, en su obra *Del cielo y del mundo*, admitía como cierto el movimiento diario de rotación de la Tierra. También Leonardo da Vinci (1452-1519) escribía *el Sol está inmóvil en el centro del universo y con su luz ilumina todos los cuerpos celestes*.

En el siglo XVI, el error del *calendario juliano*, debido a la deficiente estimación de la duración del año, llegó a ser de unos diez días. La necesidad de reformar el calendario era notoria y fue abordada en el *Concilio de Letran*, encargándose de ello una comisión presidida por el obispo Pablo de Middelburgo, que en 1516 publicó un documento en el que figuraban los sabios que habían intervenido, entre los cuales se encontraba Copérnico.

Hacia 1520 parece ser que Copernico comenzó a escribir la obra cumbre de su vida, cuyo manuscrito tardó en finalizar unos diez años y que no fue publicada hasta el año 1543 con el título: *Nicolai Copérnico Thoruniensi de revolutionibus orbium coelestium libri VI* (Seis libros de Nicolás Copérnico de Thorun sobre las revoluciones de las esferas celestes), conocido simplemente por *De Revolutionibus*. En este desarrolla detalladamente su teoría heliocéntrica y, mediante ella, explica los cambios diarios del Sol y las estrellas, los movimientos de Marte, Júpiter y Saturno, y el porqué Venus y Mercurio están siempre a una distancia fija del Sol.

Copernico falleció en Frombork, solamente dos meses después de la publicación de su obra que revolucionaria la concepción del universo.

Cinemática del sólido

CAPÍTULO 7

7.1 Movimientos elementales de un sólido

El sólido al que hacemos referencia es el sólido rígido o indeformable, es decir, aquél que conserva invariable la distancia entre dos cualesquiera de sus puntos y, en consecuencia, su volumen y su forma.

Para el estudio del movimiento de un sólido, ligaremos a éste un sistema trirrectangular de referencia. La posición del sólido en el espacio quedará determinada por la posición del triedro que lleva ligado, ya que cualquier punto del sólido está determinado por sus coordenadas respecto al triedro. Será, por tanto, sinónimo hablar de movimiento de sólido o de triedros.

Estudiaremos a continuación los movimientos elementales del sólido, que son: traslación, rotación alrededor de un eje y rotación alrededor de un eje con deslizamiento a lo largo de él, para finalmente estudiar el movimiento general del sólido.

7.2 Traslación

Se dice que un sólido se mueve con movimiento de traslación cuando toda recta que une dos cualesquiera de sus puntos conserva su dirección. Concretamente, el triedro ligado al sólido se conservará paralelo a sí mismo (Figura 7.1).

Las trayectorias de los diferentes puntos del sólido serán paralelas entre sí. En cada instante, los diferentes puntos del sólido tendrán velocidades y aceleraciones iguales. En efecto: siempre se verificará la igualdad $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{AB}$. Al derivar ésta respecto al tiempo, puesto que el vector $\mathbf{r}_{AB}$ es constante por ser el sólido rígido y el movimiento de traslación, resulta $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A$ y una segunda derivada da $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A$. Al vector libre, igual en cada instante a la velocidad de los distintos puntos del sólido, se le denomina vector *velocidad de traslación*. Si este vector es constante, el movimiento del sólido es de *traslación uniforme*, y cada punto del sólido estará animado de un movimiento rectilíneo uniforme.

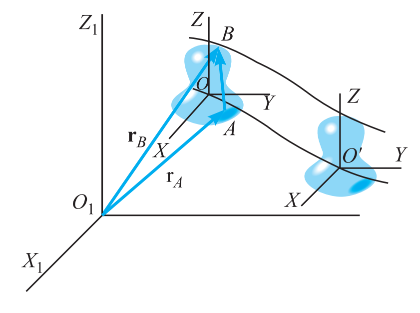


Figura 7.1.

Es muy interesante observar cómo en una traslación, y para un instante dado, la distribución de velocidades es idéntica a la de los momentos de un par, lo que

permite representar una traslación por un par que, en general, será función del tiempo:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{M}_P(\mathbf{u},\ -\mathbf{u})$$

En cada instante, el momento del par coincide con la velocidad de los diferentes puntos del sólido. Si el par es independiente del tiempo, la traslación es uniforme.

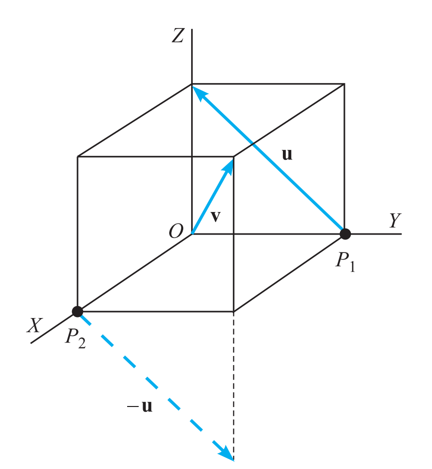


Figura 7.2.

EJEMPLO 7.1

Un sólido está sometido a una traslación definida por el par $(P_1;\ \mathbf{u}) = (0,\ 1,\ 0;\ 0,\ -1,\ 1)$ y $(P_2;\ -\mathbf{u}) = (1,\ 0,\ 0;\ 0,\ 1,\ -1)$. Calculemos el vector velocidad de traslación.

Solución:

El vector velocidad de traslación es:

$$\mathbf{v} = \mathbf{M}(\mathbf{u},\ -\mathbf{u}) = \mathbf{OP}_1 \times \mathbf{u} + \mathbf{OP}_2 \times -\mathbf{u} = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 \times \mathbf{u} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Todos los puntos del sólido siguen líneas paralelas a la trisectriz del triedro y llevan velocidad constante de módulo $v = \sqrt{3}$, por tanto, se trata de una traslación uniforme.

7.3 Rotación alrededor de un eje

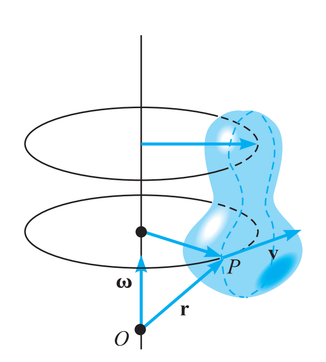


Figura 7.3.

Se dice que un sólido se mueve con movimiento de rotación alrededor de un eje cuando todos sus puntos describen circunferencias situadas en planos perpendiculares al eje, con centro en él, y en cada instante todos los puntos del sólido tienen la misma velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$.

Una rotación, por tanto, queda definida dando un vector deslizante $\boldsymbol{\omega}$, cuya recta soporte es el eje de rotación y tal que la velocidad de cada punto P del sólido es el momento de $\boldsymbol{\omega}$ respecto a él:

$$\mathbf{M}_P(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad [7.1]$$

expresión que da el campo de velocidades, momento de $\boldsymbol{\omega}$, definido en el espacio ocupado por el sólido.

Todo lo visto para el movimiento circular de un punto es aplicable a cada uno de los puntos del sólido en rotación. Así, la aceleración de un punto P está dada por:

$$\mathbf{a}_P = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

Cuando el vector $\boldsymbol{\omega}$ es constante, el movimiento de rotación del sólido se dice uniforme.

EJEMPLO 7.2

Una estación espacial tiene forma de toroide de radio medio $R = 500$ m (Figura 7.4). Calculemos:

1.º El número de revoluciones por minuto que debe dar alrededor de su eje de simetría normal para que la aceleración en O sea igual a g.

2.º El módulo de la velocidad de O.

Solución:

1.º La velocidad de O será $\mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} = \omega\,\mathbf{k} \times R\mathbf{i} = R\omega\,\mathbf{j}$.
La aceleración en O será $\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) = \omega\,\mathbf{k} \times R\omega\,\mathbf{j} = -R\omega^2\,\mathbf{i}$.
Para que la aceleración sea igual a g, debe ser $R\omega^2 = g$, de donde:

$$\omega = \sqrt{g/R} = \sqrt{9{,}8/500} = 0{,}14 \text{ rad/s} = 1{,}334 \text{ rpm}$$

2.º El módulo de la velocidad del centro O es:

$$v_0 = 500 \times 0{,}14 = 70 \text{ m/s} = 252 \text{ km/h}$$

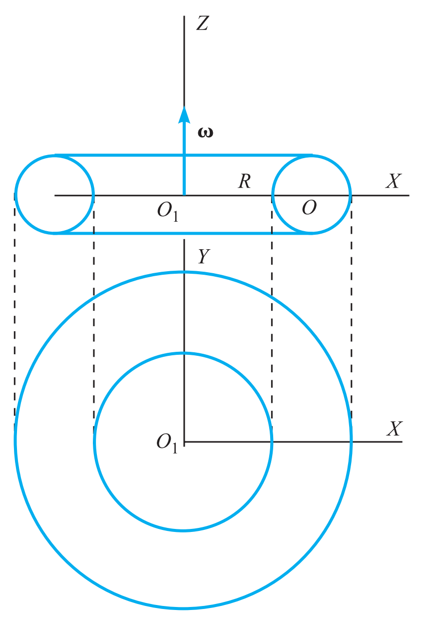


Figura 7.4.

7.4 Rotación alrededor de un eje y deslizamiento a lo largo de él

Si el vector posición del punto móvil depende de varios parámetros:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, ..., q_m)$$

que, en general serán, función del tiempo $q_i = q_i(t)$, el vector velocidad, derivada del anterior respecto al tiempo, es:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_m}\dot{q}_m = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_m \qquad [7.2]$$

Es decir, la velocidad es la suma vectorial de las velocidades que tendría el móvil, si cada parámetro variara aislada y únicamente.

En el caso que nos ocupa, para fijar la posición de un punto del sólido se hacen necesarios dos parámetros, uno que fije el desplazamiento a lo largo del eje de rotación y otro que determine el ángulo girado (Figura 7.5). Por tanto, la velocidad de un punto P cualquiera del sólido será la suma de dos velocidades, una como si únicamente se desplazara a lo largo del eje de giro y otra, como si únicamente gira alrededor de él. Es decir:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad [7.3]$$

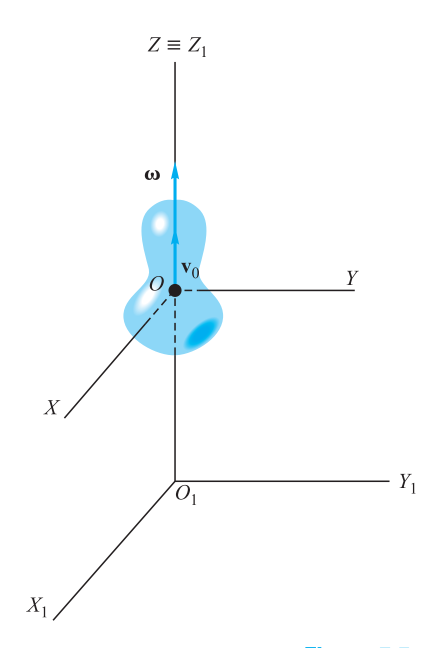


Figura 7.5.

En definitiva, la velocidad del punto P es el momento resultante en este punto del sistema de vectores formado por el vector rotación $\boldsymbol{\omega}$ y el par que define la traslación:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{M}_P(\mathbf{F}, -\mathbf{F}, \boldsymbol{\omega})$$

Movimiento helicoidal

Si el desplazamiento a lo largo del eje es proporcional al ángulo girado, las trayectorias de los diferentes puntos del sólido son hélices cilíndricas, por definición de éstas, y el *movimiento* se denomina *helicoidal*, siendo $\mathbf{v}_0 = n\omega$. *Si además* $\mathbf{v}_0$ y $\boldsymbol{\omega}$ son constantes, el *movimiento* es *helicoidal uniforme*.

La velocidad de un punto del sólido puede también obtenerse por aplicación de la [6.4]. Tomemos el eje de rotación como uno de los ejes del sistema de referencia fijo y el sistema de referencia móvil con un eje coincidente con él, a lo largo del cual se desplaza paralelamente a sí mismo. En esta situación la velocidad de arrastre es $\mathbf{v}_0$ y la velocidad relativa $\mathbf{v}_r = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, con lo cual la velocidad de un punto P esta dada por la [7.2].

La aceleración de arrastre será $\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_0$, la aceleración complementaria será nula, pues el sistema de referencia móvil no gira respecto al fijo, y la aceleración relativa es:

$$\mathbf{a}_r = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

con lo que la aceleración absoluta del punto P es:

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

EJEMPLO 7.3

Un avión sigue una trayectoria recta definida por el vector $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y se dirige a un objetivo O_1, que tomaremos como origen del sistema de referencia fijo, con velocidad de módulo $v_0 = 900$ km/h (Figura 7.6). El piloto hace girar el avión alrededor de su eje longitudinal con velocidad angular $\omega = 3$ rad/s. La longitud del ala desde el eje es de 6 m. Calculemos:

1.º El módulo de la velocidad del extremo del ala.

2.º El valor de la aceleración del extremo del ala comparándolo con g.

Solución:

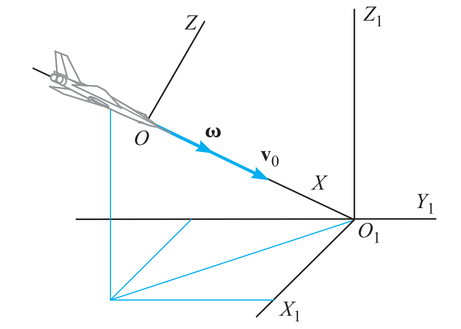


Figura 7.6.

1.º La velocidad del extremo del ala, expresada en el sistema de referencia móvil ligado al avión, es:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 250\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{i} \times 6\,\mathbf{j} = 250\,\mathbf{i} + 18\,\mathbf{k}$$

cuyo modulo vale $v = 250{,}65$ m/s.

2.º La aceleración sólo será debida a la rotación:

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = 3\,\mathbf{i} \times (250\,\mathbf{i} + 18\,\mathbf{k}) = -54\,\mathbf{j}\ \text{m/s}^2$$

cuyo modulo es $a = 54 = 5{,}5$ g.

EJEMPLO 7.4

Una tuerca es obligada a desplazarse a lo largo del eje del tornillo con velocidad constante $\mathbf{v}_0$. Si la rosca de ambos tiene de paso p, determinemos:

1.º La velocidad angular de rotación de la tuerca alrededor del eje del tornillo.

2.º La velocidad de un punto P de la tuerca que diste del eje de giro la distancia d.

Solución:

1.º El paso de rosca es lo que se avanza a lo largo del eje cuando el giro es de una vuelta completa. Si la velocidad que se imprime a la tuerca a lo largo del eje es $\mathbf{v}_0$ (Figura 7.7), en un tiempo t, ésta avanza $z = v_0 t$.

Si la velocidad angular es ω rad/s, el tiempo que tarda en dar una vuelta será $t = 2\pi/\omega$, y en ese tiempo lo avanzado es $z = p$. Por tanto:

$$p = v_0 \frac{2\pi}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi v_0}{p}$$

2.º De acuerdo con [7.3], la velocidad del punto P es:

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_0 + \mathbf{PO} \times \boldsymbol{\omega} = v_0 \mathbf{k} + (d\,\mathbf{n} \times \omega\,\mathbf{k}) =$$

$$= v_0 \mathbf{k} + \frac{2\pi d v_0}{p} \mathbf{u}$$

siendo $\mathbf{u}$ el vector unitario normal al plano determinado por el eje de rotación y el punto P, y cuyo sentido es el de giro.

El movimiento es helicoidal uniforme, ya que la velocidad es constante y el ángulo girado:

$$\theta = \omega t = \frac{2\pi v_0}{p} t$$

es proporcional al desplazamiento a lo largo del eje $z = v_0 t$:

$$\theta = \frac{2\pi}{p} z$$

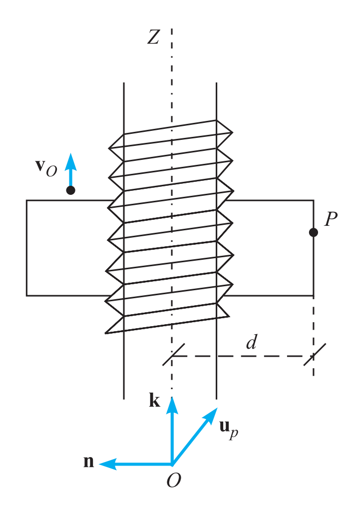


Figura 7.7.

7.5 Movimiento general de un sólido. Vector rotación instantánea. Torsor cinemático

Sea $S(OXYZ)$ el sistema ligado invariablemente al sólido y que se mueve respecto al sistema fijo $S_1(O_1X_1Y_1Z_1)$.

La velocidad relativa de los puntos del sólido es nula por estar éstos invariablemente ligados al sistema móvil. La velocidad absoluta de los mismos será únicamente su velocidad de arrastre, dada por la [6.5], que es:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad [7.4]$$

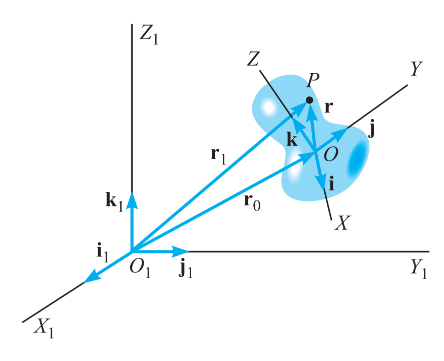


Figura 7.8.

Rotación instantánea

Lo que nos indica que la velocidad de un punto cualquiera P del sólido es igual a la velocidad de otro punto cualquiera O del mismo, más una rotación alrededor de un eje que pasa por O. La Expresión [7.4] nos define en cada instante un campo de velocidades, definido en el espacio ocupado por los puntos del sólido. Al vector $\boldsymbol{\omega}$ se le denomina *vector rotación instantánea*.

Definamos en el punto O un torsor τ, tal que su resultante sea ω y su momento en O, $\mathbf{v}_0$:

$$\mathbf{R}(\tau) = \omega \quad ; \quad \mathbf{M}_0(\tau) = \mathbf{v}_0 \qquad [7.5]$$

Hallemos el campo de momentos de este torsor:

$$\mathbf{M}_P(\tau) = \mathbf{M}_0(\tau) + \mathbf{PO} \times \mathbf{R}(\tau) = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

expresión que coincide con el campo de velocidades de los puntos del sólido, dado por [7.4]. En consecuencia, la velocidad de un punto cualquiera P del sólido es

Torsor cinemático

igual al momento resultante en P del torsor τ, $\mathbf{v}_P = \mathbf{M}_P(\tau)$. De aquí que se denomine a τ *torsor cinemático*, el cual define el movimiento del sistema S, o sólido ligado al mismo, respecto al S_1.

EJEMPLO 7.5

El punto $A(1, 2, 0)$ de un cierto sólido tiene, en un instante, la velocidad $\mathbf{v}_A = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y, en ese mismo instante, otro punto $B(0, 2, 1)$ tiene la velocidad $\mathbf{v}_B = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Determinemos:

1.º El torsor cinemático en O correspondiente al movimiento del sólido, con la condición de que la rotación en ese instante se realice alrededor de la trisectriz del triedro de referencia.

2.º La velocidad que en ese instante lleva el punto $P(2, 1, 2)$ del sólido.

Solución:

1.º De acuerdo con [7.4] podemos escribir:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OA} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OB}$$

La condición de giro alrededor de la trisectriz del primer octante es $\omega_x = \omega_y = \omega_z = \omega\sqrt{3}/3$, con lo que las expresiones anteriores se escriben:

$$\mathbf{v}_A = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k} = v_{0x}\,\mathbf{i} + v_{0y}\,\mathbf{j} + v_{0z}\,\mathbf{k} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega & \omega & \omega \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{j} + 2\mathbf{k} = v_{0x}\,\mathbf{i} + v_{0y}\,\mathbf{j} + v_{0z}\,\mathbf{k} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega & \omega & \omega \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Cada ecuación vectorial se desdobla en tres escalares:

$$\left.\begin{aligned} -1 &= v_{0x} - 2\omega\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 3 &= v_{0y} + \omega\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 1 &= v_{0z} + \omega\frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}\right\}$$

y

$$\left.\begin{aligned} 0 &= v_{0x} - \omega\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 1 &= v_{0y} - \omega\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 2 &= v_{0z} + 2\omega\frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}\right\}$$

De ambos sistemas se deduce $\omega = \sqrt{3}$, $v_{0x} = 1$, $v_{0y} = 2$ y $v_{0z} = 0$ y, en consecuencia, el torsor en O es:

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} = \boldsymbol{\omega} \quad \text{y} \quad \mathbf{M}_0(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} = \mathbf{v}_0$$

2.º La velocidad del punto P será:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OP} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

7.6 Eje instantáneo de rotación y deslizamiento. Axoides

El *eje central*, de cualquiera de los sistemas de vectores equivalentes al torsor cinemático, *es el lugar de puntos P* del espacio en los que el momento resultante es paralelo a la resultante (Figura 7.9):

$$\mathbf{M}_P(\tau) // \mathbf{R}(\tau) \quad \text{o} \quad \mathbf{v}_P // \boldsymbol{\omega}$$

Por tanto, en un punto P del eje central, el torsor equivalente:

$$\mathbf{R}(\tau) = \boldsymbol{\omega} \quad ; \quad \mathbf{M}_P(\tau) = \mathbf{v}_P \qquad [7.6]$$

define un movimiento helicoidal, puesto que la velocidad de un punto cualquiera P del sólido es la suma vectorial de la debida a una traslación en dirección del eje central, $\mathbf{v}_P$, más la debida a una rotación alrededor de él. Esto, unido a que el torsor cinemático [7.6] es función del tiempo, hace que al citado eje central se le denomine *eje instantáneo de rotación y deslizamiento*. Al vector deslizante $\boldsymbol{\omega}$, situado sobre el eje central, se le denomina *rotación instantánea* y al vector $\mathbf{v}_P$, *traslación instantánea*. Concluyendo, en un movimiento cualquiera de un sólido definido por un torsor [7.5] la distribución de velocidades en cada instante es la misma que tendría el sólido sometido a un movimiento helicoidal uniforme definido por el torsor [7.6], diciéndose entonces que en cada instante hay un movimiento helicoidal uniforme tangente al movimiento dado.

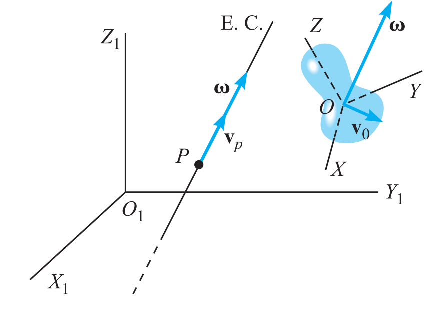


Figura 7.9.

El eje instantáneo de rotación tendrá como lugar geométrico, tanto en el sistema $OXYZ$ como en el $O_1X_1Y_1Z_1$ sendas superficies regladas, que se denominan *axoides* y que nos facilitarán el estudio del movimiento continuo del sólido.

7.7 Movimiento de un sólido con un punto fijo. Ángulos de Euler

Sea O el punto fijo del sólido y, por tanto, $\mathbf{v}_0 = 0$. La Ecuación [7.4], que nos da el campo de velocidades de los diferentes puntos de un sólido en su movimiento más general es, en este caso particular:

$$\mathbf{v}_M = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad [7.7]$$

es decir, el sólido está sometido en cada instante a una rotación alrededor de un eje que pasa por el punto fijo O.

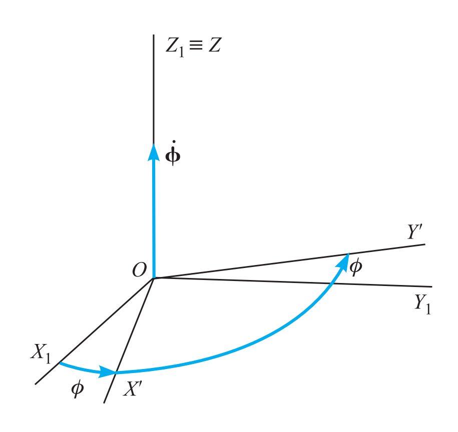


Figura 7.10.

Los orígenes de los sistemas $X_1Y_1Z_1$ y XYZ los tomaremos coincidentes entre sí y con el punto fijo O_1 (Figura 7.10). Al moverse el sistema XYZ ligado al sólido, su

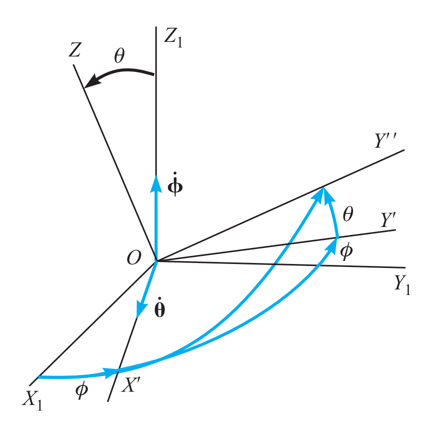


Figura 7.11.

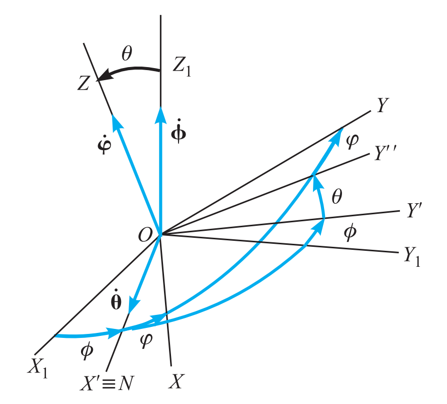


Figura 7.12.

posición y, por tanto, la del sólido, queda determinada respecto al sistema $X_1Y_1Z_1$ mediante tres ángulos, que son los denominados ángulos de Euler, ϕ, θ y φ.

Supongamos coincidentes los dos sistemas de referencia y analizemos cuáles son los ángulos girados y alrededor de qué ejes se producen los giros, para que el sistema $OXYZ$ pase a una posición genérica. Giremos el sistema $OXYZ$ un ángulo ϕ alrededor del eje OZ_1 (Figura 7.10), pasando a la posición $OX'Y'Z_1$ y siguiendo el plano $X'OY'$ coincidente con el X_1OY_1. El ángulo girado ϕ se denomina *ángulo de precesión* y el vector que define la rotación $\dot{\boldsymbol{\phi}}$, que tendrá la dirección OZ_1, simplemente *precesión*.

Giremos ahora alrededor de OX' un ángulo θ (Figura 7.11), que se denomina *ángulo de nutación* y cuyo vector rotación $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ se denomina *nutación*, el sistema pasará a la posición $X'Y''Z$. Finalmente, giremos alrededor de OZ un ángulo φ, pasando el sistema a la posición final $OXYZ$ (Figura 7.12); este ángulo se denomina *ángulo de rotación propia* y al vector $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ *rotación propia*, cuya dirección es la del eje OZ.

La línea $ON \equiv OX'$ es la intersección de los planos X_1OY_1 y XOZ en su posición final; se denomina *línea nodal* o línea de los nodos y su dirección es la del vector nutación.

El vector unitario en dirección de la línea de los nodos es:

$$\mathbf{u}_N = \frac{\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}}{|\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}|}$$

Los ángulos de Euler están determinados por las expresiones:

$$\cos\phi = \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{u}_N \quad , \quad \cos\theta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1 \quad \text{y} \quad \cos\varphi = \mathbf{i} \cdot \mathbf{u}_N$$

Según hemos visto, la velocidad de un punto sólido es la suma vectorial de las velocidades correspondientes a la variación aislada y única de cada parámetro, es decir:

$$\mathbf{v}_P = \dot{\boldsymbol{\phi}} \times \mathbf{r} + \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{r} + \dot{\boldsymbol{\varphi}} \times \mathbf{r} = (\dot{\boldsymbol{\phi}} + \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\varphi}}) \times \mathbf{r}$$

De lo que se deduce, al compararlo con la [6.10], que el vector rotación $\boldsymbol{\omega}$ es la suma de los vectores precisión, nutación y rotación propia:

$$\boldsymbol{\omega} = (\dot{\boldsymbol{\phi}} + \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\varphi}})$$

EJEMPLO 7.6

Un sistema de referencia $OXYZ$ se mueve respecto a otro, que supondremos fijo, $O_1X_1Y_1Z_1$, manteniéndose fijo su origen $O = O_1$. En un instante del movimiento son:

$$\mathbf{i} = \frac{1}{3}\mathbf{i}_1 + \frac{4}{15}\mathbf{j}_1 + \frac{2}{15}\mathbf{k}_1$$

$$\mathbf{k} = \frac{2}{3}\mathbf{i}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{j}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{k}_1$$

Determinemos para este instante:

1.º La posición del eje OY.

2.º La línea de los nodos.

3.º Los ángulos de precesión, nutación y rotación propia.

Solución:

1.º La posición del eje OY está dada por el vector **j**, cuya expresión es $\mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{i}$:

$$\mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 14/15 & 2/15 \end{vmatrix} = -\frac{2}{3}\mathbf{i}_1 + \frac{2}{15}\mathbf{j}_1 + \frac{11}{15}\mathbf{k}_1$$

2.º La línea de los nodos es perpendicular a **k** y $\mathbf{k}_1$, su dirección es la del vector $\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}$:

$$\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\mathbf{i}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{j}_1$$

cuyo módulo es $|\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}| = \sqrt{5}/3$, con lo cual el unitario de la dirección ON es:

$$\mathbf{u}_N = (\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{j}_1)/\sqrt{5}$$

3.º El ángulo de precesión verifica $\cos\phi = \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{u}_N = \sqrt{5}/5$, de donde $\phi = 63^{\circ}$ 26’ 5’’,8.

El ángulo de nutación verifica $\cos\theta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1 = 2/3$, de donde $\theta = 48^{\circ}$ 11’ 22’’,87.

Finalmente, el ángulo de rotación propia está dado por:

$$\cos\varphi = \mathbf{i} \cdot \mathbf{u}_N = 1/3\sqrt{5}/5 + 14/15 \cdot 2\sqrt{5}/5 = 11\sqrt{5}/25$$

de donde $\varphi = 10^{\circ}$ 18’ 17’’,45.

7.8 Movimiento de un sólido sobre la superficie de otro. Deslizamiento. Rodadura. Pivotaje

Sean S y S_1 dos sólidos que se mueven permaneciendo siempre con un punto de contacto y sea P uno de esos puntos (Figura 7.13). El torsor cinemático que nos define el movimiento de S respecto a S_1 estará formado en P por un vector rotación instantánea $\boldsymbol{\omega}$ (resultante del torsor) y un vector velocidad de traslación del punto P, **v** (momento resultante en P del torsor). La velocidad $\mathbf{v}_a$, velocidad del punto P como perteneciente a S respecto de S_1, es la velocidad de arrastre por definición de ésta.

El punto de contacto de ambos sólidos describe sendas trayectorias sobre las superficies de los mismos. Supuesto S_1 fijo, la trayectoria C_1 será la absoluta y la velocidad absoluta del punto P será tangente a ella. La velocidad relativa será tangente en P a la trayectoria C; por tanto, ambas están contenidas en el plano tangente común a las dos superficies en el punto P y la velocidad de arrastre, $\mathbf{v}_a$, estará en este mismo plano. De aquí que el movimiento de arrastre hace que el sólido S se deslice sobre la superficie del S_1, por tanto, es un *movimiento de deslizamiento*, y a la velocidad de arrastre se le denomina *velocidad de deslizamiento*.

La rotación instantánea $\boldsymbol{\omega}$ tiene, en general, dos componentes, una $\boldsymbol{\omega}_t$, sobre el plano tangente, y otra, $\boldsymbol{\omega}_n$, sobre la normal al mismo. El vector $\boldsymbol{\omega}_t$ imprime al sólido S una rotación alrededor de un eje que, en cada instante, está contenido en el plano tangente común a las dos superficies, lo que obliga a rodar a S sobre S_1; el movimiento determinado por $\boldsymbol{\omega}_t$ se denomina *de rodadura*. El vector $\boldsymbol{\omega}_n$ hace que

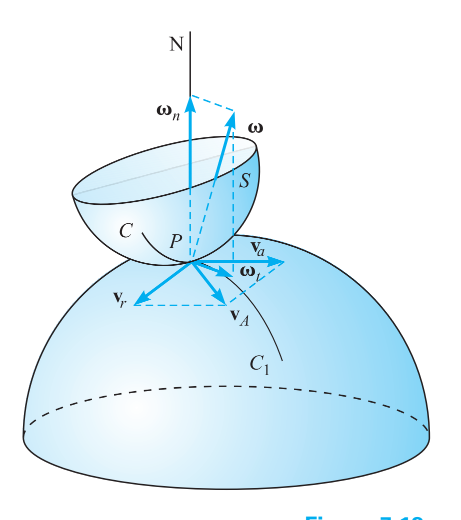


Figura 7.13.

el sólido S gire en cada instante alrededor de la normal común a las dos superficies en ese instante, denominándose a este movimiento *pivotaje*.

Si el deslizamiento es nulo, $\mathbf{v} = 0$, el torsor cinemático que define el movimiento de S respecto a S_1 se reduce únicamente a su resultante $\boldsymbol{\omega}$. Es evidente que si las dos superficies tuvieran dos puntos en común y el deslizamiento fuese nulo, la rotación instantánea tendría por línea soporte la que une los dos puntos comunes, pues para que sea el momento nulo en los dos puntos la línea que los une debe tener la dirección de la resultante. Si hay varios puntos de contacto, el deslizamiento no podrá ser nulo, salvo que todos los puntos estén alineados.

7.9 Movimiento de un sólido paralelamente a un plano fijo o movimiento de una figura plana en su plano

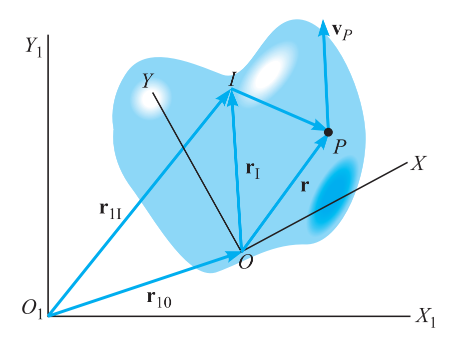


Figura 7.14.

Es un caso particular del movimiento general del sólido, puesto que aquí el vector rotación $\boldsymbol{\omega}$ tiene dirección fija, normal al plano fijo respecto al cual el sólido se mueve paralelamente, o bien normal al plano en el cual se mueve la figura plana, por lo que el campo de momentos es perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$. Tomaremos esta dirección como dirección común de los ejes O_1Z_1 y OZ; el plano X_1OY_1 será fijo y el plano XOY móvil respecto a él (Figura 7.14). El vector $\boldsymbol{\omega}$ se expresa de la forma $\boldsymbol{\omega} = \omega\,\mathbf{k}$ y la velocidad de un punto cualquiera del plano móvil es, según [7.3]:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_0 + \omega\,\mathbf{k} \times \mathbf{r} \qquad [7.8]$$

La velocidad de un punto P es igual a la velocidad de otro punto cualquiera O, más la debida a una rotación de centro O.

El torsor que define el movimiento, $\mathbf{R}(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{M}_P(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{v}_P$, verifica $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_P = 0$. En los puntos del eje central $\mathbf{M}(\boldsymbol{\tau}) = 0$ y el movimiento se reduce a una rotación alrededor de este eje, ya que el sistema se reduce a la resultante $\boldsymbol{\omega}$ aplicada en él. En consecuencia, para el punto I de corte del eje central con el plano del movimiento la velocidad es nula, verificándose:

$$0 = \mathbf{v}_0 + \omega\,\mathbf{k} \times \mathbf{r}_I \qquad [7.9]$$

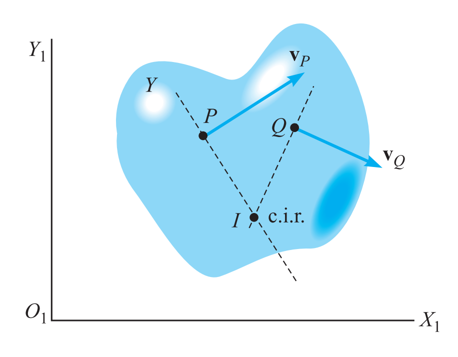


Figura 7.15.

Restando las expresiones [7.8] y [7.9] resulta:

$$\mathbf{v}_P = \omega\mathbf{k} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_I) = \omega\,\mathbf{k} \times \mathbf{IP} \qquad [7.10]$$

es decir, en cada instante la velocidad de un punto P del plano móvil es la debida a una rotación de centro I y velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, motivo por el cual el centro I se denomina *centro instantáneo de rotación* (c.i.r.), y no es más que la intersección con el plano del movimiento del eje instantáneo de rotación.

La velocidad $\mathbf{v}_P$ es normal al vector $\mathbf{IP}$, de aquí que, conocidas para un mismo instante las direcciones de las velocidades de dos puntos de la figura móvil, se determine el c.i.r. como intersección de las normales a ambas (Figura 7.15).

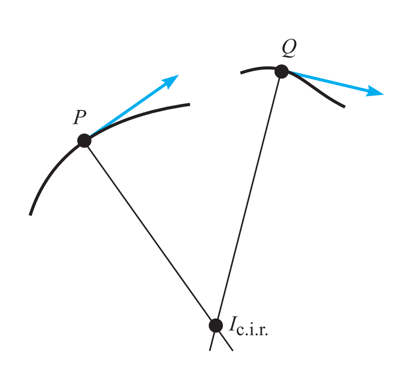


Figura 7.16.

Cada punto del plano móvil engendra una trayectoria al moverse sobre el plano fijo, el vector $\mathbf{v}_P$ será tangente a la trayectoria y el c.i.r. puede determinarse como intersección de las normales a la trayectoria de dos puntos para un mismo instante (Figura 7.16).

Si se conoce la velocidad de un punto $\mathbf{v}_P$ y el c.i.r., puede determinarse la velocidad de cualquier otro punto Q de la figura móvil en ese instante, puesto que la dirección de $\mathbf{v}_Q$ será normal a IQ, el sentido será el correspondiente al giro de la figura alrededor de I, determinado por $\mathbf{v}_P$, y el módulo será:

$$v_P = IP \cdot \omega \quad ; \quad \omega = \frac{v_P}{IP} \quad ; \quad v_Q = IQ \cdot \omega = \frac{IQ}{IP}\, v_P$$

Analíticamente, las coordenadas del c.i.r. en el sistema móvil se calculan con la Ecuación [7.9], que se desdobla en las dos escalares:

$$v_0^x - \omega y_1 = 0 \quad ; \quad v_0^y + \omega x_1 = 0$$

siendo:

$$x_1 = -\frac{v_0^y}{\omega} \quad \text{e} \quad y_1 = \frac{v_0^x}{\omega} \qquad [7.11]$$

Ruleta

Estas ecuaciones son función del tiempo y nos dan, para cada instante, la posición del c.i.r. en el plano *XOY*. El lugar geométrico de las posiciones del c.i.r. en el plano móvil, para los diferentes instantes, es una curva denominada *ruleta*, que no es más que la intersección del axoide móvil con el plano del movimiento. Las ecuaciones [7.11] son las ecuaciones paramétricas de la ruleta con parámetro el tiempo. Si eliminamos éste entre ambas, obtendremos la ecuación cartesiana de la ruleta.

En el plano fijo, la Ecuación [7.9] se escribe:

$$0 = \mathbf{v}_0 + \omega \mathbf{k}_1 \times (\mathbf{r}_{1I} - \mathbf{r}_{10})$$

desdoblándose en las dos escalares:

$$v_0^{x_1} - \omega (y_{1I} - y_{10}) = 0 \quad ; \quad v_0^{y_1} + \omega (x_{1I} - x_{10}) = 0$$

que nos dan para las coordenadas del c.i.r. en el plano fijo las expresiones:

$$x_{11} = x_{10} - \frac{v_0^{y_1}}{\omega} \quad ; \quad y_{1I} = y_{10} + \frac{v_0^{y_1}}{\omega} \qquad [7.12]$$

Base

El lugar geométrico de los puntos ocupados por el c.i.r. en el plano fijo se denomina *base*, que es la intersección del axoide fijo con el plano del movimiento, curva cuyas ecuaciones paramétricas con parámetro el tiempo son las [7.12]. La ecuación cartesiana de la *base* se obtiene eliminando el tiempo entre las [7.12].

EJEMPLO 7.7

Una semirrecta se mueve conservándose tangente a una circunferencia fija de radio R y con su extremo sobre una tangente fija de la citada circunferencia. Hallemos las ecuaciones de la base y la ruleta del movimiento.

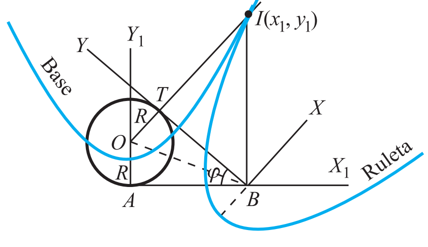


Figura 7.17.

Solución:

Tomaremos en A el origen del sistema fijo de referencia; el eje O_1X_1 será el AB y el eje O_1Y_1, el AO (Figura 7.17).

La trayectoria del punto B es O_1X_1, luego el c.i.r. está en la normal a la trayectoria. La trayectoria del punto de contacto T es la propia circunferencia, por tanto, el c.i.r. esta en la normal a la circunferencia en T. El c.i.r. es la intersección de ambas normales $I(x_1, y_1)$.

En el triángulo rectángulo OAB se deduce:

$$x_1 = R \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$$

y en el triángulo rectángulo *OHI* se verifica:

$$y_1 - R = x_1 \operatorname{ctg} \varphi$$

Eliminando entre ambas φ se obtiene la ecuación de la base, lo que se hace así:

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{x_1}{R} = \frac{\cos \varphi/2}{\operatorname{sen} \varphi/2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} = \frac{x_1^2}{R^2} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{x_1^2 - R^2}{x_1^2 + R^2}$$

Además es:

$$\operatorname{sen} \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \frac{2x_1 R}{x_1^2 + R^2}$$

Por tanto:

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{\cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} = \frac{x_1^2 - R^2}{2Rx_1}$$

y la ecuación de la base es:

$$y_1 - R = \frac{x_1^2 - R^2}{2R} \Rightarrow y_1 = \frac{x_1^2}{2R} + \frac{R}{2} \quad \text{(Base)}$$

que es una parábola de eje O_1Y_1 y vértice $(0, R/2)$.

El origen del sistema móvil será el punto *B*; tomaremos la recta *BT* como eje *OY* y la normal a ella por *B* como eje *OX*. En este sistema, las coordenadas del c.i.r. $I(x, y)$ son:

$$y = R \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \quad ; \quad x = y \operatorname{ctg} \varphi$$

Ahora es $\operatorname{ctg} \varphi/2 = y/R$ y análogamente a los cálculos anteriores:

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{y^2 - R^2}{2Ry}$$

con lo cual es:

$$x = \frac{y^2 - R^2}{2R} \Rightarrow x = \frac{y^2}{2R} - \frac{R}{2} \quad \text{(Ruleta)}$$

que es una parábola de eje *OX* y vértice $(-R/2, 0)$.

LA DINÁMICA

La Dinámica es la parte de la Mecánica y, por tanto, de la Física, que trata de relacionar los movimientos con las causas que los producen. Todo movimiento tiene su origen en fuerzas y los problemas planteados son la determinación del movimiento que provocarán sobre un cierto cuerpo un conjunto concreto de fuerzas, o de por qué un cuerpo se mueve tal y como lo esta haciendo.

Aristóteles (384-222 a.C.) estudió el movimiento de los cuerpos, pero su análisis se hizo siempre en función de las velocidades, no consiguió intuir el concepto de aceleración y, en consecuencia, no fue capaz de iniciar el estudio de las causas del movimiento. Tampoco sospechó la acción a distancia y defendía que *el motor debe acompañar siempre al cuerpo que se mueve*.

Ya en el siglo XII surge la idea del conocimiento racional y de la demostración formal, lo que se hizo utilizando la lógica de Aristóteles y la matemática desarrollada por los griegos. Aristóteles ya distinguió entre el conocimiento del hecho como experiencia y el conocimiento racional del hecho o causas profundas que lo han originado, San Agustín indicó que *los sentidos son engañosos y sólo la razón puede alcanzar la verdad*.

Durante los siglos XVI y XVII, se vuelve a la idea griega de la explicación teórica de la ciencia, se revitaliza la Geometría euclídea y se intenta expresar la ciencia en términos de los avances de la Matemática. Quizá fue Leonardo da Vinci (1452-1519) quien dio los primeros impulsos en este sentido, pero hay que llegar a Galileo (1564-1642) para encontrar una aplicación sistemática de los métodos experimentales y de razonamientos abstractos matemáticos, que dieron origen a una gran revolución, primero en la Dinámica y luego en las demás ciencias. Galileo escribió: *«La filosofía está escrita en este gran libro, que continuamente está abierto ante nuestros ojos, me refiero al universo, pero no puede ser entendido a menos que uno aprenda primero el lenguaje y a interpretar las características en que está escrito. Está escrito en el lenguaje de las matemáticas...»*

En contra de la teoría aristotélica, Galileo estableció que todos los cuerpos caen con la misma aceleración, e intuyó la ley de la inercia, que no llegó a enunciar como tal, si bien estableció que *un cuerpo sobre el que no actúan fuerzas tiene velocidad constante*, lo que es una forma de enunciar la primera ley de Newton.

Para Aristóteles la gravedad era *la tendencia de todos los cuerpos a dirigirse al centro del universo*, en contra de lo cual Copérnico y Galileo consideraron a la gravedad como *la tendencia de los cuerpos a unirse entre si*, y Kepler consideró que no era una tendencia sino una atracción real que se ejercen los cuerpos de forma análoga a la encontrada por Gilbert para los imanes; así, en su libro *Astronomía Nova*, puede leerse: *si dos piedras fueran colocadas una cerca de otra en cualquier lugar del universo... se comportarían como dos cuerpos magnéticos y se reunirían en un punto intermedio...* Sin embargo, y aunque desarrolló una teoría de la gravitación para el sistema Tierra-Luna, no llegó a darse cuenta de que esa fuerza era inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa a los cuerpos.

Los trabajos de Copérnico (1473-1543) sobre el sistema solar, publicados en su libro *De Revolutionibus Orbium Coelestium*, apoyados firmemente por Galileo; los datos experimentales, minuciosos y muy precisos, de Tycho Brahe (1546-1601) sobre órbitas de planetas y satélites; y las leyes de Kepler (1571-1630) del movimiento de los planetas alrededor del Sol, así como de su teoría de la gravitación, aplicada únicamente al sistema Tierra-Luna, dejaron preparado el terreno para la síntesis newtoniana.

Newton (1643-1727) publica su primer libro a los 45 años, con el título *Philosophiae Naturalis Principia Mathemática*, en el cual enuncia las tres leyes fundamentales de la Dinámica: ley de la inercia, ley del movimiento, y ley de la acción y la reacción. Asimismo, establece la ley de la gravitación universal, *«que mantiene a los planetas en su órbita alrededor del Sol, a los satélites en sus órbitas alrededor de los planetas, produce las mareas y hace que los cuerpos caigan tal y como lo hacen»*.

Los desarrollos posteriores de la Dinámica clásica han consistido en nuevas formulaciones que verifican los mismos principios y han sido desarrollados, fundamentalmente, por Lagrange y Hamilton, dando lugar a la Dinámica analítica, de planteamiento muy general y fácil aplicación a la Mecánica cuántica, la Mecánica estadística y la Electrodinámica.

Principios fundamentales de la Dinámica

CAPÍTULO 8

8.1 Conceptos de masa

En principio podemos definir la *masa* como una magnitud característica de la cantidad y naturaleza de la materia constitutiva de las partículas materiales, y que determina el comportamiento de éstas cuando interactúan. La masa así definida es una propiedad intrínseca de la materia.

La igualdad de masas se establece utilizando la balanza de brazos simétricos, y diremos que dos cuerpos tienen igual masa cuando, colocados uno en cada platillo de la balanza, ésta permanece en equilibrio.

Postularemos que la masa de un cuerpo compuesto es igual a la suma de las masas de sus componentes, cualquiera que sea la disposición del conjunto.

Patrón de masa

Todo ello nos permite, tomando la masa de un cuerpo patrón como masa unidad, medir la masa de los diferentes cuerpos, cuyo valor siempre será positivo. En el sistema internacional de unidades (SI), como ya indicamos, se toma como unidad de masa el kilogramo (kg), que es la *masa de un bloque cilíndrico de platino iridiado, cuya altura y diámetro son iguales, y que se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas en Sévres (Francia).* Masa que prácticamente coincide con la de un dm^3 de agua destilada a la temperatura de 4 °C.

Unidad de masa atómica (uma)

La escala internacional de masas atómicas toma como elemento de referencia el carbono, asignando el valor de 12 unidades de masa atómica (uma) a la masa de su isótopo natural más abundante. Así pues, la unidad de masa atómica es la doceava parte de la masa del átomo de carbono ^{12}C:

$$\text{uma} = \frac{1}{12}\,\text{masa átomo}\ ^{12}C$$

Un kilomol de ^{12}C contiene una masa de 12 kilogramos y un número de átomos igual al número de Avogadro $N_A = 6{,}022\,141\,99 \times 10^{26}$ átomos/kmol. Por tanto, la masa de uno de los átomos será:

$$m = \frac{M}{N_A} = \frac{12}{6{,}022\,141\,99 \times 10^{26}} = 1{,}992\,646\,5 \times 10^{-26}\ kg/átomo$$

con ello, la uma expresada en kilogramos es:

$$uma = \frac{m}{12} = 1{,}660\,538\,7 \times 10^{-27}\ kg$$

8.2 Concepto de densidad

Densidad media

Se define la *densidad media*, o *masa específica media* de un cuerpo, como la masa de éste por unidad de volumen. Así, un cuerpo de masa m y volumen V, tiene una densidad media $<\rho>$, dada por:

$$<\rho> = \frac{m}{V} \qquad [8.1]$$

Si el cuerpo es homogéneo, todos sus puntos tienen la misma densidad, que coincide con la media. Las dimensiones de la densidad serán las de una masa dividida por la longitud al cubo:

$$[\rho] = ML^{-3}$$

La unidad de densidad en el SI es el $kg \cdot m^{-3}$ y en el CGS, el $g \cdot cm^{-3}$. La densidad del agua a 4 ºC es, muy aproximadamente, $10^3\ kg \cdot m^{-3}$, en el SI, o $1\ g \cdot cm^{-3}$, en el CGS.

Densidad puntual

Si el cuerpo no es homogéneo, podemos considerar que sí lo es cualquier volumen elemental del mismo, dV, cuya masa será también elemental, dm, y aplicando a este elemento homogéneo la [8.1] obtenemos la expresión de la densidad puntual:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \qquad [8.2]$$

Tabla 8.1. Densidad de algunas sustancias

Sustancia	Densidad kg/m³	Sustancia	Densidad kg/m³
Gases (0 ºC, 1 atm)		**Líquidos (1 atm)**	
Aire	1,29	Agua (4 ºC)	$1{,}00 \cdot 10^3$
Dióxido de carbono	1,97	Agua de mar (0 ºC)	$1{,}025 \cdot 10^3$
Helio	0,178	Alcohol etílico (20 ºC)	$0{,}789 \cdot 10^3$
Hidrógeno	0,090	Gasolina	$0{,}68 \cdot 10^3$
Vapor de agua (100 ºC)	0,598	Mercurio (20 ºC)	$13{,}6 \cdot 10^3$
Sólidos (20 ºC)			
Aluminio	$2{,}74 \cdot 10^3$	Plomo	$11{,}30 \cdot 10^3$
Bronce	$8{,}49 \cdot 10^3$	Oro	$19{,}35 \cdot 10^3$
Cobre	$8{,}91 \cdot 10^3$	Madera	$0{,}4\text{-}0{,}9 \cdot 10^3$
Diamante	$2{,}42 \cdot 10^3$	Platino	$21{,}47 \cdot 10^3$
Granito	$2{,}7 \cdot 10^3$	Porcelana	$0{,}26 \cdot 10^3$
Hielo	$0{,}92 \cdot 10^3$	Pírex	$2{,}23 \cdot 10^3$
Hierro	$7{,}8 \cdot 10^3$	Tungsteno	$19{,}3 \cdot 10^3$
Iridio	$22{,}6 \cdot 10^3$	Vidrio flint	$4{,}28 \cdot 10^3$
Plata	$10{,}5 \cdot 10^3$		

Densidad relativa

Si las densidades de dos cuerpos, en las mismas condiciones de presión y temperatura, son ρ_1 y ρ_2, se define la *densidad relativa* del cuerpo 2 respecto al 1, ρ_{21}, en esas condiciones de presión y temperatura, como:

$$\rho_{21} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{m_2/V_2}{m_1/V_1} \qquad [8.3]$$

que es un número sin dimensiones. Evidentemente, la densidad absoluta del cuerpo 2, ρ_2, es igual al producto de su densidad relativa respecto al cuerpo 1, ρ_{21}, por la densidad absoluta de éste, ρ_1.

Se denomina *volumen específico* al volumen por unidad de masa:

$$V_e = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho}$$

que es la inversa de la densidad.

8.3 Concepto de fuerza

Definiremos la *fuerza* como *toda causa capaz de modificar el estado de reposo o movimiento de los cuerpos, o de producir en ellos estados de tensiones o deformaciones*. Se tiene un concepto intuitivo de fuerza a partir de la sensación de esfuerzo muscular. Para precisar un poco este concepto intuitivo, apliquemos nuestro esfuerzo muscular a un punto de un cuerpo mediante una varilla ideal, rígida e indeformable, articulada al punto. Observaremos que los efectos producidos sobre el cuerpo son distintos según la *dirección* en la que coloquemos la varilla; también dependerá de si tiramos de ésta o empujamos con ella, es decir del *sentido* de nuestro esfuerzo. Todo lo cual pone claramente de manifiesto el carácter vectorial de las fuerzas.

Si el cuerpo sobre el que actúan las fuerzas es deformable, ya vimos como los efectos de éstas son distintos según su punto de aplicación, aun dentro de la misma línea de acción, lo que exige, en esos casos, considerar las fuerzas como vectores localizados.

Si el cuerpo sobre el que actúan las fuerzas es rígido, podemos considerar éstas como vectores deslizantes, pues su efecto no cambia al variar el punto de aplicación, siempre que se mantenga la misma línea de aplicación y el mismo sentido.

8.4 Leyes de Newton

El desarrollo de la Dinámica clásica, o Dinámica newtoniana, está basado en tres leyes fundamentales enunciadas por Newton y publicadas en 1687, en su famoso libro *Philosophiae Naturalis Principia Matemática*. Estas leyes son:

Primera ley o ley de la inercia: *Toda partícula sobre la que no actúa fuerza neta alguna no toma aceleración, conservando el estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme en que se encuentre.*

Si la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula es nula, $\mathbf{F} = 0$, ésta no toma aceleración, $\mathbf{a} = 0$ y, por tanto, su velocidad debe permanecer constante $\mathbf{v} = \text{cte}$. Si inicialmente estaba en reposo, $\mathbf{v}_0 = 0$, seguirá en reposo, y si estaba moviéndose con una cierta velocidad, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$, seguirá con ésta, es decir, con movimiento rectilíneo uniforme.

Sistema de referencia inercial

Hemos visto cómo el movimiento depende del sistema de referencia elegido y cómo están relacionadas las velocidades y aceleraciones en dos sistemas de referencia, uno de los cuales se mueve respecto al otro. La ley de la inercia se verificará únicamente en un sistema de referencia no acelerado pues, de lo contrario, toda partícula de él llevaría la aceleración de arrastre correspondiente, aunque la resultante de las fuerzas aplicadas sea nula. A estos sistemas, en los cuales se verifica la ley de la inercia, se les denomina inerciales.

Asimismo, hemos visto cómo una partícula tiene la misma aceleración respecto a un sistema de referencia, que respecto a cualquier otro que se mueva respecto al primero, con movimiento rectilíneo uniforme. Por tanto, todo sistema de referencia que se mueva con movimiento de traslación rectilíneo uniforme respecto a uno inercial, también será inercial.

Los sistemas de referencia ligados a la superficie de la Tierra no son inerciales, pues la Tierra gira alrededor de su eje polar con velocidad angular $\omega = 7{,}272 \cdot 10^{-5}$ rad/s. Sin embargo, en muchos casos, los efectos debidos a la rotación de la Tierra pueden despreciarse y considerarse como inerciales los sistemas de referencia ligados a nuestros laboratorios.

El sistema de referencia Tierra-estrellas, cuyo origen coincide con el centro de la Tierra; uno de sus ejes, con el eje polar de rotación, y otro eje dirigido a un punto fijo muy lejano (punto Aries) tampoco es inercial, pues la Tierra gira alrededor del Sol con velocidad angular $\Omega = 2 \cdot 10^{-7}$ rad/s. No obstante, si el tiempo que dura nuestra experiencia es muy pequeño frente al empleado por la Tierra en recorrer su órbita, podemos admitir que estos ejes son inerciales.

El sistema de referencia de Copérnico, o heliocéntrico, cuyo origen se sitúa en el centro de masas del sistema solar, prácticamente el centro del Sol, tampoco es inercial, ya que el Sol sigue una trayectoria curva alrededor del centro de nuestra galaxia (Vía Láctea), cuyo radio medio aproximado es de $3 \cdot 10^{20}$ m, que tarda en completar unos $2 \cdot 10^{8}$ años. Estas cifras son tan enormes, que siempre nos van a permitir considerar el sistema de referencia de Copérnico inercial sin error apreciable.

Segunda ley o ley del movimiento: *Toda partícula sobre la que actúa una fuerza neta, toma una aceleración, que tiene la misma dirección y sentido de aquélla, y cuyo módulo es igual al módulo de la fuerza dividido por la masa de la partícula.*

Lo que se expresa:

Ley fundamental de la Dinámica

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} \qquad m\,\mathbf{a} = \mathbf{F} \qquad [8.4]$$

Esta ley, denominada *ley fundamental de la Dinámica*, contiene como caso particular la ley de la inercia, pues si es $\mathbf{F} = 0$, deberá ser $\mathbf{a} = 0$, y la partícula permanecerá en reposo o con movimiento rectilíneo uniforme, lo que exige que el sistema de referencia usado deba ser inercial.

Como consecuencia de las verificaciones de la Mecánica celeste, admitimos que la ley fundamental de la Dinámica se cumple en el sistema de referencia de Copérnico. También se cumplirá en todos los inerciales con éste, afirmación que constituye el principio de relatividad newtoniano.

Masa inercial

La Ecuación [8.4] relaciona tres magnitudes físicas y puede servir para definir una de ellas. La aceleración está definida, y si consideramos que las fuerzas tienen un origen independiente y que también pueden ser medidas, esta relación nos permite definir la masa como una propiedad intrínseca de las partículas materiales, que determina la aceleración que adquieren al actuar sobre ellas fuerzas y que denominaremos *masa inercial*.

No obstante, puesto que las masas son proporcionales a los pesos, la balanza de brazos iguales, como ya hemos indicado, nos permite medir masas tomando una de ellas como patrón. Esto permite que el S.I. de unidades tome como magnitud fundamental la masa y de la Ecuación [8.4] podemos establecer la ecuación de dimensiones de la fuerza como magnitud derivada:

$$[F] = MLT^{-2}$$

Unidad de fuerza newton

La unidad de fuerza en el S.I. se denomina newton (N) y, de acuerdo con su ecuación de dimensiones, se expresa $N = kg \cdot m \cdot s^{-2}$. *El newton es la fuerza que hay que aplicar a una partícula de masa inercial un kilo, para imprimir una aceleración de un metro por segundo cada segundo.*

En el sistema de unidades C.G.S., la unidad de fuerza se llama *dina y es la fuerza necesaria para imprimir a una partícula de masa inercial un gramo, una aceleración de un centímetro por segundo cada segundo.* Su equivalencia con el newton es:

$$\text{newton} = kg \cdot m \cdot s^{-2} = 10^3\ g \cdot 10^{-2}\ cm \cdot s^{-2} = 10^5\ \text{dinas}$$

Tercera ley o ley de igualdad entre acción y reacción: *Al interactuar dos cuerpos se ejercen sendas fuerzas que son iguales y de sentido contrario.*

Acción de contacto

Si la acción del cuerpo A sobre el B es $\mathbf{F}_{AB}$, la reacción del B sobre el A es $\mathbf{F}_{BA} = -\mathbf{F}_{AB}$. Estas acciones que se ejercen los cuerpos pueden ser por contacto directo o por acciones a distancia (Figura 8.1). Entre las primeras, están las fuerzas de ligadura y, entre las segundas, las gravitacionales, y tanto unas como otras las estudiaremos posteriormente.

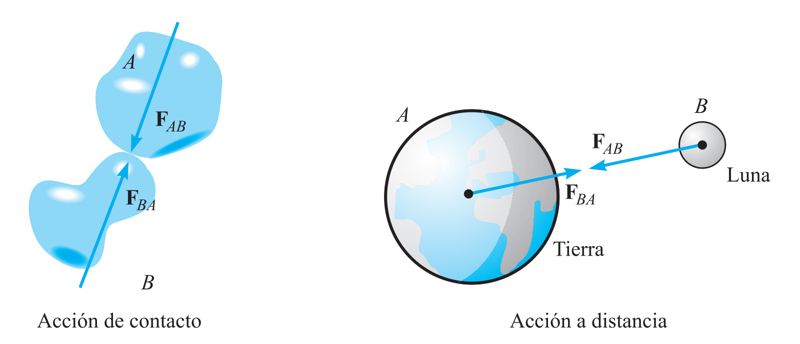


Figura 8.1.

La segunda ley de Newton establece que si en un cierto instante son conocidas la velocidad y la posición de una partícula, respecto a un sistema de referencia inercial, y las fuerzas que actúan sobre ella pueden expresarse analíticamente en ese sistema, quedan determinadas la posición y velocidad de la partícula en el tiempo, es decir, las situaciones en un instante predeterminan las futuras, lo que constituye el determinismo de la Mecánica clásica.

Límites de validez

Ya a finales del siglo XIX la Mecánica clásica entró en conflicto con el Electromagnetismo, cuyo desarrollo había sido completado por Maxwell. Fue Einstein el que dió la razón a éste y desarrolló una nueva Mecánica, la Mecánica relativista, que englobaba la clásica como caso particular, válida únicamente o con error despreciable para pequeñas velocidades comparadas con la de la luz en el vacío. También la Mecánica clásica se encontró con limitaciones al intentar su aplicación al mundo atómico y fue necesario desarrollar las mecánicas ondulatoria y cuántica para poder explicar los fenómenos físicos del universo de lo muy pequeño.

Caos

En el último cuarto del siglo XX, la aplicación de las ecuaciones de Newton a ciertos sistemas ha permitido comprobar que, según sean las condiciones iniciales, éstas pueden dar lugar a resultados no deterministas, es decir, los estados futuros del sistema no pueden ser determinados con precisión, lo que cuestiona claramente el determinismo de la Mecánica y ha dado lugar a un nuevo campo en la ciencia, en el que convergen la Física y las Matemáticas, y que se ha denominado *caos*.

8.5 Ley de la gravitación universal

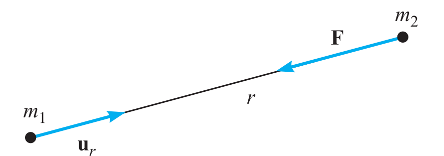


Figura 8.2.

También debida a Newton es la célebre ley de la gravitación universal, según la cual *dos masas puntuales se ejercen entre sí una fuerza de atracción mutua, cuyo módulo es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia*, *r*, *que las separa* (Figura 8.2):

$$\mathbf{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\mathbf{u}_r \qquad [8.5]$$

Constante de la gravitación universal

Fórmula en la que G es la *constante de la gravitación universal*, cuya ecuación de dimensiones se deduce de la misma, siendo $[G] = [\mathbf{F}]L^2M^{-2} = M^{-1}L^3T^{-2}$, y su valor más reciente, expresado en el S.I., es:

$$G = 6{,}67259 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}\ \pm 0{,}010\cdot 10^{-11}$$

La fuerza de la gravitación expresada analíticamente y aplicando la ley de la dinámica de Newton, permite estudiar el movimiento de los cuerpos dentro de los campos gravitacionales, tanto de la Tierra, como del Sol y los planetas. En la escala del sistema solar, cualquier planeta y el mismo Sol pueden ser considerados puntuales, así, en 1845, Le Verrier y Adams la aplicaron al estudio de la órbita de Urano y comprobaron que sus resultados no concordaban con la realidad de aquélla, lo que les hizo suponer la existencia de otro planeta, y en 1846, el astrónomo Galle vio Neptuno por primera vez.

Esta ley puede aplicarse a los cuerpos reales que posean simetría esférica, sin más que considerar toda la masa concentrada en el centro de simetría, pues la fuerza gravitacional que ejerce sobre una masa puntual exterior es la misma que ejercería toda su masa concentrada en su centro.

Aceleración de la gravedad

Supuesta la Tierra con simetría esférica, es decir, su densidad es solamente función de r, con radio R y masa M, un pequeño cuerpo de masa m situado sobre su superficie (Figura 8.3) se verá atraído con una fuerza, cuyo módulo es:

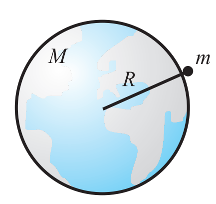


Figura 8.3.

$$F = G\frac{Mm}{R^2}$$

y, de acuerdo con la segunda ley de Newton, dicha masa m estará sometida a la aceleración:

$$g_1 = G\frac{M}{R^2} \simeq 9{,}815\ \mathrm{m/s^{-2}}$$

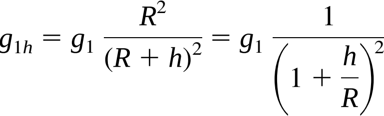
en la que hemos usado los valores $M = 5{,}976 \times 10^{24}$ kg y $R = 6{,}374 \times 10^6$ m.

Variación de g con la altitud

Ahora bien, g_1 variará con la altitud h, pues depende de la distancia del punto considerado al centro de la Tierra (Figura 8.4), y su expresión en función de h es:

$$g_{1h} = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

y, en función de g_1:



$$g_{1h} = g_1 \frac{R^2}{(R+h)^2} = g_1 \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}$$

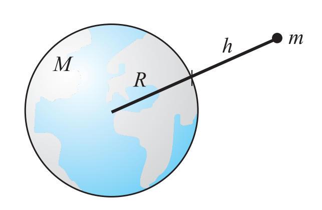


Figura 8.4.

expresión que nos da la aceleración de la gravedad en un punto situado a una altura h sobre el nivel del mar, en función del valor g_1 de la misma en el punto de la línea que une al primero con el centro de la Tierra, situado al nivel medio del mar. Así, en la cima del Everest, $h = 8{,}848$ km, la aceleración de la gravedad es aproximadamente $g = 9{,}788$ m/s^2.

La Tierra, ni es esférica ni homogénea, pero los valores de g hallados de la forma teórica indicada son una importante referencia para muchas aplicaciones. Así, en Geología, las variaciones de g en las medidas experimentales sobre el terreno, respecto a los valores teóricos, nos pueden indicar la presencia de yacimientos minerales en la zona.

EJEMPLO 8.1 Masa del Sol

Podemos estimar la masa M del Sol admitiendo que la Tierra describe alrededor de él una trayectoria circular de radio $R = 150 \times 10^6$ km con velocidad angular $\Omega = 2 \times 10^{-7}$ rad/s.

Solución:

La atracción gravitacional del Sol provoca sobre la Tierra la aceleración:

$$G \frac{M}{R^2} = R\Omega^2$$

de donde:

$$M = \frac{R^3\Omega^2}{G} = \frac{15^3 \times 10^{30} \times 4 \times 10^{-14}}{6{,}673 \times 10^{-11}} = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$$

EJEMPLO 8.2 Órbita circular

Un satélite se mueve en órbita circular a una altura de 160 km sobre la superficie de la Tierra. Calculemos la velocidad que debe llevar en esa órbita y el periodo de circunvalación.

Solución:

El satélite describe una trayectoria circular con movimiento uniforme, su aceleración tangencial será nula y su aceleración normal será debida únicamente a la atracción de la Tierra, verificándose:

$$G \frac{Mm}{(R+h)^2} = \frac{mv^2}{R+h}$$

de donde:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} = R\sqrt{\frac{g_1}{R+h}}$$

cuyo valor para $R = 6{,}374 \times 10^6$ m, $g_1 = 9{,}815$ m/s^2 y $h = 16 \times 10^4$ m, es $v = 7\,812{,}1$ m/s $= 28\,123{,}55$ km/h.

La trayectoria recorrida es $2\pi(R+h)$ y será igual a la velocidad v por el tiempo T empleado en recorrerla:

$$2\pi(R+h) = vT$$

de donde:

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{R}\sqrt{\frac{R+h}{g_1}}$$

que, con los datos anteriores, resulta $T = 5\,252{,}225\,5$, $s = 1$ h 27 m 32,23 s.

EJEMPLO 8.3 Satélite geoestacionario

Se dice que un satélite es geoestacionario cuando su posición respecto a la Tierra permanece fija. Para ello, su velocidad angular de rotación alrededor del eje polar terrestre debe ser igual a la de la Tierra, de aquí que también se le denomine geosíncrono, todo lo cual sólo es posible si el satélite permanece en el plano ecuatorial terrestre.

Solución:

Calculemos el radio de la órbita circular de este tipo de satélite y su velocidad lineal. Puesto que el movimiento será circular uniforme y la única fuerza la debida a la atracción terrestre, la ecuación del movimiento se expresa:

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2}$$

de donde:

$$v^2 = G\frac{M}{r}$$

Por otra parte, la velocidad lineal del satélite será $v = r\omega$, siendo ω la velocidad angular de rotación del satélite, igual a la de la Tierra. Con ello, es:

$$r^2\omega^2 = G\frac{M}{r}$$

de donde:

$$r^3 = G\frac{M}{\omega^2} = 6{,}673 \times 10^{-11}\frac{5{,}976 \times 10^{24}}{7{,}272^2 \times 10^{-10}} = 75{,}409\,14 \times 10^{21}$$

y $r = 42\,248{,}2$ km.

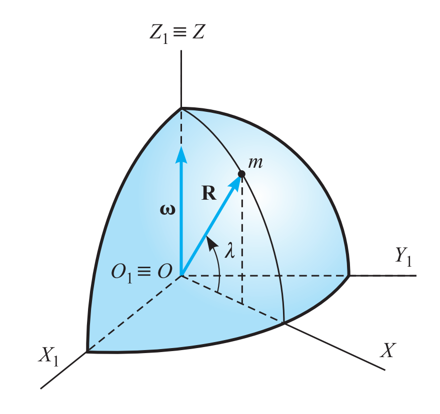
La velocidad lineal del satélite es:

$$v = r\omega = 42\,248{,}2 \times 10^3 \times 7{,}272 \times 10^{-5} = 3\,072{,}3 \text{ m/s}$$

8.6 Concepto de peso

Consideremos un punto material de masa m, suspendido del extremo de un hilo e inmóvil respecto a la superficie terrestre. Se define el peso del punto material como *la fuerza que éste ejerce sobre el hilo que lo soporta;* lo designaremos mediante **P**.

Tomemos como sistema de referencia absoluto el sistema Tierra-estrellas, uno de cuyos ejes lo haremos coincidir con el de rotación de la Tierra. El sistema móvil ligado a la Tierra tendrá su origen en el centro de ésta y uno de sus ejes coincidente con el de rotación (Figura 8.5).



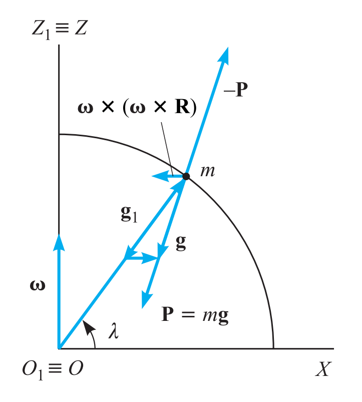


Figura 8.5.

Sobre el punto de masa m actúan dos fuerzas, una dirigida hacia el centro de la Tierra, debida a la atracción de ésta, cuyo valor es $m\mathbf{g}_1$, y otra ejercida por el hilo sobre el punto, que en virtud de la tercera ley de Newton es igual y opuesta al peso **P**, es decir, es igual a $-\mathbf{P}$. Por tanto, la resultante de las fuerzas que actúan sobre la masa m es:

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{g}_1 - \mathbf{P}$$

y la segunda ley de Newton se escribe:

$$m\,\mathbf{g}_1 - \mathbf{P} = m\,\mathbf{a}_A \qquad [8.6]$$

Al ser O fijo y el movimiento de rotación uniforme, de acuerdo con la [6.16], es $\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_a = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, y el peso **P**, despejando de [8.6], es:

$$\mathbf{P} = m\,\mathbf{g}_1 - m\,\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}) = m\,[\mathbf{g}_1 - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})]$$

en consecuencia, la aceleración de la gravedad es $\mathbf{g} = \mathbf{g}_1 - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$ y

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g} \qquad [8.7]$$

Por tanto, la masa y el peso resultan ser proporcionales, lo que justifica el uso de la balanza de brazos iguales para medir masas.

Definida la vertical de un lugar como la dirección de la plomada en el mismo, aquélla tendrá la dirección de **g** y no pasará por el centro de la Tierra. La variación del peso en función de la latitud y altitud del lugar, será la misma sufrida por la aceleración de la gravedad.

Variación de g con la latitud

Para estudiar la variación de la aceleración de la gravedad con la latitud, debemos expresar los vectores en el sistema de referencia utilizado, que se ha indicado en la Figura 8.5, siendo:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{R} = R(\cos\lambda\mathbf{i} + \operatorname{sen}\lambda\mathbf{k})$$

en la que λ es la latitud del lugar. Con ello:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ \cos\lambda & 0 & \operatorname{sen}\lambda \end{vmatrix} R = R\omega\cos\lambda\mathbf{j}$$

y

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & R\omega\cos\lambda & 0 \end{vmatrix} = \omega^2 R\cos\lambda\,\mathbf{i}$$

El vector $\mathbf{g}_1$, en el mismo sistema de referencia, se expresa:

$$\mathbf{g}_1 = -g_1(\cos\lambda\mathbf{i} + \operatorname{sen}\lambda\,\mathbf{k})$$

y, con ello, el vector $\mathbf{g}$ es:

$$\mathbf{g} = (-g_1 + \omega^2 R)\cos\lambda\,\mathbf{i} - g_1\operatorname{sen}\lambda\,\mathbf{k}$$

siendo su norma:

$$g^2 = g_1^2 - \omega^2 R\cos^2\lambda(2g_1 - \omega^2 R)$$

El valor de g_1 ya ha sido calculado y para los valores $\omega = 7{,}272 \times 10^{-5}$ rad/s y $R = 6\,374$ km, es $2\,g_1 > R\omega^2$, lo que nos indica que g aumenta al aumentar la latitud, resultando ser:

$$g^2 = 96{,}334\,225 - 0{,}660\,5\cos^2\lambda$$

cuyo valor máximo estará en los polos ($\lambda = 90$), $g = 9{,}815$ m/s^2, y su valor mínimo estará en puntos del ecuador ($\lambda = 0$), $g = 9{,}78$ m/s^2.

Además de ser la masa una magnitud escalar y el peso una magnitud vectorial, encontramos otra distinción clara entre el peso y la masa, esta última es una propiedad intrínseca de la materia independiente del entorno, mientras que el peso varía de un lugar a otro en función de la latitud y altitud del mismo. A pesar de este grave inconveniente, el sistema técnico de unidades toma como magnitud fundamental la fuerza en lugar de la masa, definiendo su unidad como la *fuerza con que la Tierra atrae el kilogramo-masa, en un lugar de aceleración normal* $g_0 = 9{,}806\,65$, que denomina *kilogramo-fuerza* (kgf) o *kilopondio* (kp). Su equivalencia con el newton se deduce utilizando la Ecuación [8.7], así:

Kilogramo-fuerza

$$1 \text{ kp} = 1 \text{ (kg)} \cdot g_0(\text{m/s}^2) = g_0 \text{ N}$$

Unidad técnica de masa

En el Sistema Técnico de unidades, la masa es una magnitud derivada que se denomina *unidad técnica de masa* (u.t.m.) y es la *masa que al actuar sobre kilogramo-fuerza toma una aceleración de un* $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$:

$$1 \text{ kp} = \text{u.t.m.} \cdot \text{ms}^{-2} = g_0 \text{ N} = g_0 \text{ kg} \cdot \text{ms}^{-2}$$

por tanto, la u.t.m. equivale a g_0 kg masa.

8.7 Masa inercial y masa gravitacional

Nosotros hemos utilizado el concepto de masa en dos situaciones realmente diferentes. En la segunda ley de Newton, la masa es una propiedad intrínseca de las partículas que condiciona su aceleración cuando sobre ella actúan fuerzas, siendo la aceleración inversamente proporcional a la masa de la partícula; ésta es la denominada *masa inercial*. Por otra parte, en la ley de la gravitación universal, las partículas se atraen con una fuerza proporcional al producto de sus masas; ésta es la denominada *masa gravitacional*. En principio no parece haber razón para pensar que ambas masas sean idénticas, pues una interviene en la aceleración que adquiere la partícula cuando sobre ella actúan fuerzas y otra en la atracción con otras partículas, fenómenos que en su esencia nada tienen que ver. Pero ello no es así, la masa inercial y la masa gravitacional son la misma propiedad intrínseca de las partículas materiales, su masa.

Estudiemos el caso de una partícula material de masa inercial m_i que cae atraída por la Tierra, la ecuación fundamental de la Dinámica es:

$$m_i \mathbf{a} = \mathbf{F}$$

La única fuerza que se ejerce sobre esta partícula es debida a la atracción terrestre, que, siendo m_g su masa gravitacional, es:

$$\mathbf{F} = m_g \mathbf{g}$$

Con lo que resulta ser:

$$\frac{m_i}{m_g} = \frac{g}{a}$$

Determinaciones experimentales muy precisas comprobaron que la aceleración de caída de cualquier cuerpo es independiente de la masa de éste e igual a la aceleración de la gravedad, lo que hizo que a todos los efectos se consideraran iguales ambos tipos de masa. Modernos experimentos han podido confirmar la igualdad de ambas masas con una precisión de una parte en un billón. Einstein, en 1916, admitió esta igualdad como principio, estableciendo el principio de equivalencia, según el cual *un campo gravitatorio homogéneo es equivalente a un sistema de referencia uniformemente acelerado*.

Principio de equivalencia

8.8 Otros tipos de fuerzas

Además de la fuerza gravitacional, que ya hemos analizado y que da lugar al peso de los cuerpos, tal y como éste ha sido definido, en la naturaleza se presentan otros tipos de fuerzas mecánicas que tienen lugar por acciones de contacto, como son: las fuerzas por contacto directo, con o sin rozamiento; las fuerzas elásticas, y las tensiones en hilos o barras.

Ligaduras. Fuerzas de contacto

Se denomina ligadura a todo elemento o condición que limite las posibilidades de movimiento de un sistema material. La ligadura establece unas restricciones al movimiento, que se expresan mediante ecuaciones que debe verificar la partícula o sólido móvil. En general, serán superficies o líneas sobre las cuales deben permanecer las partículas o puntos del sólido móvil, denominándose *ligaduras unilaterales a* aquéllas que pueden ser abandonadas por una de sus caras; como ejemplo podemos pensar en partículas o sólidos apoyados sobre superficies, éstas no pueden ser penetradas, pero si abandonadas. Las ligaduras se denominan *bilaterales* cuando no pueden ser abandonadas por ninguno de sus lados; cabe pensar, como ejemplo, en una partícula esférica ensartada en una curva. Las ligaduras pueden o no ofrecer resistencia al movimiento. En cualquier caso, el sistema material móvil ejerce sobre la ligadura una acción y ésta, de acuerdo con la tercera ley, ejercerá sobre el sistema una reacción igual y opuesta, que se denomina *fuerza de contacto*.

Fuerzas de contacto sin rozamiento

Cuando un cuerpo se sitúa sobre la superficie horizontal de otro, por ejemplo un libro sobre una mesa horizontal (Figura 8.6), el peso del cuerpo, $m\mathbf{g}$, aprieta al

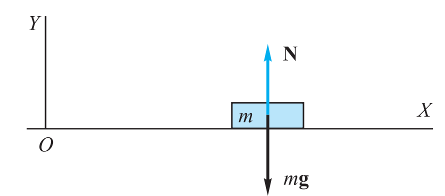


Figura 8.6.

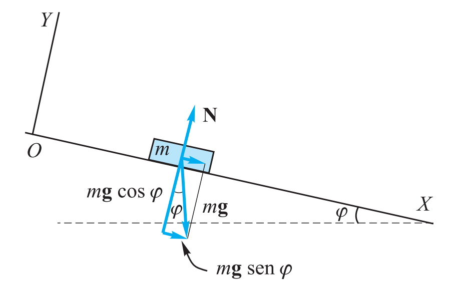


Figura 8.7.

primero sobre la segunda y esa acción, normal a la superficie de contacto, provoca una reacción, **N**, de la mesa que, de acuerdo con la tercera ley de Newton, será igual y opuesta (Figura 8.6):

$$\mathbf{N} = -m\mathbf{g} = mg\mathbf{j}$$

Si la superficie de la mesa se inclina, el peso del libro tendrá ahora dos componentes: una en dirección normal a la mesa y otra paralela a su superficie (Figura 8.7):

$$m\mathbf{g} = mg(\text{sen}\,\varphi\,\mathbf{i} - \cos\varphi\,\mathbf{j})$$

La componente en dirección normal provoca una reacción opuesta:

$$\mathbf{N} = mg\cos\varphi\,\mathbf{j}$$

y la componente paralela a la superficie provoca el deslizamiento del cuerpo sobre ella, ya que no existe fuerza de rozamiento:

$$\mathbf{F} = mg\,\text{sen}\,\varphi\,\mathbf{i}$$

Fuerzas de rozamiento

El rozamiento es una fuerza de contacto que se opone al movimiento de un cuerpo sobre la superficie de otro o al movimiento de los cuerpos en el interior de los fluidos.

Rozamiento estático

Al rozamiento de un cuerpo sobre la superficie de otro en ausencia de movimiento le denominamos *rozamiento estático*. Así, si la inclinación de nuestra mesa es pequeña, el libro no se desliza sobre ella, lo que indica que el rozamiento está neutralizando a la fuerza **F**, es decir, se verifica $\mathbf{F} + \mathbf{f} = 0$. Al ir inclinando la mesa aumenta la fuerza **F** y también aumenta la fuerza **f**, hasta un valor máximo a partir del cual el libro se desliza. A partir de este momento sigue actuando una fuerza de rozamiento que se opone al movimiento y que ahora se llama *de rozamiento dinámico*.

Rozamiento dinámico

El rozamiento ya fue objeto de estudio por Themistius, hacia el año 350 a.C., pero fue Leonardo da Vinci (1452-1519) quien descubrió sus leyes fundamentales:

Coeficiente de rozamiento

a) La fuerza de rozamiento no depende del valor del área en contacto entre los cuerpos que rozan.
b) La fuerza de rozamiento es proporcional a la acción que se ejercen los cuerpos en dirección normal a las superficies en contacto. Al coeficiente de proporcionalidad se le denomina *coeficiente de rozamiento*.
c) La fuerza de rozamiento estático es variable, $0 < f_e < \mu_e N$.
d) La fuerza de rozamiento dinámico es constante para cada pareja de superficies homogéneas, $f = \mu N$.
e) El coeficiente de rozamiento estático es siempre mayor que el dinámico, $\mu_e > \mu$.

Al ir inclinando progresivamente la superficie de nuestra mesa, un instante antes de que comience a deslizarse el libro aún se verifica $\mathbf{F} + \mathbf{f}_e = 0$. La fuerza de rozamiento estático entre el libro y la mesa se expresa $\mathbf{f}_e = \mu_e N\,\mathbf{i} = -\mu_e mg\cos\varphi_e\mathbf{i}$. Con lo cual, es $mg\,\text{sen}\,\varphi_e\mathbf{i} - \mu_e mg\cos\varphi_e\mathbf{i} = 0$, de donde se obtiene el valor del coeficiente de rozamiento estático:

$$\mu_e = \tan\varphi_e$$

En general, el coeficiente de rozamiento dinámico es inferior al estático, siendo aproximadamente un 75 % de éste, para las mismas condiciones, y la fuerza de

rozamiento dinámico es prácticamente independiente de la velocidad relativa entre las superficies que rozan. En la Tabla 8.2 se dan algunos valores de los coeficientes de rozamiento.

Tabla 8.2. Coeficientes de rozamiento

Superficies	μ_e	μ
Acero sobre acero	0,7	0,6
Acero sobre hielo	0,1	0,06
Hielo sobre hielo	0,1	0,03
Teflón sobre acero	0,04	0,04
Teflón sobre teflón	0,04	0,04
Goma sobre hormigón seco	1,0	0,8
Goma sobre hormigón húmedo	0,7	0,5
Cobre sobre acero	0,53	0,36
Caucho sobre hormigón	0,9	0,8
Rodamientos lubricados	0,01	0,01
Articulaciones humanas	0,01	0,01

Rozamiento en fluidos

Los fluidos se oponen a que los sólidos se muevan en su interior y la fuerza de rozamiento depende de la forma del sólido, de las características del fluido y de la velocidad relativa del sólido respecto al fluido.

Coeficiente de rozamiento

En el caso más sencillo, la fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad relativa del sólido respecto al fluido y de sentido opuesto: $\mathbf{f} = -c\mathbf{v}$, donde c es el *coeficiente de rozamiento o de amortiguamiento*. Ello hace que la caída de sólidos en el interior de fluidos presente una velocidad límite (Figura 8.8), ya que la ecuación del movimiento de caída es, en este caso:

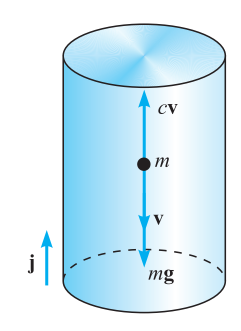


Figura 8.8.

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - c\mathbf{v} = -mg\mathbf{j} + cv\mathbf{j} = -(mg - cv)\mathbf{j}$$

Velocidad límite

La velocidad irá aumentando mientras sea $a > 0$, es decir, $mg > cv$, pero llegará un momento en el que será $mg = cv$ y, por tanto, $a = 0$, a partir de cuyo instante el cuerpo cae con velocidad constante que se denomina *velocidad límite* $v_l = mg/c$.

Para altas velocidades aparecen turbulencias en el fluido, y la fuerza de rozamiento es proporcional al cuadrado de la velocidad y opuesta a esta:

$$\mathbf{f} = -bv\mathbf{v}$$

Experimentalmente, se ha encontrado que el coeficiente b es de la forma:

$$b = \frac{1}{2}\rho AC$$

donde ρ es la densidad del medio; A, el área de la sección transversal mayor del sólido normal a la dirección del movimiento, y C es un coeficiente que depende de la forma del sólido. En este caso (Figura 8.9), la ecuación del movimiento de caída dentro del fluido es:

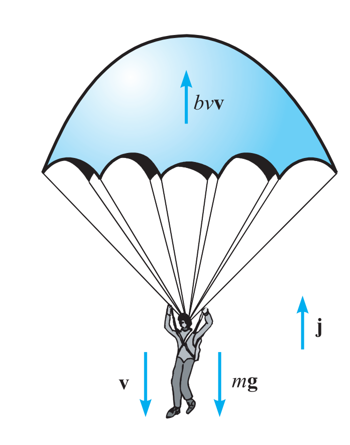


Figura 8.9.

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - bv\mathbf{v} = -(mg - bv^2)\mathbf{j}$$

y la velocidad de caída límite será:

$$v_l = \sqrt{\frac{mg}{b}} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho AC}}$$

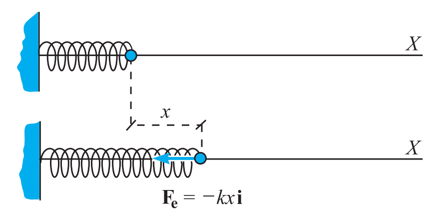


Figura 8.10.

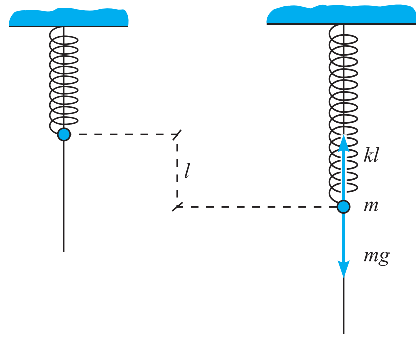


Figura 8.11.

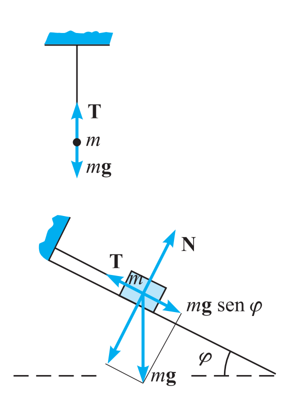


Figura 8.12.

Fuerzas elásticas

Los cuerpos se oponen a su deformación con unas fuerzas internas que radican en su estructura atómica y que denominamos *fuerzas elásticas*. Mientras las fuerzas exteriores que actúan sobre el cuerpo no sobrepasen un cierto valor, *límite elástico*, distinto para cada cuerpo, la deformación es proporcional a la fuerza aplicada y, al cesar ésta, el cuerpo recupera su forma inicial. El ejemplo clásico es el de un muelle éste ejerce una fuerza que se opone a su deformación, siendo proporcional a su alargamiento o acortamiento desde su posición natural. La constante de proporcionalidad se llama *constante elástica del muelle*. Para el muelle de la Figura 8.10, la fuerza que ejerce se expresa:

$$\mathbf{F_e} = -k\,x\,\mathbf{i}$$

Para alargarle la longitud x hemos tenido que ejercer la fuerza $\mathbf{F}$, que en la posición de equilibrio debe verificar $\mathbf{F} + \mathbf{F}_e = 0$, $\mathbf{F} = k\,x\,\mathbf{i}$.

Si el muelle está situado en posición vertical, admitiendo que su masa sea despreciable, al colgar de él una masa m se alargará una distancia l (Figura 8.11), que deberá verificar $kl - mg = 0$, y tanto la masa como el peso serán proporcionales a l, lo que permite usar un muelle calibrado para determinar pesos o masas $m = kl/g$.

Tensión

En muchas ocasiones, las fuerzas se transmiten o actúan a través de cables, cuerdas o hilos, lo que ocasiona en estos elementos tensiones, que siempre serán de tracción, pues con esos elementos únicamente se puede tirar, no es posible empujar. En general, estos elementos serán ideales, es decir, flexibles, inextensibles y de masa despreciable.

El valor de la tensión no es conocido de inicio y debe ser obtenido de las ecuaciones fundamentales de la Dinámica. Para un cuerpo de masa m colgado de un cable, la tensión de éste será $\mathbf{T} + m\mathbf{g} = 0$, $\mathbf{T} = -m\mathbf{g}$, y para un cuerpo apoyado sobre un plano inclinado un ángulo φ y sujeto con un cable, como se indica en la Figura 8.12, será $T = mg \operatorname{sen} \varphi$.

8.9 Fuerzas fundamentales

Un tipo de fuerzas se considera fundamental cuando no puede ser explicado mediante interacciones más elementales. Así lo es, por ejemplo, la fuerza gravitacional, pero no las fuerzas de rozamiento, que pueden ser explicadas mediante interacciones electromagnéticas.

Hasta épocas muy recientes se consideraba la existencia de cuatro fuerzas fundamentales: la *gravitacional*, la *electromagnética*, la *nuclear fuerte* y la *nuclear débil*. La gravitacional ya ha sido estudiada y tenemos experiencia diaria de ella; la electromagnética, que estudiaremos posteriormente, es la que aparece entre cargas y entre corrientes; la nuclear fuerte es la que mantiene a los protones dentro del núcleo, haciendo a éste estable frente a la fuerza de repulsión electromagnética, y la nuclear débil, actúa entre partículas elementales, regula algunas desintegraciones radiactivas, en particular la desintegración β, y controla la velocidad de algunas reacciones nucleares.

El alcance de las fuerzas gravitacionales y electromagnéticas es infinito y su módulo varía inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. La nuclear

fuerte sólo está presente dentro del núcleo y su alcance es del tamaño de éste, aproximadamente 10^{-15} m , la nuclear débil tiene un alcance aún menor, de unos 10^{-16} m (Tabla 8.3).

Tabla 8.3. Características de las fuerzas elementales.

	Gravitacional	Electromagnética	Nuclear fuerte	Nuclear débil
Interacción	Entre masas	Entre cargas y entre corrientes	Retiene a los protones en el núcleo	Regula reacciones nucleares y la desintegración β
Alcance	Infinito	Infinito	10^{-15} m	10^{-16} m
Intensidad relativa	10^{-38}	10^{-2}	1	10^{-5}

En cuanto a su intensidad, la de mayor valor es la fuerza nuclear fuerte y, tomándola como referencia, la electromagnética tendría un valor 10^{-2} del de aquél; la nuclear débil, 10^{-5}, y la gravitacional, 10^{-38}. La gravitacional, a pesar de ser la de menor intensidad, es la que presenta efectos macroscópicos más intensos, porque las fuerzas nucleares tienen alcances muy pequeños y porque los cuerpos en la naturaleza son eléctricamente neutros.

Los diferentes tipos de fuerzas que han ido conociéndose, han seguido un proceso de unificación. Newton, con su ley de la gravitación universal, unificó la ley de la gravitación terrestre, por la cual la Tierra atrae los cuerpos materiales hacia ella con la fuerza gravitacional celeste, por la cual se atraen los diferentes astros y planetas. El desarrollo del electromagnetismo unificó las fuerzas eléctricas y las magnéticas. En 1970, al parecer de forma independiente, Weinberg y Salam, demostraron que tanto la fuerza electromagnética como la nuclear débil podían ser explicadas en base a otra fuerza más elemental, que llamaron *electrodébil* lo que fue confirmado experimentalmente en 1980.

Los esfuerzos investigadores se dirigen a conseguir la unificación total de todos los tipos de fuerzas en una única fuerza elemental, lo que exigirá la unificación de la fuerza electrodébil, la nuclear fuerte y la gravitacional.

8.10 Concepto de trabajo

Consideremos una fuerza **F** cuyo punto de aplicación se desplaza siguiendo una curva definida por el vector posición **r**. Durante un tiempo elemental dt, el punto de aplicación de la fuerza realiza un desplazamiento elemental sobre la curva, dr, definiéndose el *trabajo elemental*, realizado por la fuerza **F** en ese desplazamiento elemental, mediante la expresión:

$$dW = \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} \qquad [8.8]$$

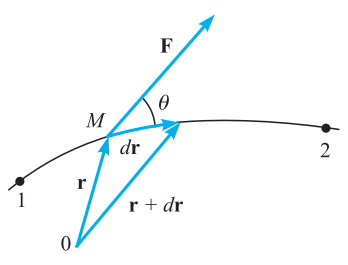


Figura 8.13.

El trabajo total realizado por la fuerza al desplazar su punto de aplicación desde una posición 1, hasta otra 2, será:

$$W = \oint_1^2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$$

Si el ángulo que forman las direcciones del desplazamiento y de la fuerza es θ, el trabajo elemental se expresa:

$$dW = F \cos\theta \, dr = F_d \, dr$$

es decir, es igual al desplazamiento elemental por la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento. Si la fuerza es normal al desplazamiento, evidentemente, el trabajo realizado será nulo.

En función de las componentes de la fuerza, $\mathbf{F}(F_x, F_y, F_z)$, y del desplazamiento elemental, $dr(dx, dy, dz)$, la [8.8] se escribe:

$$dW = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz \qquad [8.9]$$

El *trabajo total* realizado por la fuerza al desplazar su punto de aplicación a lo largo de la curva C, desde la posición 1 a la 2, es:

$$W = \oint_1^2 \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = \oint_1^2 \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \int (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz) \qquad [8.10]$$

En el caso más general, la fuerza $\mathbf{F}$ puede ser función de la posición del punto M, de su velocidad y del tiempo. Si se conoce la ley del movimiento de M, podemos expresar en función de t su posición y su velocidad, y $\mathbf{F}$ será únicamente función del tiempo, lo que permite, teniendo en cuenta que son $dx = \dot{x}\,dt$, $dy = \dot{y}\,dt$ y $dz = \dot{z}\,dt$, expresar la [8.9] como integral simple definida:

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(t)\cdot\mathbf{v}(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} [F_x(t)\dot{x} + F_y(t)\dot{y} + F_z(t)\dot{z}]\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \phi(t)\,dt$$

Un caso particular es aquél en el cual la fuerza es función del arco y, expresando, también la curva en función de éste, el trabajo total desde una posición 1 a otra 2, es:

$$W = \oint_{s_1}^{s_2} \mathbf{F}(s)\cdot\mathbf{T}(s)\,ds = \oint_{s_1}^{s_2} \varphi(s)\,ds$$

lo que nos indica que el trabajo depende únicamente del camino seguido para pasar de 1 a 2.

Unidad de trabajo: julio

Definiremos la *unidad de trabajo como el trabajo realizado por la unidad de fuerza que*, *manteniéndose constante*, *desplaza su punto de aplicación*, *la unidad de longitud*, *en su propia dirección y sentido*. En el sistema internacional el trabajo se expresará en newtons por metro, unidad que se denomina *julio* (J). Las dimensiones de un trabajo serán las de una fuerza multiplicadas por una longitud:

$$[W] = [F]L = L^2MT^{-2}$$

Ergio

En el sistema C.G.S. la unidad de trabajo es la dina por centímetro y se denomina *ergio*. Recordando la equivalencia entre el newton y la dina, obtenemos fácilmente la equivalencia entre el julio y el ergio:

$$1\ \text{J} = 1\ \text{N}\cdot\text{m} = 10^5\ \text{din}\cdot 10^2\ \text{cm} = 10^7\ \text{erg}$$

Kilográmetro

El sistema técnico emplea como unidad de trabajo el *kilográmetro* (kgm) *o kilopondímetro* (kpm), *que es el trabajo realizado por un kilogramo-fuerza que*, *permaneciendo constante*, *desplaza su punto de aplicación un metro en su propia dirección y sentido*. Su equivalencia con el julio se deduce así:

$$1\ \text{kgm} = \text{kgf}\cdot\text{m} = g_0\ \text{Nm} = g_0\ \text{J}$$

EJEMPLO 8.4

Calculemos el trabajo que debe realizar un excursionista, que transporta una mochila de $m = 12$ kg, con velocidad constante, para elevarla $h = 100$ m siguiendo una rampa que forma con el plano horizontal un ángulo θ (Figura 8.14).

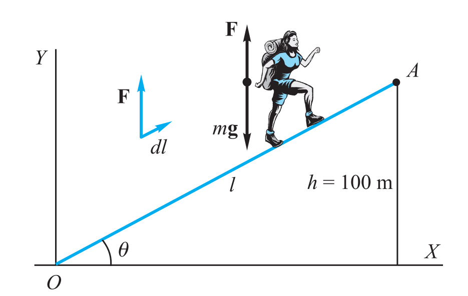


Figura 8.14.

Solución:

Las fuerzas que actúan sobre la mochila son $m\mathbf{g}$ y la realizada por el excursionista $\mathbf{F}$. Como la velocidad es constante, debe verificarse:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F} = 0$$

de donde $\mathbf{F} = -m\mathbf{g} = mg\mathbf{j}$ y $F = mg = 12 \text{ kg} \times 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 117{,}6$ N.

El trabajo realizado por el excursionista es:

$$W = \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_0^l F\,\mathbf{j} \cdot (\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j})\,dl = \int_0^l F \operatorname{sen}\theta\,dl = F \operatorname{sen}\theta\, l = Fh = 11\,760 \text{ J}$$

Hay que hacer notar que el trabajo sólo depende de la altura h y no del ángulo θ que forme la rampa, ni del camino seguido.

El trabajo realizado por las fuerzas de la gravedad será igual y de signo contrario, ya que es $m\mathbf{g} = -\mathbf{F}$:

$$W_g = \int m\mathbf{g} \cdot \mathbf{dr} = \int -\mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = -W$$

En definitiva, el trabajo total realizado sobre la mochila por todas las fuerzas que actúan sobre ella es nulo.

EJEMPLO 8.5

Un bloque de masa m se desplaza sobre una rampa que forma un ángulo θ con el plano horizontal, ejerciéndose sobre él una fuerza $\mathbf{F}$ paralela al plano de la rampa. El coeficiente de rozamiento al deslizamiento entre el bloque y el plano de la rampa es μ. Sabiendo que el desplazamiento se ha realizado a velocidad constante a lo largo de una distancia l, calculemos el valor de la fuerza $\mathbf{F}$ y el trabajo realizado por ésta.

Solución:

Las fuerzas que actúan sobre el bloque se han indicado en la Figura 8.15. La ecuación fundamental de la Dinámica se expresa:

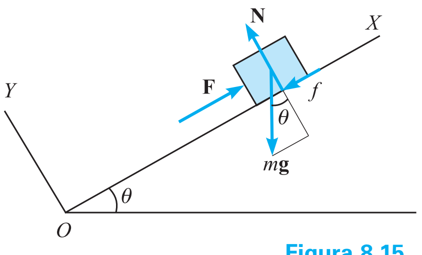


Figura 8.15.

$$m\mathbf{a} = (F - f - mg \operatorname{sen}\theta)\mathbf{i} + (N - mg\cos\theta)\mathbf{j}$$

Puesto que la velocidad es constante, la aceleración debe ser nula:

$$F - f - mg\operatorname{sen}\theta = 0 \quad \text{y} \quad N = mg\cos\theta$$

La fuerza de rozamiento será $f = \mu N = \mu mg\cos\theta$ y, con ello, la fuerza $\mathbf{F}$ se expresa:

$$\mathbf{F} = mg(\operatorname{sen}\theta + \mu\cos\theta)\,\mathbf{i}$$

El trabajo realizado por esta fuerza es:

$$W = \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int mg(\operatorname{sen}\theta + \mu\cos\theta)\,dx = mgl(\operatorname{sen}\theta + \mu\cos\theta)$$

EJEMPLO 8.6

Una partícula cuyo vector posición es:

$$\mathbf{r} = 3\cos\frac{\pi t}{6}\,\mathbf{i} + 3\operatorname{sen}\frac{\pi t}{6}\,\mathbf{j}$$

está atraída por el eje OY con una fuerza proporcional a su distancia a este eje, siendo la constante de proporcionalidad $K = 6$. Calculemos el trabajo realizado por la fuerza desde los instantes $t = 0$ a $t = 3$, sabiendo que todas las unidades están en el S.I. (Figura 8.16).

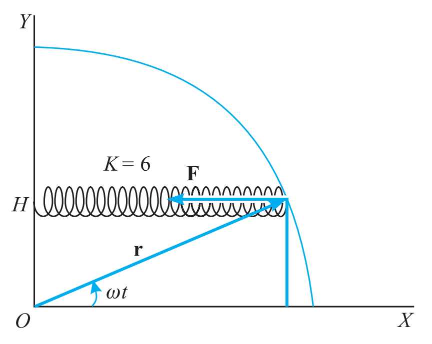


Figura 8.16.

Solución:

La fuerza sobre la partícula se expresa

$$\mathbf{F} = -18\cos\pi\frac{t}{6}\,\mathbf{i} \quad \text{y} \quad \mathbf{dr} = \mathbf{v}\,dt = \left(-\operatorname{sen}\pi\frac{t}{6}\,\mathbf{i} + \cos\pi\frac{t}{6}\,\mathbf{j}\right)\pi/2\,dt$$

El trabajo elemental realizado será

$$dW = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\,dt = 9\,\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\pi\,\frac{t}{3}\,dt$$

que integrado entre 0 y 3 da:

$$W \equiv \frac{9\pi}{2}\left[-\frac{3}{\pi}\cos\frac{\pi t}{3}\right]_0^3 = 27\text{ J}$$

EJEMPLO 8.7

Una partícula describe la curva $\mathbf{r} = R\left(\cos\frac{s}{R}\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\frac{s}{R}\,\mathbf{j}\right)$. Sobre ella actúa una fuerza proporcional al arco recorrido y siempre tangente a la trayectoria, siendo la constante de proporcionalidad $C = 4$. Calculemos el trabajo realizado por esta fuerza desde la posición $s = 0$ hasta $s = \pi R/2$ (Figura 8.17).

Figura 8.17.

Solución:

La expresión de la fuerza es $\mathbf{F} = 4s\,\mathbf{T}$ y la del desplazamiento, $\mathbf{dr} = ds\,\mathbf{T}$, con lo cual el trabajo elemental realizado es:

$$dW = 4s\,ds$$

y, al integrar para todo el recorrido, resulta:

$$W = \int_0^{\pi R/2} 4s\,ds = 4\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^{\pi R/2} = \pi^2 R^2$$

8.11 Trabajo de rotación

Consideremos un cuerpo rígido que puede girar alrededor de un eje fijo, que tomaremos como eje de las zetas, y sea $\mathbf{w} = w\mathbf{k}$ el vector que define la rotación. Si en el punto A del sólido actúa una fuerza $\mathbf{F}(F_x, F_y, F_z)$, veamos cuál es el trabajo producido por ésta al realizar un giro infinitesimal el cuerpo (Figura 8.18).

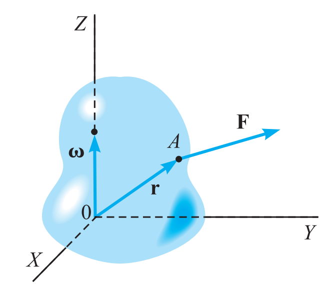


Figura 8.18.

El desplazamiento del punto A será: $\mathbf{dr} = \mathbf{v}\,dt = (\mathbf{w} \times \mathbf{r})\,dt$ y el trabajo elemental realizado por esta fuerza es:

$$dW = \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \mathbf{F} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\,dt = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})\,dt = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})\,d\theta = \mathbf{M}o \cdot \mathbf{d}\theta = M_E d\theta \qquad [8.11]$$

El trabajo elemental realizado por una fuerza cuyo punto de aplicación gira alrededor de un eje es igual al producto del momento axial de esa fuerza respecto al eje de giro por el ángulo elemental descrito.

Si sobre el cuerpo actúan una serie de fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_n$, en los puntos cuyos vectores de posición son, respectivamente, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, ..., $\mathbf{r}_n$, el trabajo elemental producido en un giro infinitesimal es:

$$dW = \sum dW_i = \sum \mathbf{M}_o(\mathbf{F}_i) \cdot d\boldsymbol{\theta} = \mathbf{M}_o \cdot d\boldsymbol{\theta} = M_e\, d\theta$$

es decir, es igual al momento resultante en un punto del eje de rotación multiplicado escalarmente por el vector desplazamiento elemental angular.

En una rotación finita, el trabajo está dado por la integral:

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathbf{M} \cdot d\boldsymbol{\theta} \qquad [8.12]$$

definida entre las dos posiciones o los dos instantes considerados.

8.12 Potencia

Se define la *potencia* como la derivada del trabajo respecto al tiempo, o bien, como el trabajo producido o consumido en la unidad de tiempo:

$$P = dW/dt \qquad [8.13]$$

Esta expresión puede transformarse así:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \qquad [8.14]$$

y la potencia se expresa como el producto escalar de la fuerza por la velocidad de su punto de aplicación.

Las dimensiones de la potencia son: $[P] = ML^2T^{-3}$.

Unidad de potencia: vatio

La *unidad de potencia*, de acuerdo con [8.13], se define como la *potencia de una fuerza que realiza la unidad de trabajo en la unidad de tiempo*. En el S.I. la unidad se denomina *vatio* (W) y es la potencia de una máquina que realiza, o consume, un trabajo de un julio cada segundo. En el sistema C.G.S. la unidad es el ergio por segundo, que no tiene nombre específico.

Caballo de vapor (CV)

En el sistema técnico la unidad es el kilográmetro por segundo o kilopondímetro por segundo. Usualmente suele emplearse el caballo de vapor (C. V.), cuyo valor es de 75 kpm/s y cuya equivalencia con el vatio es:

$$1 \text{ C.V.} = 75 \text{ kpm/s} = 75\ g_0 \text{ J/s} = 75\ g_0 \text{ W} = 735{,}498\ 75 \text{ W}$$

Horsepower (hp)

El sistema inglés usa como unidad de potencia el *Horsepower* (hp), cuya equivalencia es:

1 hp = 550 ft. lb/s <> 746 w

Esta unidad fue establecida por Watt (1736-1819) para medir la potencia de su nuevo ingenio, la máquina de vapor, y lo hizo por comparación con el trabajo realizado por un buen caballo durante un día. Parece ser que obtuvo para éste la potencia de 360 ft.lb/s y estableció que su ingenio desarrollaba una potencia de 1,5 de la correspondiente al caballo.

Kilovatio-hora

Hay que hacer notar que el kilowatio-hora no es unidad de potencia, sino de trabajo; *es el trabajo realizado por una máquina de 1 kW de potencia funcionando durante una hora*. Su valor en julios es:

$$1 \text{ kW-h} = 10^3 \text{ W} \cdot 3\,600 \text{ s} = 36 \times 10^5 \text{ J}$$

En un movimiento de rotación, utilizando la Expresión [8.11] del trabajo, podemos obtener la potencia aplicando la [8.13]:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{M_E d\theta}{dt} = M_E \omega \qquad (8.15)$$

es decir, es el producto del momento axial de la fuerza respecto al eje de giro por la velocidad angular de rotación.

EJEMPLO 8.8 Potencia de un coche

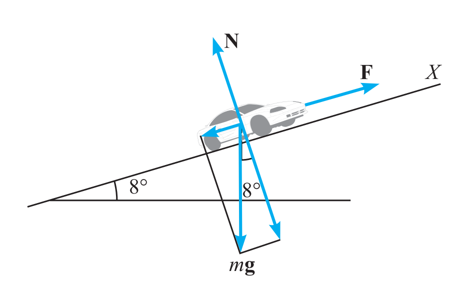


Figura 8.19.

Un coche sube una rampa recta de pendiente 8° y longitud 600 metros (Figura 8.19). El peso del coche es de 1 400 kg. Despreciando las fuerzas de rozamiento, calculemos la potencia que debe desarrollar el motor en los siguientes casos:

1.° Para subir la rampa con velocidad constante en un tiempo de 27 segundos.
2.° Para subir la rampa con aceleración constante, sabiendo que al comienzo de ella la velocidad era de 60 km/h y ha tardado 21 segundos.
3.° La potencia que está dando al llegar al final de la rampa y la velocidad con la que llega.

Solución:

1.° Las fuerzas que actúan sobre el coche son la gravedad, $m\mathbf{g}$, la reacción normal del suelo, **N**, y la fuerza que ejerce el motor, **F**. La ecuación de la Dinámica es:

$$ma\,\mathbf{i} = \mathbf{F} + m\mathbf{g} + \mathbf{N} = F\,\mathbf{i} - mg\,\text{sen}\,8^\circ\,\mathbf{i} + (N - mg\cos 8^\circ)\,\mathbf{j}$$

Puesto que el coche no se mueve en la dirección OY debe ser $N = mg\cos 8^\circ = 13\,586{,}48$ N y la ecuación del movimiento:

$$ma = F - mg\,\text{sen}\,8^\circ = F - 1\,909{,}455 \qquad (1)$$

Al subir el coche con velocidad constante es $a = 0$ y $F = 1\,909{,}455$ N. La velocidad constante del coche es $v = 600/27 = 200/9$ m/s y la potencia que desarrolla es:

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 1\,909{,}455 \times 200/9 = 42\,432{,}33 \text{ W} = 57{,}69 \text{ CV}$$

2.º Al ser ahora el movimiento uniformemente acelerado es:

$$v = a\,t + v_o \qquad \text{y} \qquad e = 1/2at^2 + v_o t$$

Particularizando la última ecuación para las condiciones del problema, $600 = \frac{1}{2}\,441\,a + 50/3$ de donde la aceleración es $a = 1{,}134$ m/s^2.

La potencia instantánea es

$$P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = m(a + 1{,}3639)\cdot(at + 50/3) =$$
$$= 1\,400\,(1{,}134 + 1{,}3639)\cdot(1{,}134\,t + 50/3) =$$
$$= 3\,965{,}66t + 58\,284{,}25 \text{ W} = 5{,}392\,t + 79{,}24 \text{ CV}$$

3.º Al final de la rampa llega en el instante $t = 21$ s, luego la potencia que está dando en ese momento es:

$$P_f = 5{,}392 \times 21 + 79{,}24 = 192{,}47 \text{ CV}$$

La velocidad con la que llega al final de la rampa es:

$$v = 1{,}134 \times 21 + 50/3 = 40{,}48 \text{ m/s} = 145{,}73 \text{ km/h}$$

8.13 Potencial. Función de fuerzas

Cuando en una región del espacio existen fuerzas función unívoca del punto se dice que en esa región existe un campo de fuerzas. Para cada punto (x, y, z) existirá una única fuerza $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$.

Si en un campo de fuerzas el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}$, al desplazarse desde una posición 1 a otra 2, es independiente del camino seguido, es decir, depende únicamente de la posición inicial y final, se dice que el campo de fuerzas tiene *potencial* o que deriva de un potencial. Para que esto suceda debe existir una función U, que denominaremos potencial, tal que verifique:

$$dU = -(F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz) = -dW \qquad [8.16]$$

ya que, así, de la ecuación [8.10] se obtiene:

$$W = -\int_1^2 dU = U(1) - U(2) \qquad [8.17]$$

El trabajo efectuado por las fuerzas del campo, para desplazarse desde una posición inicial 1 *hasta otra final* 2, *es igual a la diferencia entre el valor del potencial en la posición inicial y en la final*. Evidentemente, a lo largo de cualquier trayectoria cerrada el trabajo será nulo. El signo negativo de la ecuación [8.16] es debido al convenio de signos adoptado, según el cual, el trabajo producido por las fuerzas del campo se considerará positivo y el trabajo realizado en contra de las fuerzas del campo, negativo.

El potencial será función unívoca de la posición, $U = U(x, y, z)$; en cada punto el potencial toma un valor único y su diferencial total es:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy + \frac{\partial U}{\partial z}\,dz$$

que al identificarse con [8.16] da:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \tag{8.18}$$

lo que permite escribir **F** en función del potencial:

$$\mathbf{F} = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j} + F_z\,\mathbf{k} \tag{8.19}$$

Definiendo un nuevo ente, que denominaremos *gradiente de una función*, mediante la expresión:

$$\mathbf{grad}\,U = \frac{\partial U}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\,\mathbf{k} \tag{8.20}$$

la fuerza del campo en un punto resulta ser igual y opuesta al gradiente del potencial en ese punto:

$$\mathbf{F} = -\mathbf{grad}\,U \tag{8.21}$$

En muchos casos, se utiliza la función $V = -U$, a la que se denomina *función de fuerzas* y en función de la cual es $\mathbf{F} = \mathbf{grad}\,V$.

Superficies equipotenciales

Se llama *superficie equipotencial* al lugar geométrico de los puntos en los que el potencial toma un mismo valor:

$$U(x, y, z) = a \tag{8.22}$$

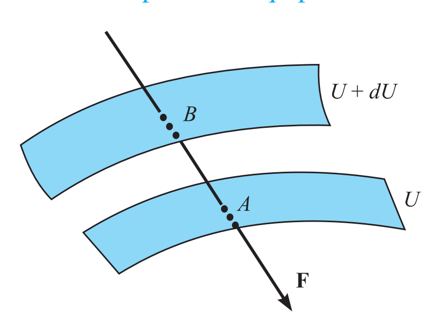


Figura 8.20.

Esta familia de superficies de parámetro a no puede tener puntos comunes, pues ello supondría que en un mismo punto del espacio el potencial toma valores distintos.

Según [8.17], el trabajo realizado en un desplazamiento cualquiera sobre una superficie equipotencial es nulo, puesto que el potencial es el mismo en todos sus puntos. En consecuencia, *la fuerza del campo en cada punto debe ser normal a la superficie equipotencial que pasa por ese punto*. De lo que se deduce que el *gradiente de una función en un punto es normal a la función en ese punto*.

Si hacemos el desplazamiento elemental siguiendo la normal común a dos superficies equipotenciales U y $U + dU$, el trabajo es positivo si vamos de la de mayor potencial a la de menor y negativo, en el caso contrario (Figura 8.20):

$$W_{BA} = U(B) - U(A) = U + dU - U = dU$$
$$W_{AB} = U(A) - U(B) = U - (U + dU) = -dU$$

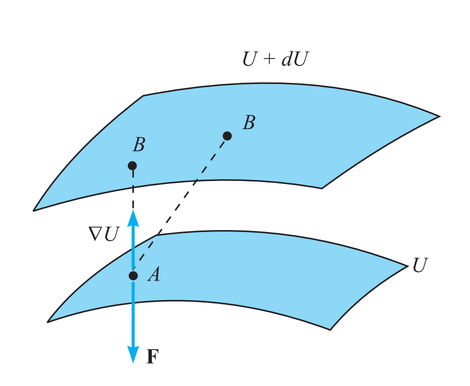


Figura 8.21.

lo que nos indica que *el sentido de la fuerza del campo es el de los potenciales decrecientes* y el gradiente del potencial seguirá el sentido de los potenciales crecientes.

Al pasar de un punto A de la superficie equipotencial de potencial U a otro cualquiera B de la superficie equipotencial de potencial $U + dU$ (Figura 8.21), la variación de potencial es siempre la misma, dU. Esta variación será tanto más rápida cuanto menor sea el camino recorrido desde A a B, es decir, la variación más rápida se obtiene cuando B pertenece a la normal a la superficie U en A, y esta dirección es la del gradiente de U. Por tanto, *el gradiente de una función en un punto tiene la dirección de la máxima variación de la función a partir de ese punto*.

Simbólicamente, la [8.20] puede escribirse como $\mathbf{grad}\,U = \boldsymbol{\nabla} U$, siendo:

$$\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{k} \tag{8.23}$$

Vector nabla

vector simbólico que se denomina **nabla**.

Si el campo deriva de un potencial será $\mathbf{F} = -\nabla U$ y el producto vectorial de nabla por **F**, que denominaremos *rotacional* de **F**, es nulo:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times (-\mathbf{VU}) = 0$$

lo que constituye la condición necesaria para que el campo tenga potencial, y se desdobla en las tres escalares:

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z} \quad ; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

Estas condiciones son suficientes puesto que, si se verifican, hacen que sea $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, lo que exige que sea $\mathbf{F} = \nabla V$ y el campo potencial.

Superposición de campos

Si en una región del espacio están definidos dos campos potenciales, el campo resultante en un punto de esta región es la suma de ambos:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

Veamos cómo el campo resultante también es potencial y su potencial es la suma de los potenciales de los dos campos. Teniendo en cuenta el carácter lineal del operador ∇, se expresa:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -\nabla U_1 - \nabla U_2 = -\nabla(U_1 + U_2) = -\mathbf{V}U$$

siendo:

$$U = U_1 + U_2$$

Líneas del campo

Se definen las *líneas del campo* como aquellas *líneas que en cada punto son tangentes al vector campo en ese punto*. En estas líneas el vector diferencial de arco $\mathbf{dr}\,(dx, dy, dz)$ en cada punto debe ser paralelo al vector campo en ese punto, lo que se expresa:

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}$$

que son las ecuaciones diferenciales de las líneas del campo.

Si el campo tiene potencial, se expresan:

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial U}{\partial x}} = \frac{dy}{\dfrac{\partial U}{\partial y}} = \frac{dz}{\dfrac{\partial U}{\partial z}}$$

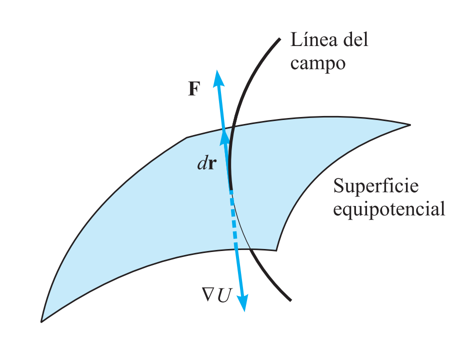


Figura 8.22.

EJEMPLO 8.9 Potencial de las fuerzas elásticas

Un ejemplo típico de fuerzas elásticas son las ejercidas por un muelle, las cuales, dentro del limite elástico, son proporcionales a los alargamientos o acortamientos, expresándose como ya hemos indicado, que para el muelle de la Figura 8.23 es:

$$\mathbf{F} = -kx\mathbf{i}$$

siendo k la constante elástica del muelle. Obviamente, para esta fuerza es $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ y existirá potencial, el cual deberá verificar:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = kx \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

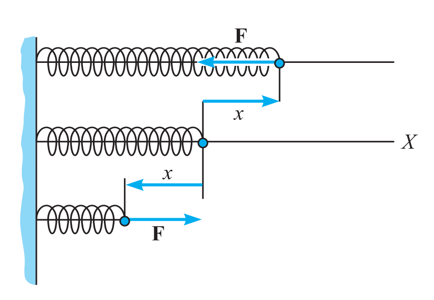


Figura 8.23.

es decir, el potencial no depende ni de y ni de z, únicamente de x, por tanto, es:

$$U = -\frac{1}{2}kx^2 + U_0$$

Cuando el muelle está en su estado natural, ni alargado ni acortado, $x = 0$, no almacena energía potencial elástica, por lo que debe ser $U_0 = 0$, y el *potencial de las fuerzas elásticas* será:

$$U = -\frac{1}{2}kx^2 \qquad [8.24]$$

Las superficies equipotenciales tienen por ecuación:

$$x = \sqrt{\frac{2U_1}{k}}$$

por tanto, son planos normales al eje del muelle.

EJEMPLO 8.10 Potencial gravitacional

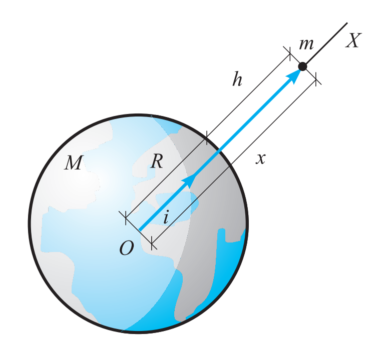


Figura 8.24.

Consideremos una masa m a la distancia x del centro de la Tierra (Figura 8.24). La fuerza de atracción sobre ella es:

$$\mathbf{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\mathbf{u}_r = -G\frac{Mm}{x^2}\mathbf{i}$$

en la que hemos elegido el origen O en el centro de la Tierra y el eje OX, que pasa por la masa. Como fácilmente se puede comprobar, $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ y existe función potencial, que debe verificar:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -G\frac{Mm}{x^2} \quad ; \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad ; \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

El potencial únicamente será función de x y verificará:

$$\frac{dU}{dx} = G\frac{Mm}{x^2}$$

cuya integración es:

$$\int_{U_s}^{U} dU = GMm\int_{R}^{x}\frac{dx}{x^2}$$

$$U - U_s = GMm\left[-\frac{1}{x}\right]_R^x = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{x}\right) \qquad [8.25]$$

En función de la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre, $g_1R^2 = GM$, se expresa:

$$U - U_s = mg_1R^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{x}\right) = mg_1R\,\frac{x - R}{x}\;mg_1R\,\frac{h}{R + h} = mg_1\frac{h}{1 + \dfrac{h}{R}}$$

fórmula en la que h es la distancia de la masa a la superficie de la Tierra. Para puntos próximos a la superficie terrestre, $h << R$ es $h/R << 1$ y puede expresarse:

$$U - U_s = mg_1 h$$

Si tomamos como potencial nulo el correspondiente a la superficie de la Tierra, debemos hacer en las expresiones anteriores $U_s = 0$.

Las superficies equipotenciales tiene por ecuación:

$$x = \frac{mg_1 R^2}{mg_1 R - U_1} = \text{cte.}$$

lo que indica que son superficies esféricas de centro el de la Tierra y radio de valor x función del potencial.

EJEMPLO 8.11

Sea el campo de fuerzas:

$$\mathbf{F} = -2x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z/8\mathbf{k}$$

Veamos si el campo es o no potencial:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\dfrac{x}{2} & -y & -\dfrac{z}{32} \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, el campo es potencial y deben verificarse las relaciones [8.18], las cuales nos van a permitir calcular el potencial:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = y \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{z}{8}$$

De la primera se deduce que el potencial es de la forma $U = x^2 + f(y, z)$. Para que cumpla la segunda, debe ser:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y$$

y, por tanto, la función f es de la forma:

$$f = \frac{1}{2}y^2 + g(z)$$

Con esto, el potencial se expresa:

$$U = x^2 + \frac{1}{2}y^2 + g(z)$$

Obligaremos ahora a que cumpla la tercera relación, lo que da:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{dg}{dz} = \frac{z}{32}$$

de donde $g = z^2/16 +$ cte. y, con ello, el potencial resulta:

$$U = x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{16}z^2 + \text{cte.}$$

Si se toma como origen de potenciales el punto (0, 0, 0), resulta:

$$U = x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{16}z^2$$

La ecuación de las superficies equipotenciales es:

$$x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{16} = a$$

que escrito de la forma:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{2a} + \frac{z^2}{16a} = 1$$

pone de manifiesto que es un elipsoide cuyos ejes son los del sistema de referencia, siendo el valor de sus semiejes $\sqrt{a}$, $\sqrt{2a}$ y $4\sqrt{a}$.

Las ecuaciones diferenciales de las líneas del campo son:

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{y} = \frac{8dz}{z}$$

La integración de la primera da $1/2 \ln x = \ln y + \ln C_1 = \ln C_1 y$, de donde $x = Cy^2$, que son paraboloides de eje paralelo a OZ.

La integración de la segunda da $\ln y = 8 \ln z + \ln C_2 = \ln C_2 z^8$, de donde $y = C' z^8$, que son superficies regladas de generatriz paralela a OX. La intersección de ambas superficies nos da las ecuaciónes de las líneas del campo.



GALILEO

Galileo nació en 1564, en Pisa (Toscana). A los 17 años comenzó sus estudios de Medicina, pero su verdadera vocación fueron las Matemáticas y la Filosofía natural. Estudió matemáticas, primero de forma particular, siendo su tutor Ricci, y luego en la Universidad de Pisa. A los 20 años ya escribió algunos trabajos, ampliando los de Arquímedes sobre centros de gravedad, y a los 22 publicó *La Bilancetta*, donde describe una balanza hidrostática y su uso para conocer la proporción de oro o plata en los cuerpos. A los 25 años era profesor de Matemáticas en Pisa. Aquí conoció la teoría aristotélica del movimiento, a la que se opuso, manteniendo que todos los cuerpos, independientemente de su densidad, caen con la misma velocidad en el vacío. Realizó múltiples experiencias para su comprobación, siendo decisiva su experiencia en la que cuerpos de diferente densidad caían rodando por un plano inclinado, para la que estableció: «en tiempos iguales ocupan posiciones iguales»; también concluyó que «en el vacío todos los cuerpos, independientemente de su peso y forma, son uniformemente acelerados de la misma manera y su distancia recorrida es proporcional al cuadrado del tiempo empleado», todo lo cual publicó en su libro *De Motu (Sobre el movimiento).*

En 1592 fue nombrado profesor de la Universidad de Padua (República de Venecia), donde reinaba un espíritu fuertemente euclídeo y geocéntrico. Sin embargo, en una carta a Kepler, en 1598, ya manifiesta a éste su inclinación hacia el sistema de Copérnico.

En 1599 se unió a Marina Gamba y tuvo tres hijos: dos hijas, Virginia y Livia, y un hijo, Vincenzio. Las dos hijas profesaron como monjas en el convento de San Mateo, próximo a Arcetrio, con los nombres de Sor María Celeste y Sor Arcángela, respectivamente. Su hija María Celeste mantuvo siempre gran contacto con su padre a través de mas de 120 cartas que aún se conservan.

En 1602, descubre que el periodo de un péndulo no depende del arco descrito y explica el isocronismo en una carta dirigida a su amigo Santorio, médico en Venecia, el cual comenzó a usar un péndulo *pulsilogium*, para medir el pulso de sus pacientes.

En 1603 construye el primer termómetro basado en la dilatación del aire y, en 1609, parece que conoce la existencia de un catalejo que ha construido Dutch en Venecia y se dedica a la construcción de telescopios al objeto de observar el firmamento.

En 1610, la familia Medici le lleva a su corte de Venecia. Haciendo uso de sus telescopios realiza una serie de descubrimientos astronómicos que publicó con el título *Sidereus Nuncius (Mensajes de las estrellas)*, que causó enorme sensación y en el cual dice haber visto montañas en la Luna, que la Via Láctea está formada por infinidad de estrellas y que Júpiter tiene cuatro satélites. En 1613 observa que Venus tiene fases análogas a las de la Luna, pero que su órbita se realiza alrededor del Sol. Aunque un astrónomo tan famoso como Tycho Brahe defendiera que si bien Venus y otros planetas pueden girar alrededor del Sol, todo el conjunto puede a su vez girar alrededor de la Tierra, Galileo cada vez es más partidario de la teoría de Copérnico.

En 1616, parece ser que, de forma particular, se le recomienda que no defienda la teoría copernicana, contraria a la interpretación que algunos religiosos hacen de las Sagradas Escrituras. Galileo, en una carta dirigida a Castelli, indica a éste que «las Escrituras no se han escrito para conocer cómo se mueve el cielo, sino para llevarnos al Cielo» y sigue buscando pruebas que demuestren su teoría. Así, en su *Dialogo sobre las mareas*, mantiene que la Tierra no puede tener solamente el movimiento de rotación alrededor de su eje polar, pues este único movimiento no sería capaz de provocar las mareas. Para su explicación, defendió la necesidad de que la Tierra girara alrededor del Sol, ya que esto haría moverse las partículas de agua respecto a la Tierra, pues cuando están en la posición más alejada del Sol, las velocidades lineales debidas a las dos rotaciones se suman y, cuando están en la posición más próxima, se restan. Razonamiento plausible pero erróneo, ya que Galileo no conocía la existencia de la gravitación universal.

En 1624 obtiene la confianza del Papa Urbano VIII, que le permitió desarrollar sus trabajos sobre el sistema de Copérnico en todo lo que se refiriera a su estudio matemático. Pero, en 1632, publicó, en Florencia, su *Diálogo acerca de los dos grandes sistemas mundiales*, *el de Ptolomeo y el de Copérnico*, en el cual defendía con todo tipo de argumentos el sistema heliocéntrico, mofándose de algún religioso que mantenía opinión contraria a la suya, tachándole de ignorante y vanidoso. Ese mismo año fue denunciado ante el Tribunal de la Inquisición y considerado sospechoso de herejía, por lo cual fue confinado en su villa de Arcetri (Florencia) con prohibición de publicar. Allí, siguió trabajando rodeado de discípulos y amanuenses y, en 1638, publicó en Leiden (Países Bajos) su *Discurso sobre las dos nuevas ciencias*, en el cual desarrolla su teoría sobre el movimiento y sobre la resistencia de los materiales. Murió en su villa de Arcetri, en 1642.

NEWTON

Isaac Newton, nació en Woolsthorpe, villa próxima a Grantham, en Lincolnshire. Como fecha de nacimiento se suele dar la del 25 de diciembre de 1642, pero se debe tener en cuenta que el Calendario Gregoriano no fue aceptado en Inglaterra hasta 1752 y, en consecuencia, su fecha de nacimiento referida a este calendario, que es el actualmente vigente, es la del 4 de enero de 1643. No conoció a su padre, que murió tres meses antes de su nacimiento. Su madre se casó de nuevo cuando él tenía dos años y fue criado en casa de su abuela materna, asistiendo a la escuela en Grantham. Enseguida demostró su gran talento y su tio William, hermano de su madre, decidió prepararle para su ingreso en la Universidad. El 5 de junio de 1661 fue admitido en el Trinity College de la Universidad de Cambridge. Su madre se desentendió de su financiación y Newton fue becario, actuando como sirviente de otros residentes, siendo, por otra parte, el mejor estudiante de la clase.

Por aquel tiempo, en el Trinity se impartía la filosofía de Aristóteles y Descartes, y la mecánica y astronomía de Copérnico, lo que ejerció una enorme influencia en la formación de Newton. Su talento matemático comienza a destacar con la llegada de Barrow como profesor de Matemáticas, pero en el verano de 1665, debido a la peste, se cierra la Universidad de Cambridge y Newton debe volverse a Lincolnshire. Aquí, se dedica al estudio de métodos analíticos que unifican formas de resolver problemas diversos, como hallar tangentes a curvas, áreas limitadas por curvas, longitudes de arcos, y máximos y mínimos de funciones, lo que parece ser precursor del posterior cálculo diferencial e integral de Leibniz. Al reabrirse la Universidad, en 1667, Newton se incorpora y, en 1669, es nombrado profesor de Matemáticas. Sin embargo, sus primeros trabajos fueron sobre óptica, al comprobar que un haz de luz solar, al atravesar un prisma, se descompone en una serie de haces coloreados. Newton argumenta que la luz solar es una mezcla de diferentes tipos de luces que son refractadas de diferente manera por el prisma y observa que esto es la causa de las aberraciones cromáticas que se producen en los telescopios que usan lentes de refracción, por lo cual propuso y construyó un telescopio por reflexión, que donó a la Royal Society, de la cual fue nombrado miembro, en 1672. No intuyó la naturaleza ondulatoria de la luz a la que supuso corpuscular.

Parece ser que fue en los años 1665 y 1666, durante su estancia en Lincolnshire, cuando consideró que la misma fuerza que hacía caer la manzana era la que mantenía a la Luna alrededor de la Tierra, equilibrando a la fuerza centrífuga. En 1678, Newton sufrió su primera crisis nerviosa. Hooke, entre 1679 y 1680, según se deduce de sus cartas, le indujo a estudiar el problema del movimiento de un cuerpo bajo la acción de fuerzas centrales inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia. Así, cuando Halley, en 1684 le preguntó cómo sería la trayectoria de un planeta, si la fuerza ejercida por el Sol fuera inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, Newton le contestó inmediatamente: «una elipse». Halley quedó sorprendido y le preguntó cómo podía saberlo, a lo que Newton le replicó: «lo he calculado». Posteriormente, Newton le enviaría a Halley la solución matemática del problema.

Newton, temeroso de cometer errores, quizás por las fuertes críticas que habían tenido sus trabajos sobre óptica, tuvo que ser convencido por Halley para acabar sus trabajos sobre mecánica y publicarlos y, en 1687, se editó su obra cumbre: *Philosophiae Naturalis Principia Matemática*. En esta obra se establecen los principios de la Mecánica clásica, se identifica la gravitación como una fuerza universal y se aplica al estudio del movimiento de los seis planetas conocidos, de las mareas y sus variaciones, a la precesión de los ejes terrestres, y a la perturbación que ejerce el Sol en el movimiento de la Luna. En 1693, sufriría una segunda crisis nerviosa.

En 1701, la Universidad de Cambridge le eligió como uno de sus dos representantes en el Parlamento. En 1703 fue elegido Presidente de la Royal Society. En 1705 fue nombrado caballero. Newton nunca se casó, vivió modestamente y murió en 1727, siendo enterrado en la Abadía de Westminster.

Estática

CAPÍTULO



9.1 Estado de equilibrio

Se dice que un sistema material está en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas cuando éstas no modifican el estado de reposo o movimiento en que se encuentre, es decir, no le imprimen aceleración alguna, $\mathbf{a} = 0$.

Llamaremos *sistema material* a la porción de universo objeto de nuestro estudio, diciendo que es *rígido*, cuando la distancia entre dos cualesquiera de sus puntos permanece constante, y *deformable*, en caso contrario.

De acuerdo con su definición cabe distinguir dos tipos de equilibrio: el *estático* y el *cinemático*. Se dice que un sistema material está en *equilibrio estático* bajo la acción de un sistema de fuerzas cuando éstas, si el sistema estaba inicialmente en reposo, lo mantienen en él, $\mathbf{a} = 0$ y $\mathbf{v} = 0$. Un sistema material está en *equilibrio cinemático* bajo la acción de un sistema de fuerzas cuando éstas conservan su estado de movimiento, $\mathbf{a} = 0$ y $\mathbf{v} = \text{cte}$. Posteriormente, estudiaremos un nuevo tipo de equilibrio, el *equilibrio dinámico*, en el cual tendremos en cuenta como una fuerza más a las llamadas *fuerzas de inercia*, $-m\mathbf{a}$. En este capítulo nos referiremos únicamente al equilibrio estático.

9.2 Tipos de fuerzas o acciones

Las fuerzas que actúan sobre un sistema material pueden tener naturaleza muy distinta. Una primera clasificación puede hacerse en dos grupos: *acciones de contacto* y *acciones a distancia*. Las primeras son aquéllas en las cuales el agente, para producir su acción sobre el sistema, debe estar en contacto con éste, ejerciéndose la acción sobre los mismos puntos de contacto. Así, por ejemplo, si un sistema recibe un impacto, la acción se ejerce únicamente durante el tiempo que están en contacto el sistema y el cuerpo que impacta. Las fuerzas de rozamiento estudiadas en el capítulo anterior son un ejemplo muy importante de acciones de contacto. Dentro de este apartado también debemos incluir las acciones ejercidas mediante barras, cables o muelles.

Las acciones a distancia son las que se ejercen sin necesidad de que el sistema y el cuerpo que las provoca estén en contacto. Así, tenemos la *acción gravitacional* (planeta-satélite), *acción eléctrica* (ámbar frotado-papelitos), *acción magnética* (imán-trozo de acero) y *acción electromagnética* (hilo conductor recorrido por una corriente-aguja imantada).

Atendiendo a la localización respecto al sistema de los cuerpos que producen las acciones, éstas se clasifican en *acciones interiores* y *acciones exteriores*, según que la causa de la acción pertenezca al sistema o sea exterior a él.

9.3 Equilibrio del punto material libre

El sistema material más sencillo es el *punto material*, que puede definirse como la *partícula de dimensiones suficientemente pequeñas para que pueda representarse por un punto geométrico*.

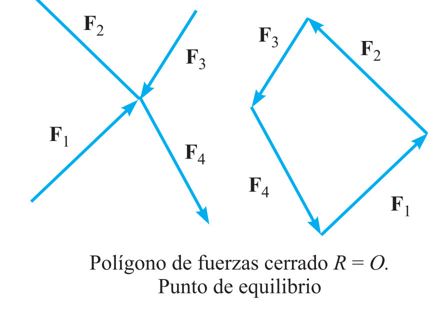
Si la partícula está en equilibrio es $\mathbf{a} = 0$ y, de acuerdo con la segunda ley de Newton, debe ser $\mathbf{F} = 0$. Es decir, la *condición necesaria* para el equilibrio del punto material es que *la resultante de las fuerzas que actúan sobre él sea nula*.

Recíprocamente, si la resultante de las fuerzas que actúan sobre el punto es nula, $\mathbf{F} = 0$, según la segunda ley de Newton, debe ser $\mathbf{a} = 0$ y el punto estará en equilibrio si inicialmente lo estaba, es decir, si inicialmente era $\mathbf{v} = 0$.

Por tanto, la condición de equilibrio $\mathbf{F} = 0$ es necesaria pero no suficiente, pues además hace falta que sea $\mathbf{v} = 0$.

La condición vectorial de equilibrio para el punto material libre, $\mathbf{F} = 0$, se desdobla en las tres escalares:

$$F_x = 0 \quad ; \quad F_y = 0 \quad ; \quad F_z = 0 \qquad [9.1]$$



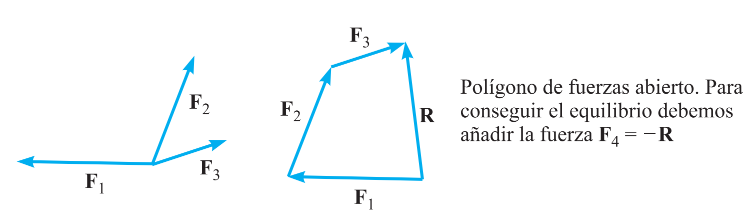
Polígono de fuerzas cerrado $R = O$.
Punto de equilibrio

Figura 9.1.

Si las fuerzas dependen de la posición, las [9.1] forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, que nos permite hallar las tres coordenadas de la posición de equilibrio o, si ésta es conocida, tres incógnitas cualesquiera.

En el caso de fuerzas coplanarias, el método gráfico puede dar una solución sencilla de los problemas de equilibrio del punto. Para ello, hallaremos la suma geométrica de las fuerzas que actúan sobre el punto, denominándose *polígono de fuerzas* al formado disponiendo a éstas para su suma (Figura 9.1).

Si el polígono de fuerzas es cerrado, es decir, la resultante de las fuerzas que actúan es nula, el sistema está en equilibrio si inicialmente lo estaba. Si el polígono de fuerzas es abierto, el punto material no estará en equilibrio y para conseguir este equilibrio será necesario aplicar, además de las fuerzas que actúan, una igual y opuesta a la resultante (Figura 9.2).



Polígono de fuerzas abierto. Para conseguir el equilibrio debemos añadir la fuerza $\mathbf{F}_4 = -\mathbf{R}$

Figura 9.2.

Un caso singularmente importante, por ser base de los métodos de análisis gráfico de estructuras reticuladas, es el que se presenta cuando son conocidas todas las fuerzas que actúan sobre el punto salvo dos, de las que se conoce su dirección. La condición de equilibrio nos determinará el sentido y módulo de las dos fuerzas desconocidas; para ello, a partir de un origen *O*, dispongamos vectores equipolentes

a las fuerzas conocidas como si fueran a ser sumados geométricamente, tomando como origen de cada uno de ellos el extremo del anterior, con lo que se forma la poligonal *OABC* (Figura 9.3). Por el extremo *C*, tracemos una paralela a una de las direcciones de las fuerzas desconocidas y por el origen *O*, una paralela a la dirección de la otra fuerza desconocida, ambas rectas se cortarán en el punto *D*, quedando completamente determinadas las dos fuerzas desconocidas: $\mathbf{F}_4$ equipolente a **CD** y $\mathbf{F}_5$ equipolente a **DO**.

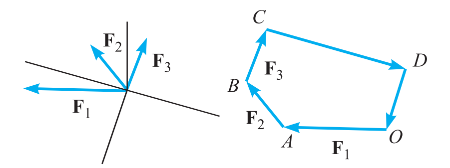


Figura 9.3.

9.4 Principio de aislamiento. Equilibrio de un punto con ligaduras

El **principio de aislamiento** establece que *todo sistema material sometido a enlaces puede considerarse como libre y suprimir los enlaces, sin más que considerar además de las fuerzas directamente aplicadas, las acciones que los enlaces ejercen sobre él*. En consecuencia, el equilibrio de un punto sometido a enlaces se reduce al estudio del equilibrio del punto libre, sin más que suprimir los enlaces y considerar las acciones que éstos ejercían sobre el sistema.

Sea como ejemplo un punto material de peso *P*, sujeto a dos puntos fijos O_1 y O_2 mediante sendos cables, que forman con la vertical ángulos de 30º y 45º, respectivamente (Figura 9.4). Los enlaces impiden el movimiento del punto y éste estará en equilibrio siempre que los cables sean capaces de resistir las tensiones que se ven obligados a soportar.

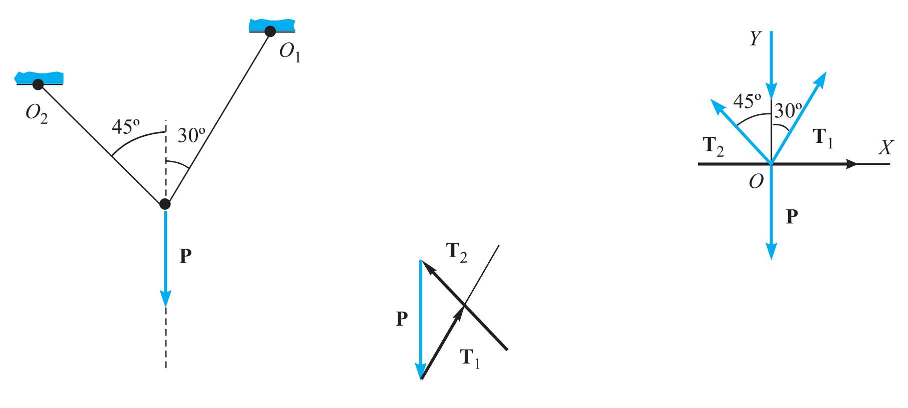


Figura 9.4.

Aplicando el principio de aislamiento, suprimiremos los cables y colocaremos en su lugar las acciones que ejercen sobre el punto, sean éstas $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ respectivamente. Ahora podemos considerar el punto como libre bajo la acción de **P,** $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$. La condición de equilibrio es:

$$\mathbf{P} + \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 = 0$$

y, tomando como eje de las equis la horizontal y como eje de las íes la vertical, se desdobla en:

$$T_1 \frac{1}{2} - T_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad ; \quad -P + T_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + T_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

sistema que resuelto da:

$$T_1 = \frac{2P}{1 + \sqrt{3}} \quad \text{y} \quad T_2 = \frac{P\sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}}$$

También indicamos en la Figura 9.4 la construcción gráfica que nos permite hallar las tensiones $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$.

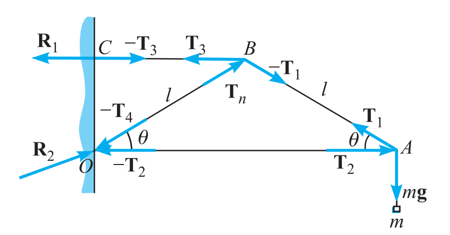


Figura 9.5.

EJEMPLO 9.1

En la estructura de la Figura 9.5, que debe soportar la masa m, analicemos analítica y gráficamente:

1.º Las tensiones en cada barra.

2.º Las reacciones de la pared en los apoyos.

Solución analítica:

1.º En el diagrama de fuerzas se han representado las acciones que ejercen las barras sobre los nudos de la estructura.

El equilibrio del nudo A nos da:

$$T_2 - T_1 \cos\theta = 0 \quad \text{y} \quad T_1 \operatorname{sen}\theta - mg = 0$$

de donde:

$$T_1 = mg/\operatorname{sen}\theta \qquad \text{y} \qquad T_2 = T_1\cos\theta = mg\operatorname{ctg}\theta$$

El equilibrio del nudo B nos da:

$$-T_3 + T_4\cos\theta + T_1\cos\theta = 0 \quad \text{y} \quad T_4\operatorname{sen}\theta - T_1\operatorname{sen}\theta = 0$$

de donde:

$$T_4 = T_1 = mg\operatorname{ctg}\theta \quad \text{y} \quad T_3 = 2T_1\cos\theta = 2mg\operatorname{ctg}\theta$$

2.º El equilibrio del punto C nos da:

$$\mathbf{R}_1 - \mathbf{T}_3 = 0 \quad , \quad \mathbf{R}_1 = \mathbf{T}_3 = -2mg\operatorname{ctg}\theta\,\mathbf{i}$$

El equilibrio del punto O nos da:

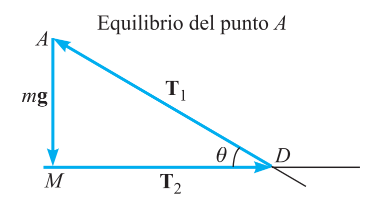
$$\mathbf{R}_2 - \mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_4 = 0$$

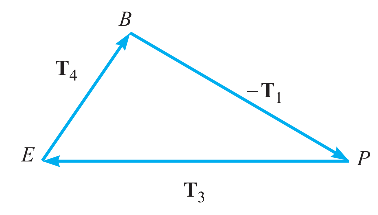
$$\mathbf{R}_2 = T_2\,\mathbf{i} + T_4(\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}) = 2mg\operatorname{ctg}\theta\,\mathbf{i} + mg\,\mathbf{j}$$

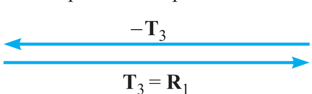
Solución gráfica:

1.º Tomemos un vector **AM** proporcional al $m\mathbf{g}$ (Figura 9.6). Por el extremo M de éste trazamos una paralela a la barra OA y por el origen A, una paralela a la barra AB, las cuales se cortan en el punto D. El vector **MD** es proporcional a $\mathbf{T}_2$ y el **DA** proporcional a $\mathbf{T}_1$, con la misma constante de proporcionalidad que lo es **AM** a $m\mathbf{g}$.

Para analizar el equilibrio en un punto B tomemos un vector $\mathbf{BP} = -\mathbf{DA}$; por P trazamos una paralela a la barra BC y por B una paralela a la barra BO; ambas se cortan en el punto E. El equilibrio exige que $\mathbf{PE}$ sea proporcional a $\mathbf{T}_3$ y que $\mathbf{EB}$ sea proporcional a $\mathbf{T}_4$.
2.º El equilibrio en C exige que $\mathbf{R}_1$ sea igual a $\mathbf{T}_3$. Para analizar un equilibrio en un punto O tomemos un vector $\mathbf{OQ}$ igual a $-\mathbf{T}_2$; en el extremo Q colocamos el vector $\mathbf{QH} = -\mathbf{T}_4$, el equilibrio exige que el vector $\mathbf{HO}$ sea proporcional a $\mathbf{R}_2$, con la misma constante de proporcionalidad que había entre $\mathbf{AM}$ y $m\mathbf{g}$.







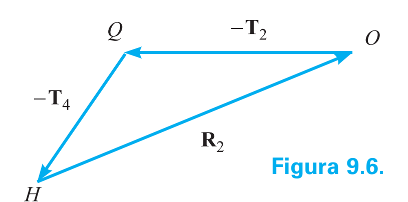


Figura 9.6.

9.5 Equilibrio de los sistemas materiales

Si un sistema material está en equilibrio, evidentemente estarán en equilibrio todos los puntos que pertenecen a él. Podremos considerar éstos como puntos libres suprimiendo todos los demás del sistema, pero teniendo en cuenta las acciones que ejercían los puntos suprimidos sobre el considerado. Denominaremos $\mathbf{F}_e$ a la resultante de las fuerzas exteriores sobre el punto considerado y $\mathbf{F}_i$ a la resultante de las fuerzas interiores, acciones de los demás puntos sobre el considerado. La condición necesaria de equilibrio de este punto es:

$$\mathbf{F}_e + \mathbf{F}_i = 0$$

y, como esto se verificará para todos y cada uno de los puntos del sistema, sumando las correspondientes ecuaciones para cada punto resulta:

$$\sum \mathbf{F}_e + \sum \mathbf{F}_i = \sum \mathbf{F}_e = 0 \qquad [9.2]$$

pues en virtud de la tercera ley de Newton, debe ser $\sum \mathbf{F}_i = 0$.

Consideremos ahora los momentos que, respecto a un punto cualquiera o, dan las fuerzas que actúan sobre un punto material genérico del sistema. Debido a que el sistema de fuerzas que actúa sobre un punto es concurrente, el momento resultante coincidirá con el momento de la resultante, considerada como vector deslizante cuya línea de acción pasa por el punto de concurrencia.

Sean $\mathbf{M}_O(\mathbf{F}_e)$ y $\mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i)$ los momentos respecto a un punto cualquiera o de la resultante de las fuerzas exteriores y de la resultante de las fuerzas interiores, respectivamente. Si el sistema está en equilibrio, será:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_i = 0$$

y, por ser un sistema de vectores concurrentes, es:

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{R}) = \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_e) + \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i) = 0$$

Igualdad que se verificará para todos los puntos del sistema. Al sumar todas las ecuaciones correspondientes a cada punto del sistema, tendremos:

$$\sum \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_e) + \sum \mathbf{M}(\mathbf{F}_i) = \sum \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_e) = 0$$

ya que las acciones interiores forman un conjunto de infinitos sistemas de dos vectores directamente opuestos.

En consecuencia, para que un sistema material esté en equilibrio estático si inicialmente lo estaba, deben verificarse:

$$\sum \mathbf{F}_e = 0 \quad \text{y} \quad \sum \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_e) = 0 \qquad [9.3]$$

es decir, las *fuerzas exteriores deben constituir un sistema de vectores deslizantes nulo*. Condición necesaria pero que, además, necesita que sea $\mathbf{v} = 0$.

EJEMPLO 9.2

Una grúa cuyo brazo es de 10 m, supondremos de masa despreciable, lleva un contrapeso de 8 000 kg y tiene que elevar una carga de 2 400 kg. Calculemos:

1.º ¿Qué esfuerzo vertical debe soportar?

2.º ¿A qué distancia del eje de la grúa debe colocarse el contrapeso para que el momento en la base de la grúa sea nulo?

Solución:

1.º En la Figura 9.7 se han representado la grúa y el diagrama de fuerzas que actúan. Puesto que la resultante debe ser nula, es:

$$\mathbf{N} - 8\,000\ \mathrm{g}\,\mathbf{j} - 2\,400\ \mathrm{g}\,\mathbf{j} = 0$$

por tanto:

$$\mathbf{N} = 10\,400\ \mathrm{g}\,\mathbf{j} = 101\,920\ \mathbf{j}\ \text{newtons}$$

2.º El momento resultante en O debe ser nulo, también lo será el momento resultante en A:

$$-1\,\mathbf{i} \times -8\,000\ \mathrm{g}\,\mathbf{j} + 10\,\mathbf{i} \times -2\,400\ \mathrm{g}\,\mathbf{j} = 0$$

de donde l = 3 m.

Figura 9.7.

9.6 Centros de gravedad y de masas

Consideremos un sistema formado por n puntos materiales y sea m_i la masa del punto genérico A_i. Cada uno de éstos, debido a la acción de la gravedad, tendrá un peso $\mathbf{P}_i$, todos los cuales serán paralelos entre sí, constituyendo un sistema de vectores localizados paralelos. Este sistema puede reducirse a un vector único, $\mathbf{P} = \sum \mathbf{P}_i$, situado en el centro del sistema de vectores que denominaremos *centro de gravedad* del sistema material considerado. Por tanto, el vector posición del C.D.G. está dado por la expresión:

$$\mathbf{r}_G = \frac{\sum P_i \mathbf{r}_i}{\sum P_i} \qquad [9.4]$$

Y, puesto que en cuerpos de dimensiones normales podemos suponer sin error apreciable que g es la misma en todos sus puntos, resulta:

$$\mathbf{r}_G = \frac{\sum m_i g \mathbf{r}_i}{\sum m_i g} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \mathbf{r}_C \qquad [9.5]$$

denominándose al punto C, *centro de masas* (c.d.m.). Esta ecuación se desdobla en tres ecuaciones escalares:

$$x_G = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i \quad ; \quad y_G = \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i \quad ; \quad z_G = \frac{1}{M}\sum_i m_i z_i \qquad [9.6]$$

en las que M es la masa total del sistema.

El c.d.m. gozará de todas las propiedades demostradas para el centro de sistemas de vectores paralelos, es decir, será único, independiente del sistema de referencia elegido, fijo dentro del sistema material, e independiente de la posición de éste, puesto que no depende de la dirección de los vectores.

EJEMPLO 9.3

Sean las masas $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 3$ kg y $m_3 = 2$ kg, que están situadas, respectivamente, en los puntos $O(0, 0, 0)$, $A(0, 4, 0)$ y $B(0, 0, 3)$. Determinemos la posición de su c.d.m.

Solución:

La primera [9.6] nos da $x_C = 0$. La segunda [9.6] nos da $y_C = 3 \times 4/6 = 2$, y la tercera [9.6] nos da $z_C = 2 \times 3/6 = 1$. Por tanto, el c.d.m. está en el punto $C(0, 2, 1)$.

EJEMPLO 9.4

Una barra homogénea de masa $m = 2$ kg y longitud L lleva en cada uno de sus extremos sendas masas de valor $m_1 = 4$ kg y $m_2 = 2$ kg (Figura 9.8). Determinemos el c.d.m. del conjunto.

Solución:

Tomemos la situación de la masa m_1 como origen de coordenadas y el eje OX coincidente con la barra. La primera [9.6] nos da la posición del c.d.m.:

$$x_C = (4 \times 0 + 2 \times L/2 + 2 \times L) = 3L/8$$

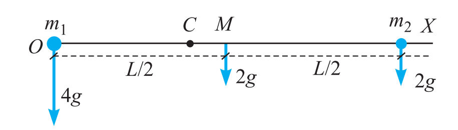


Figura 9.8.

Si el sistema material es continuo, se puede considerar como formado por infinitos elementos diferenciales de masa, dm, y la Ecuación [9.5] se transforma en:

$$\mathbf{r}_G = \frac{\int \mathbf{r}\,dp}{\int dp} \simeq \frac{\int \mathbf{r}\,dm}{\int dm} = \mathbf{r}_{\text{cdm}} \qquad [9.7]$$

la cual se desdobla en las tres escalares:

$$x_G = \frac{\int x\,dm}{M} \quad ; \quad y_G = \frac{\int y\,dm}{M} \quad ; \quad z_G = \frac{\int z\,dm}{M} \qquad [9.8]$$

siendo M la masa total del sistema.

Propiedades

Si un sistema tiene un plano de simetría, el c.d.m. estará en este plano, pues tomando el mismo como plano *XY*, cada elemento de masa *dm* en el punto (x, y, z) tiene otro correspondiente en el $(x, y, -z)$, lo que hace que sea nulo el numerador de la tercera [9.8] y, por tanto, $z_C = 0$.

Si lo que tiene el sistema es un eje de simetría, el c.d.m. estará sobre él, pues tomando ese eje como eje *OZ*, a cada elemento de masa *dm* en el punto (x, y, z) le corresponde otro en el $(-x, -y, z)$, lo que hace que los numeradores de la primera y segunda de las ecuaciones [9.8] se anulen y, con ello, $x_C = 0$ e $y_C = 0$.

Si el sistema tiene centro de simetría, éste será su c.d.m., pues tomando éste como origen de nuestro sistema de referencia, cada elemento de masa $dm(x, y, z)$ tendrá siempre el simétrico $dm(-x, -y, -z)$ y los numeradores de las ecuaciones [9.8] se anularán, con lo cual el c.d.m. coincide con el origen.

La distribución de masa puede ocupar una línea, una superficie o un volumen. Analicemos cada uno de los tres casos posibles:

Distribución lineal

La masa elemental, *dm*, será la correspondiente a una longitud elemental, *dl*, y siendo λ la densidad lineal, o masa por unidad de longitud, debe verificarse:

$$dm = \lambda\, dl$$

con lo cual la [9.7] se escribe:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\int \mathbf{r}\lambda\, dl}{\int \lambda\, dl} \qquad [9.9]$$

Si la línea es homogénea, es decir, si todos los elementos *dl* tienen la misma λ, puede escribirse:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\int \mathbf{r}\, dl}{L} \qquad [9.10]$$

siendo L la longitud total de la línea.

EJEMPLO 9.5 Centro de masas de una semicircunferencia homogénea

Por tener la semicircunferencia un eje de simetría, el c.d.m. estará sobre él. Tomemos el origen del sistema de referencia en el centro de la semicircunferencia, como eje *OX* la semirrecta que la limita y como eje *OY* el de simetría (Figura 9.9). Se verificará:

$$y_C = \frac{\int y\, dl}{L}$$

Haciendo el cambio de variable $y = R \operatorname{sen} \theta$, y teniendo en cuenta que es $dl = R\, d\theta$ y $L = \pi R$, se escribe:

$$y_C \pi R = \int_0^{\pi} R^2 \operatorname{sen} \theta\, d\theta = R^2[-\cos \theta]_0^{\pi} = 2R^2$$

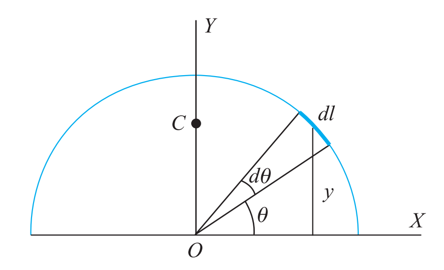


Figura 9.9.

de donde:

$$y_C = \frac{2R}{\pi}$$

Distribución superficial

Si la masa está distribuida sobre una superficie, el elemento de masa, dm, será la masa correspondiente al elemento de superficie dA, y siendo σ la densidad superficial, o masa por unidad de superficie, debe verificarse:

$$dm = \sigma\, dA$$

con lo cual la [9.7] se escribe:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\int \mathbf{r}\sigma\, dA}{\int \sigma\, dA} \qquad [9.11]$$

Si la superficie es homogénea, es decir, si todos los elementos dA tienen la misma σ, puede escribirse:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\int \mathbf{r}\, dA}{A} \qquad [9.12]$$

siendo A el área total de la superficie.

EJEMPLO 9.6 Centro de masas de un semicírculo homogéneo

El c.d.m. estará sobre el eje de simetría, el cual tomaremos como eje OY (Figura 9.10). La expresión que nos da la posición del c.d.m. es:

$$y_C = \frac{\int y\, dA}{A}$$

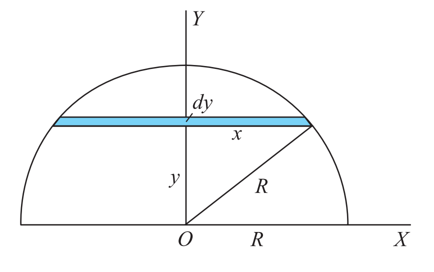


Figura 9.10.

Como elemento diferencial de área tomaremos la limitada por la semicircunferencia y las rectas de ordenadas y e $y + dy$, cuyo valor es $dA = 2x\, dy$. Con ello, y puesto que $A = 1/2\pi R^2$, se escribe:

$$\frac{1}{2}\pi R^2 y_C = \int y 2x\, dy = 2\int_0^R y\sqrt{R^2 - y^2}\, dy =$$

$$= -\frac{2}{3}\left[(R^2 - y^2)^{3/2}\right]_0^R = \frac{2}{3}R^3$$

Por tanto:

$$y_C = \frac{4R}{3\pi}$$

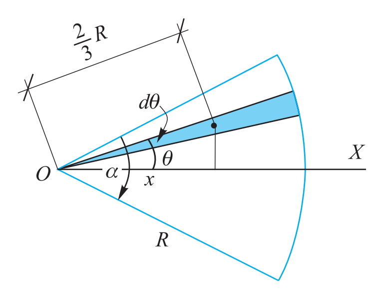


Figura 9.11.

EJEMPLO 9.7 Centro de masas de un sector circular homogéneo de radio *R* y ángulo α

El sector circular homogéneo es simétrico respecto de la bisectriz de su ángulo. Tomando aquélla como eje *OX* (Figura 9.11) el c.d.m. viene dado por:

$$x_C = \frac{\int x\,dA}{A}$$

El área del sector puede obtenerse a partir de la del círculo; considerando a éste como un sector de ángulo 2π, es:

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi \text{ — } \pi R^2 \\ \alpha \text{ — } A \end{array}\right\} \quad A = \frac{\alpha R^2}{2}$$

Tomaremos como elemento diferencial de área el señalado en la Figura 9.11, cuyo valor es:

$$dA = \frac{1}{2} R^2\, d\theta$$

La abscisa de este elemento es la que corresponde a su c.d.m., el cual está a 2/3 del vértice. Por tanto, es $x = 2/3R\cos\theta$. Con todo ello, se escribe:

$$\frac{\alpha R^2}{2} x_C = \int 2/3R\cos\theta\, \frac{1}{2} R^2\, d\theta$$

$$\alpha x_C = \frac{2}{3} R \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos\theta\, d\theta = \frac{2}{3} R[\operatorname{sen}\theta]_{-\alpha/2}^{\alpha/2} = \frac{4}{3} R \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$$

de donde:

$$x_C = \frac{4R}{3\alpha} \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$$

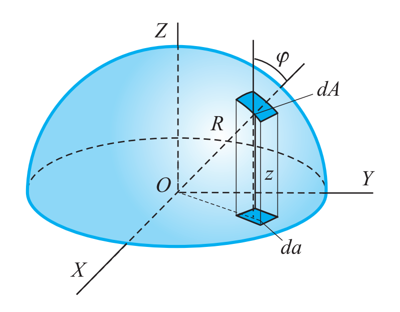


Figura 9.12.

EJEMPLO 9.8 Centro de gravedad de una semisuperficie esférica homogénea de radio *R*

El c.d.m. estará sobre el eje de simetría, que tomaremos como eje *OZ* (Figura 9.12), por tanto:

$$x_C = 0 \quad ; \quad y_C = 0 \quad \text{y} \quad z_C = \frac{\int z\,dA}{A}$$

$$da = dA\cos\varphi = \frac{z}{R}\,dA \quad \Rightarrow \quad z\,dA = R\,da$$

En consecuencia es:

$$z_C = \frac{\int R\,da}{A} = \frac{Ra}{A} = \frac{R\pi R^2}{2\pi R^2} = \frac{R}{2}$$

Distribución espacial

Si la masa está distribuida ocupando un volumen, el elemento de masa, dm, será la masa correspondiente al elemento de volumen, dV y, siendo ρ la densidad espacial o masa por unidad de volumen, debe verificarse:

$$dm = \rho\, dV$$

Con lo cual, la [9.7] se escribe:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\int \mathbf{r}\,\rho\, dV}{\int \rho\, dV} \qquad [9.13]$$

Si la distribución es homogénea, es decir, si todos los elementos dV tienen la misma ρ, puede escribirse:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\int \mathbf{r}\, dV}{V} \qquad [9.14]$$

siendo V el volumen total de la distribución.

EJEMPLO 9.9 Centro de masas de un cono homogéneo de radio *R* y altura *H*

Tomemos el eje de simetría del cono como eje OZ (Figura 9.13), el c.d.m. estará en un punto $C(0, 0, z_C)$, siendo:

$$z_C = \frac{1}{M}\int z\, dm = \frac{1}{V}\int z\, dV$$

El elemento de volumen es:

$$dV = \pi r^2\, dz$$

y con ello:

$$z_C = \frac{\pi}{V}\int z r^2\, dz$$

La semejanza de los triángulos OAB y $O'AB'$ permite expresar r en función de z:

$$\frac{r}{R} = \frac{H - z}{H} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R}{H}(H - z)$$

Por tanto:

$$z_C = \frac{\pi}{V}\int_0^H \frac{R^2}{H^2}(H - z)^2 z\, dz = \frac{\pi R^2}{VH^2}\left[\frac{1}{2}H^2 z^2 + \frac{1}{4}z^4 - \frac{2}{3}Hz^3\right]_0^H = \frac{\pi R^2 H^2}{12V}$$

y, puesto que es $V = 1/3\pi R^2 H$, resulta:

$$z_C = \frac{H}{4}$$

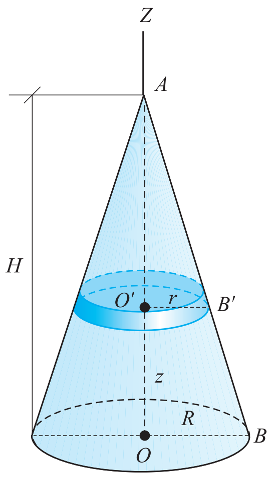


Figura 9.13.

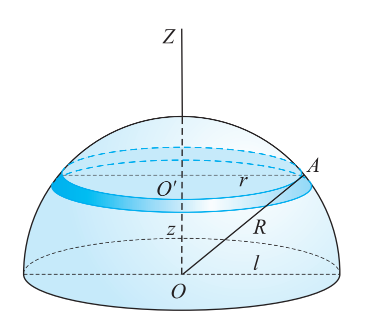


Figura 9.14.

EJEMPLO 9.10 Centro de masas de una semiesfera homogénea de radio *R*

Tomemos el eje de simetría de la semiesfera como eje *OZ* (Figura 9.14). El c.d.m. estará en el punto $C(0, 0, z_C)$, siendo:

$$z_C = \frac{1}{V}\int z\,dV$$

El elemento de volumen será $dV = \pi r^2\,dz$ y, con ello:

$$z_C = \frac{\pi}{V}\int_0^R zr^2\,dz$$

El triángulo $OO'A$ permite expresar r en función de z: $r^2 = R^2 - z^2$. Por tanto:

$$z_C = \frac{\pi}{V}\int_0^R z(R^2 - z^2)\,dz = \frac{\pi}{V}\left[\frac{R^2z^2}{2} - \frac{z^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi}{V}\,\frac{R^4}{4}$$

y, puesto que es $V = 2/3\pi R^3$, resulta:

$$z_G = \frac{3}{8}R$$

Cuerpos compuestos

Si el sistema material puede fragmentarse en una serie de partes de c.d.g. conocidos, el c.d.g. del sistema primitivo puede encontrarse fácilmente en función de éstos. La Ecuación [9.7] puede escribirse:

$$P\mathbf{r}_G = \int \mathbf{r}\,dp = \sum_i \int \mathbf{r}\,dp_i \qquad [9.15]$$

estando la integral $\int \mathbf{r}\,dp_i$ extendida al espacio ocupado por la parte i. Dentro de esta parte, su c.d.g. verificará la [9.7]:

$$p_i\mathbf{r}_{Gi} = \int \mathbf{r}\,dp_i$$

y, con esto, puede escribirse, al sustituir en [9.15]:

$$P\mathbf{r}_G = \sum_i p_i\mathbf{r}_{Gi}$$

que nos dice que *el c.d.g. del sistema es el c.d.g. de los c.d.g. de cada una de las partes en que lo hemos fragmentado, dotados de su masa respectiva.*

El c.d.m., análogamente, verificará:

$$M\mathbf{r}_C = \sum m_i\mathbf{r}_{Ci} \qquad [9.16]$$

siendo M la masa total del cuerpo. La [9.16] se desdobla en las tres ecuaciones escalares:

$$Mx_C = \sum m_ix_{Ci} \quad ; \quad My_C = \sum m_iy_{Ci} \quad ; \quad Mz_C = \sum m_iz_{Ci} \qquad [9.17]$$

EJEMPLO 9.11 **Determinación del centro de masas de un segmento circular homogéneo de radio *R* y ángulo central α**

Haremos el cálculo considerando que el sector circular está compuesto de un triángulo y un segmento circular. El área del sector y su c.d.m. son conocidos:

$$A_s = \frac{\alpha R^2}{2} \quad ; \quad x_{CS} = \frac{4R}{3\alpha} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$$

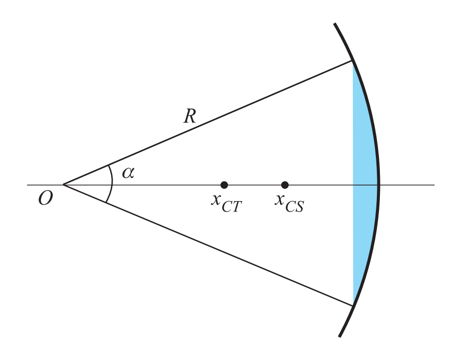


Figura 9.15.

Asimismo, son conocidos el área y el c.d.m. del triángulo:

$$A_T = \frac{1}{2} R^2 \operatorname{sen} \alpha \quad ; \quad x_{CT} = \frac{2}{3} R \cos \frac{\alpha}{2}$$

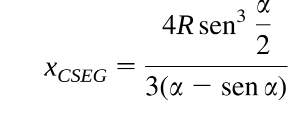
El área del segmento se obtiene por diferencia:

$$A_{SEG} = A_S - A_T = \frac{R^2}{2} (\alpha - \operatorname{sen} \alpha)$$

El c.d.m., del segmento deberá cumplir la relación:

$$A_S \cdot x_{CS} = A_T \cdot x_{CT} + A_{SEG} \cdot x_{CSEG}$$

$$\frac{\alpha R^2}{2} \cdot \frac{4R}{2\alpha} \operatorname{sen} \alpha = \frac{R^2}{2} \operatorname{sen} \alpha \cdot \frac{2}{3} R \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{R^2}{2} (\alpha - \operatorname{sen} \alpha) \cdot x_{CSEG}$$



$$x_{CSEG} = \frac{4R \operatorname{sen}^3 \dfrac{\alpha}{2}}{3(\alpha - \operatorname{sen} \alpha)}$$



Cuerpos no homogéneos

En los cuerpos no homogéneos debemos aplicar las ecuaciones [9.9], [9.11] o [9.13], según que se trate de líneas, superficies o volúmenes, respectivamente, expresando la densidad como función de punto.

EJEMPLO 9.12 **Centro de masas de un cilindro de radio *R*, altura *H* y densidad en cada punto proporcional a la distancia de éste a la base**

La distribución de masas es simétrica respecto al eje del cilindro, el cual tomaremos como eje OZ (Figura 9.16). La densidad es de la forma:

$$\rho = cz$$

El c.d.m. estará en el punto $C(0, 0, z_C)$, siendo:

$$z_C = \frac{\int \rho z \, dV}{\int \rho \, dV}$$

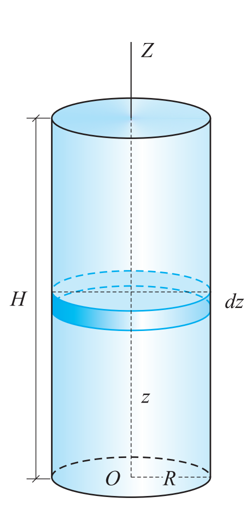


Figura 9.16.

El elemento de volumen será $dV = \pi R^2\, dz$ y, con ello:

$$z_C = \frac{\int_0^H z^2\, dz}{\int_0^H z\, dz} = \frac{\frac{1}{3} H^3}{\frac{1}{2} H^2} = \frac{2}{3} H$$

9.7 Equilibrio del sólido con ligaduras

Las condiciones necesarias de equilibrio de un sólido libre, como sistema material que es, serán las [9.3]. Si el sólido está sometido a ligaduras, podemos aplicar el principio de aislamiento, suprimiendo éstas, situando en su lugar las acciones que ejercían sobre el sólido y considerando a éste como sólido libre bajo la acción de las fuerzas exteriores y de las fuerzas de ligadura.

Las condiciones de equilibrio, en este caso, son:

$$\sum \mathbf{F}_e + \sum \mathbf{F}_e = 0 \quad ; \quad \sum \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_e) + \sum \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_e) = 0 \qquad [9.18]$$

siendo $\mathbf{F}_e$ las fuerzas debidas a las ligaduras que, en general, se denominan reacciones por oponerse a la acción del sólido sobre el enlace.

En general, las fuerzas exteriores son conocidas, siendo las incógnitas las reacciones. Cuando las ecuaciones de equilibrio son suficientes para resolver el problema, se dice que éste es *isostático* o que está estáticamente determinado. Por el contrario, si el número de incógnitas es superior al de ecuaciones de equilibrio, el problema es estáticamente indeterminado o *hiperestático*, cayendo éstos fuera del campo de la Estática teórica y siendo necesario para su resolución el concurso de la Teoría de la Elasticidad.

Sistema isostático

Sistema hiperestático

9.8 Rozamiento sólido-sólido

De capital importancia en ingeniería es la oposición que presentan los cuerpos a que otro se mueva sobre su superficie; este fenómeno se denomina rozamiento y la fuerza que se opone al movimiento, *fuerza de rozamiento*.

Según vimos, el movimiento más general de un sólido S sobre la superficie de otro S_1 puede descomponerse en tres: un deslizamiento, una rodadura y un pivotaje. A cada uno de estos movimientos se opone S_1 existiendo, por tanto, un rozamiento al resbalamiento, un rozamiento a la rodadura y uno al pivotaje. Aquí, estudiaremos únicamente el rozamiento al resbalamiento, dejando para cursos de Mecánica el estudio de los otros dos.

Consideremos un cuerpo de peso $\mathbf{P}$, situado sobre un plano inclinado un ángulo φ, variable con respecto al plano horizontal.

Partiendo de su posicion horizontal, $\varphi = 0$, con el cuerpo en reposo, se va aumentando progresivamente el ángulo de inclinación hasta que se alcanza un valor $\varphi = \varphi_0$, tal que si se sobrepasa el cuerpo empieza a deslizarse sobre el plano.

Si aislamos el cuerpo del resto del sistema, las fuerzas que sobre él actúan son: el peso $\mathbf{P}$ y la reacción $\mathbf{R}$ del plano sobre él.

En el instante antes de empezar el deslizamiento, la primera de las ecuaciones [9.3] se escribe:

$$\mathbf{P} + \mathbf{R} = 0 \qquad \text{o} \qquad \mathbf{P} = -\mathbf{R}$$

Figura 9.17.

que en el sistema de referencia elegido es:

$$P_T\,\mathbf{i} - P_N\,\mathbf{j} = -\,(-F_r\,\mathbf{i} + R_N\,\mathbf{j})$$

de donde:

$$P_T = R_T = F_r \quad \text{y} \quad P_N = R_N \qquad [9.19]$$

siendo $\mathbf{F}_r$ la fuerza de rozamiento, opuesta a la componente $\mathbf{P}_T$, que tiende a producir el movimiento. Las condiciones [9.19] son las de *equilibrio estricto* del sistema y se verifican únicamente en el instante anterior al del comienzo del deslizamiento. Por otra parte, la segunda de las [9.3]:

$$\sum \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_e) = 0$$

tomando momentos respecto al centro de masas del sistema, es:

$$F_r \cdot \frac{h}{2} = R_N\, d$$

y, de ella, se deduce:

$$d = \frac{h}{2}\frac{F_r}{R_n} = \frac{h}{2}\,\text{tg}\,\varphi_0$$

lo que nos indica que el punto de aplicación de $\mathbf{R}$ debe ser A, punto en el cual el peso corta al plano inclinado.

Como ya indicamos en el capítulo anterior, se debe a Leonardo Da Vinci las leyes del rozamiento sólido-sólido, que fueron experimentalmente comprobadas por Coulomb (1736-1806), verificando que el módulo de la fuerza $\mathbf{P}_T$ necesaria para iniciarse el movimiento y, por tanto, la fuerza de rozamiento estático estricto es proporcional a la componente normal a la superficie en rozamiento, de la acción que mutuamente se ejercen los cuerpos que rozan. En nuestro caso:

$$P_T = F_T = \mu_e R_N \qquad [9.20]$$

ecuación que únicamente es válida en el equilibrio estricto y en la que μ_e es el *coeficiente estático de rozamiento al resbalamiento*, que es adimensional, según se deduce de la [9.20], y cuyo valor es:

$$\mu = \frac{F_r}{R_N} = \text{tg}\,\varphi_0$$

es decir, en las condiciones del equilibrio estricto, μ_e es la tangente del ángulo que forma el plano inclinado con la horizontal. Para cualquier otro valor del ángulo $\varphi < \varphi_0$, el cuerpo está en reposo y, aunque cumple las condiciones de equilibrio, ya que es $F_r = P_T$, F_r no es la fuerza de rozamiento máxima, sino sólo la necesaria para neutralizar a P_T.

Una vez iniciado el movimiento, $\varphi > \varphi_0$, para mantenerlo con velocidad constante es necesaria una fuerza F_1 algo inferior a F_r, pero también de módulo proporcional a la componente normal a la superficie en rozamiento, de la acción que mutuamente se ejercen los cuerpos que rozan, siendo, en nuestro caso:

$$F_1 = \mu R_N \qquad [9.21]$$

en la que μ es el *coeficiente de rozamiento al deslizamiento*.

El coeficiente de rozamiento depende de la naturaleza de las superficies en contacto, de su estado de pulimentación y de su estado de lubricación, siendo independiente de la velocidad relativa de las superficies y del área en contacto, según ya hemos indicado. En el capítulo anterior presentamos una tabla de coeficientes de rozamiento entre diferentes superficies.

EJEMPLO 9.13

Una escalera de longitud L y masa despreciable frente a la masa, m, del usuario, se apoya sobre una pared, que no ofrece resistencia al deslizamiento, y en el suelo, cuyo coeficiente estático de rozamiento al deslizamiento es μ_e. Si la escalera forma un ángulo θ con el suelo, determinemos:

1.º La altura máxima que puede alcanzar el usuario sin que la escalera resbale.

2.º La aplicación al caso $L = 3$ m, $\mu_e = 0{,}5$ y $\theta = 60^{\circ}$. ¿Cuántos peldaños podrá subir, si la separación entre éstos es de 30 cm?

Solución:

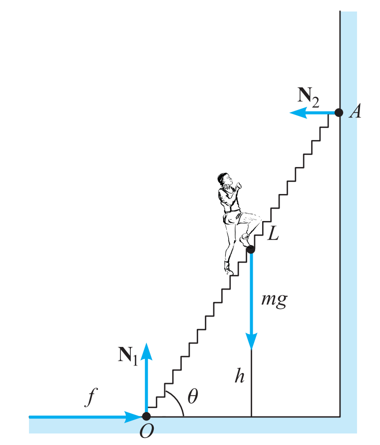


Figura 9.18.

1.º Las fuerzas que actúan se han indicado en la Figura 9.18 y deben verificar:

$$N_1 = mg \quad \text{y} \quad N_2 = f$$

El máximo valor de f es $f = \mu_e N_1 = \mu_e mg = N_2$.
Tomando momentos respecto a O resulta:

$$mgh \operatorname{ctg} \theta = N_2 L \operatorname{sen} \theta = \mu_e mgL \operatorname{sen} \theta$$

de donde:

$$h = \mu_e L \operatorname{sen}^2 \theta / \cos \theta$$

2.º Particularizando la expresión anterior para los datos del enunciado es:

$$h = 0{,}5 \times 300 \times 3/4 : 1/2 = 225 \text{ cm}$$

Si los peldaños están separados 30 cm, cuando la escalera forma con el suelo un ángulo de $\theta = 60^{\circ}$, la separación entre peldaños según la vertical es de:

$$h' = 30 \operatorname{sen} 60 = 15\sqrt{3} = 25{,}98 \text{ cm}$$

Por tanto, sólo podrá subir ocho peldaños, si sube al número nueve, la escalera resbalará.

9.9 Equilibrio de un sistema formado por varios sólidos

Mediante la aplicación del principio de aislamiento, este problema se reduce a estudiar el equilibrio de cada uno de los sólidos que componen el sistema, considerando además de las fuerzas exteriores a él aplicadas, las acciones que los demás sólidos ejercen sobre él.

EJEMPLO 9.14

Una persona está sujetando con su mano un cuerpo de masa m y mantiene su antebrazo en posición horizontal. Si la masa de éste es m' y su longitud L, calculemos, sabiendo que el c.d.m. del antebrazo está a la distancia d' del codo (Figura 9.19):

1.º La fuerza que está realizando el bíceps.
2.º La reacción que debe soportar el codo.
3.º La aplicación al caso: $m = 5$ kg y $m' = 3$ kg.

Solución:

En las Figuras 9.19 se han representado la situación indicada por el problema y el diagrama de fuerzas que están actuando.

1.º La condición $\sum \mathbf{M} = 0$ nos da $Fd = m'gd' + mgL$, de donde:

$$F(m'd' + mL)g/d$$

2.º La condición $\sum \mathbf{F} = 0$ nos da $R + m'g + mg = F$, de donde:

$$R = F - (m + m')g$$

Y, teniendo en cuenta el valor de F hallado en el apartado anterior es:

$$R = [m'(d' - d) + m(L - d)]g/d$$

3.º La aplicación a los valores del enunciado da:

$$F = 49g = 480{,}2\,N \qquad \text{y} \qquad R = 401{,}8\,N$$

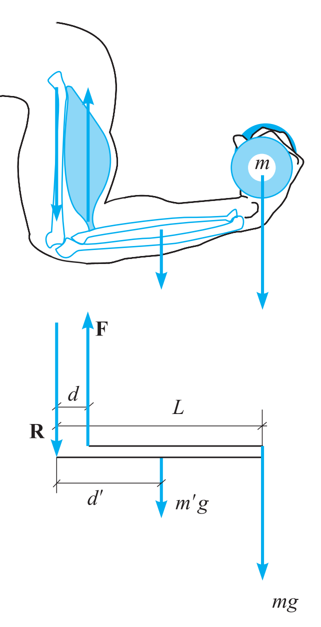


Figura 9.19.

9.10 Principio de los trabajos virtuales

El principio de los trabajos virtuales es un postulado de la Mecánica que puede enunciarse de la siguiente forma: *la condición necesaria y suficiente para que un sistema material esté en equilibrio en una cierta posición es que para todo desplazamiento virtual a partir de esa posición, la suma de los trabajos virtuales de las fuerzas directamente aplicadas sea nula*.

Si es $\mathbf{F}_i$ la resultante de las fuerzas directamente aplicadas sobre el punto i del sistema y $\delta\mathbf{r}_i$ el desplazamiento virtual de ese punto, la expresión analítica del principio de los trabajos virtuales es:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \qquad [9.22]$$

denominada ecuación general de la Estática.

EJEMPLO 9.15

Veamos un ejemplo de aplicación del principio de los trabajos virtuales al cálculo de la posición de equilibrio del mecanismo plano de la Figura 9.20. Ésta representa dos varillas iguales, de longitud a y masa m, articuladas en O y A sin rozamiento. Sobre el punto A, actúa el soporte telescópico de masa M, de constante K,

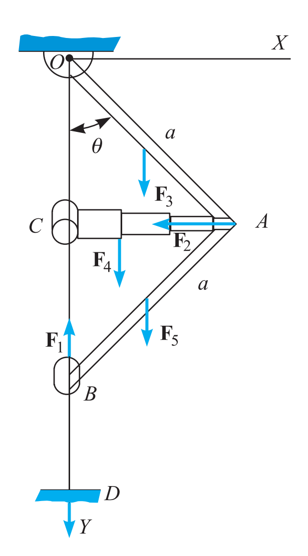


Figura 9.20.

cuyo centro de gravedad está situado a un tercio de CA, y que supondremos de longitud despreciable cuando no se ejerce ninguna fuerza sobre él. Los puntos C y B son deslizaderas sin rozamiento a lo largo del eje vertical y actúa sobre B una fuerza vertical ascendente $\mathbf{F}_1$.

La posición del sistema queda perfectamente determinada conociendo el valor del ángulo θ, por lo que lo elegimos como parámetro del movimiento. En función del mismo y respecto a los ejes que se dibujan en la Figura 9.20, las fuerzas que actúan sobre el sistema son:

$$\mathbf{F}_1 = -F_1\,\mathbf{j} \quad ; \quad \mathbf{F}_2 = -ka\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{i} \quad ; \quad \mathbf{F}_3 = mg\,\mathbf{j} \quad ; \quad \mathbf{F}_4 = Mg\,\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_5 = mg\,\mathbf{j}$$

y los correspondientes vectores de posición de sus puntos de aplicación son:

$$r_1 = 2a\cos\theta\,\mathbf{j} \quad ; \quad \mathbf{r}_2 = a(\text{sen}\,\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j})$$

$$\mathbf{r}_3 = \frac{a}{2}(\text{sen}\,\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}) \quad ; \quad \mathbf{r}_4 = \frac{a}{3}\text{sen}\,\theta\,\mathbf{i} + a\cos\theta\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_5 = \frac{a}{2}(\text{sen}\,\theta\,\mathbf{i} + 3\cos\theta\,\mathbf{j})$$

siendo los respectivos desplazamientos virtuales:

$$\delta\mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial\theta}\cdot\delta\theta = (-2a\,\text{sen}\,\theta\mathbf{j})\delta\theta \quad ; \quad \delta\mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial\theta}\cdot\delta\theta = a(\cos\theta\,\mathbf{i} - \text{sen}\,\theta\,\mathbf{j})\delta\theta$$

$$\delta\mathbf{r}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial\theta}\cdot\delta\theta = \frac{a}{2}\left(\cos\theta\,\mathbf{i} - \text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}\right)\delta\theta \quad ; \quad \delta\mathbf{r}_4 = \left(\frac{a}{3}\cos\theta\,\mathbf{i} - a\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}\right)\delta\theta$$

$$\delta\mathbf{r}_5 = \frac{a}{2}(\cos\theta\,\mathbf{i} - 3\,\text{sen}\,\theta\mathbf{j})\delta\theta$$

De acuerdo con la Expresión [9.21]:

$$\sum_i \mathbf{F}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i = 0 \quad \text{o bien} \quad \sum_i\sum_j \mathbf{F}_i\cdot\frac{\delta\mathbf{r}_i}{\delta q_j}\,\delta q_j = 0$$

que, en el caso de un solo parámetro, se reduce a:

$$\sum \mathbf{F}_i\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_1}{\partial\theta}\,\delta\theta = 0$$

para la que se verificará:

$$\sum_i \mathbf{F}_i\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial\theta} = 0$$

que, para los valores de nuestro ejemplo, es:

$$2aF_1\,\text{sen}\,\theta - ka^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - 2amg\,\text{sen}\,\theta - Mga\,\text{sen}\,\theta = 0$$

una de cuyas soluciones es sen $\theta = 0$, es decir, $\theta = 0$, y la otra es:

$$\cos\theta = \frac{2F_1 - g(2m + M)}{ka}$$

es decir:

$$\theta = \arccos\frac{2F_1 - g(2m + M)}{ka}$$

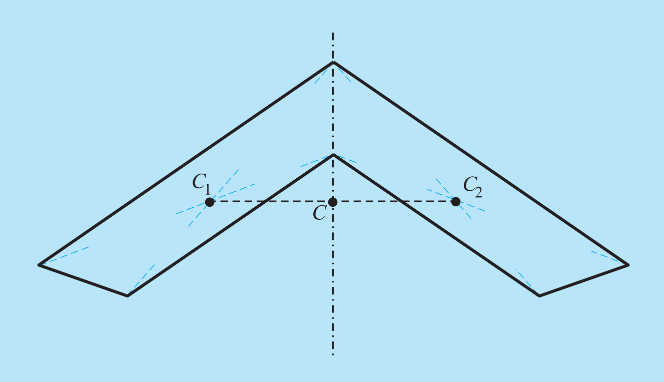


TEOREMAS DE PAPPUS Y GULDIN

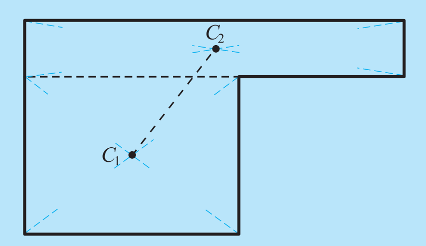
Pappus fue uno de los famosos matemáticos de la antigua Grecia, su vida discurrió en torno al año 300 a.C. El famoso teorema que lleva su nombre hace referencia a propiedades proyectivas entre los puntos de dos rectas, pero aquí nos vamos a referir a unos teoremas enunciados por él, que permiten localizar el c.d.m. de cuerpos homogéneos sin necesidad de cálculo.

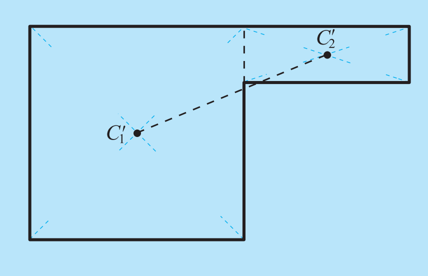
Pappus establece como obvio que, si un cuerpo homogéneo tiene centro de simetría, ese es su c.d.m., para luego enunciar dos teoremas, que son:

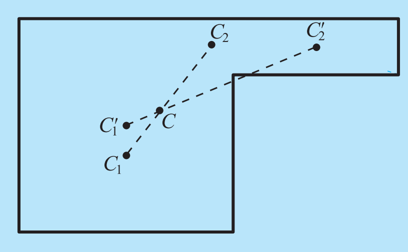
Primero. *Si un cuerpo homogéneo tiene un eje de simetría y está formado por dos cuerpos cuyos centros de masas son, respectivamente C_1 y C_2, el c.d.m. del cuerpo es el punto donde la línea C_1C_2 corta al eje de simetría*. En la figura se ilustra un ejemplo de aplicación de este teorema.



Segundo. *Si un cuerpo homogéneo, que no tiene eje de simetría, está formado por dos cuerpos cuyos centros de masas son, respectivamente, C_1 y C_2, el c.d.m. del cuerpo está sobre la línea C_1C_2. Si el cuerpo inicial se puede descomponer en otros dos cuerpos, cuyos centros de masas son, respectivamente, C'_1 y C'_2, el c.d.m. del cuerpo el el punto de intersección de las líneas C_1C_2 y $C'_1C'_2$*. En las figuras se ilustra un ejemplo de aplicación de este teorema.



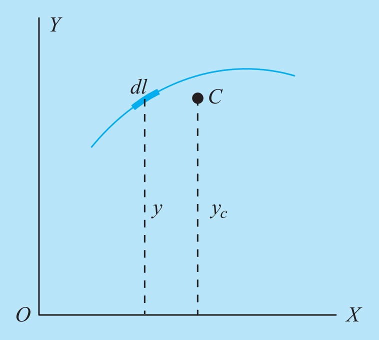




Guldin(1577-1643) fue un matemático suizo que enunció dos teoremas de gran utilidad para el cálculo de centros de masas de curvas y superficies, que son:

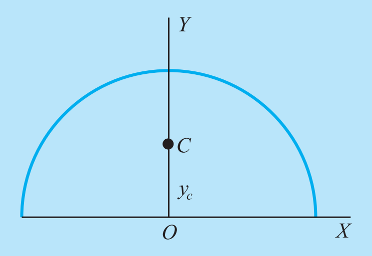
Primero. *La superficie engendrada por una línea plana al realizar una revolución completa alrededor de un eje coplanario con ella y que no la corta es igual al producto de la longitud de esa línea por la longitud de la circunferencia que describe su c.d.m.*

Demostración: Tomemos el eje de revolución como eje OX. El elemento de longitud de curva, dl, al girar engendra el área $dA = 2\pi\, y\, dl$. Integrando para toda la curva obtenemos el área total engendrada $A = 2\pi \int y\, dl$. El c.d.m. de la curva verifica $y_c \cdot l = \int y\, dl$ siendo l la longitud total de la curva. Con ello puede expresarse $A = 2\pi\, y_c l = L \cdot l$



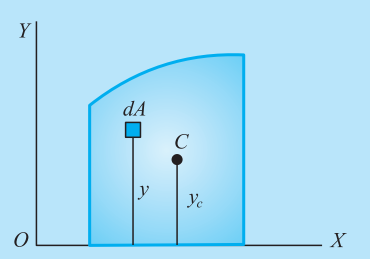
Ejemplo. Calculemos el c.d.m. de una semicircunferencia de radio R.

Solución: El área descrita por la semicircunferencia al girar alrededor de su diámetro es la de una esfera $A = 4\pi R^2$. La longitud de la semicircunferencia es $l = \pi R$ y la longitud de la circunferencia descrita por su c.d.m. es $L = 2\pi y_c$, con todo lo cual el teorema de Guldin se expresa $4\pi R^2 = \pi R \cdot 2\pi y_c$, de donde $y_c = 2R/\pi$.



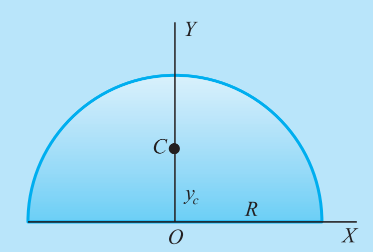
Segundo. *El volumen engendrado por una superficie plana al girar alrededor de una recta coplanaria y que no la corta, es igual al producto del área de la citada superficie por la longitud de la circunferencia que describe su c.d.m.*

Demostración: Tomemos el eje de rotación como eje OX. El elemento de área, dA, al girar engéndrale volumen $dV = 2\pi y\, dA$ y el volumen total engendrado es $V = 2\pi \int y\, dA$. El c.d.m. de la superficie verifica $y_c \cdot A = \int y\, dA$, con lo cual el volumen engendrado puede expresarse $V = 2\pi y_c A = A \cdot L$.



Ejemplo. Calculemos el c.d.m. de un semicírculo de radio R.

Solución: El volumen engendrado por el semicírculo al girar alrededor de su diámetro es el de una esfera $V = \dfrac{4\pi}{3} R^3$. El área del semicírculo es $A = \dfrac{1}{2}\pi R^2$ y la longitud de la circunferencia engendrada por el c.d.m. es $L = 2\pi y_c$, con todo lo cual el teorema de Guldin se expresa $\dfrac{4\pi}{3} R^3 = \dfrac{1}{2}\pi R^2 \cdot 2\pi y_c$ de donde $y_c = \dfrac{4R}{3\pi}$



Dinámica de la partícula

CAPÍTULO 10

10.1 Ecuación fundamental de la Dinámica. Fuerzas de inercia

La segunda ley de Newton, que relaciona las fuerzas aplicadas a una partícula de masa *m* con la aceleración que toma ésta, constituye la ecuación fundamental de la Dinámica y, como se vio en el Capítulo 8, se expresa:

$$\mathbf{F}_1 = m\mathbf{a}_1 \qquad [10.1]$$

ecuación en la cual $\mathbf{F}_1$ es la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula y $\mathbf{a}_1$ la aceleración absoluta de ésta.

Si el sistema de referencia para el estudio de nuestro problema dinámico no es inercial, la aceleración $\mathbf{a}_1$ se expresa:

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_a + \mathbf{a}_c$$

y la ecuación fundamental de la Dinámica se escribe:

$$\mathbf{F}_1 = m(\mathbf{a}_r + \mathbf{a}_a + \mathbf{a}_c)$$

que puede ponerse de la forma:

$$\mathbf{F}_1 - m\mathbf{a}_a - m\mathbf{a}_c = m\mathbf{a}_r \qquad [10.2]$$

Esto pone de manifiesto que la ley fundamental de la Dinámica se verifica en sistemas de referencia no inerciales, siempre que tengamos en cuenta, además de las fuerzas $\mathbf{F}_1$ que actúan sobre la partícula, las fuerzas $-m\mathbf{a}_a$ y $-m\mathbf{a}_c$, llamadas *fuerza de inercia de arrastre* y *fuerza de inercia complementaria*, respectivamente.

Dependiendo de la naturaleza del problema y siempre que el error sea despreciable, podremos considerar unos u otros sistemas de referencia como inerciales. Así, en general, para estudios de movimientos sobre la superficie terrestre puede considerarse como inercial el sistema Tierra-estrellas, e incluso para casos especiales podrá considerarse como inercial un sistema ligado a la superficie terrestre. Las fuerzas de inercia adoptarán expresiones diferentes según el sistema que consideremos como fijo.

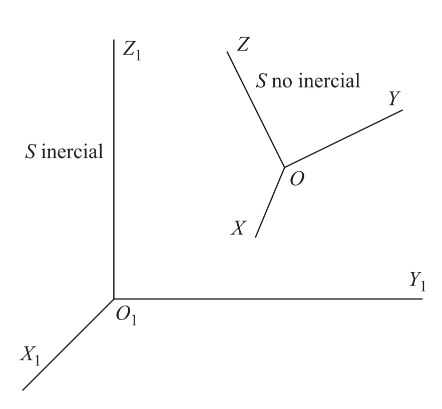


Figura 10.1.

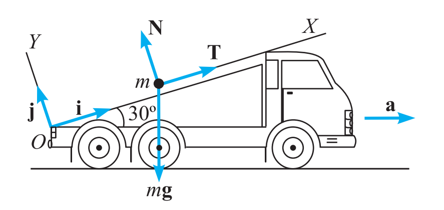


Figura 10.2.

EJEMPLO 10.1

En la plataforma de un camión se ha colocado una rampa que forma un ángulo de 30º con el suelo horizontal. Sobre ella se sitúa una masa *m*, que se sujeta con un cable como se indica en la Figura 10.2. Si el camión arranca con una aceleración **a** respecto al suelo, determine, expresando todas las ecuaciones en el sistema de referencia no inercial *XOY*, ligado al camión:

1.º La ecuación de la Dinámica para la masa *m*.
2.º La reacción de la rampa sobre la masa.
3.º La tensión del cable.
4.º El valor de **a** para el cual la masa se despega de la rampa.

Solución:

1.º Las fuerzas que actúan sobre la partícula son: la gravitacional, $m\mathbf{g}$; la reacción de la rampa, **N**, y la tensión del cable, **T**, con lo cual, la ecuación fundamental de la Dinámica en sistemas no inerciales [10.2], se expresa:

$$m\mathbf{a}_r = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{T} - m\mathbf{a}_a - m\mathbf{a}_c$$

Admitiendo que el sistema de referencia ligado al suelo es inercial, son: $\mathbf{a}_c = 0$ y $\mathbf{a}_a = \mathbf{a} = a\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathbf{i} - \frac{1}{2}\,\mathbf{j}\right)$, con lo cual se expresa:

$$m\mathbf{a}_r = \left(T - \frac{1}{2}mg - \frac{1}{2}ma\sqrt{3}\right)\mathbf{i} + \left(N - \frac{1}{2}mg\sqrt{3} + \frac{1}{2}ma\right)\mathbf{j}$$

2.º Puesto que la aceleración relativa de la masa es nula será:

$$N - \frac{1}{2}mg\sqrt{3} + \frac{1}{2}ma = 0 \qquad \text{de donde:} \qquad N = \frac{1}{2}mg\sqrt{3} + \frac{1}{2}ma$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{2}m(g\sqrt{3} - a)\,\mathbf{j}$$

3.º Por la misma razón del apartado anterior será $T - \frac{1}{2}mg - \frac{1}{2}ma\sqrt{3} = 0$, de donde:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}m(g + a\sqrt{3})\,\mathbf{i}$$

4.º En el instante de despegarse la masa de la rampa, deja de ejercer acción sobre ésta y, en consecuencia, desaparece la reacción de la rampa sobre la masa, $\mathbf{N} = 0$, es decir, $a = g\sqrt{3}$.

10.2 Sistema de referencia ligado a la superficie terrestre

En las experiencias realizadas sobre la superficie terrestre, medimos aceleraciones relativas $\mathbf{a}_r$ respecto a ejes de referencia ligados al suelo. Estos ejes no son inerciales y, por tanto, la ley de la Mecánica debe escribirse de la forma [10.2].

En las fuerzas que actúan sobre la partícula debemos distinguir las gravitacionales $m\mathbf{g}_1$ debidas a la atracción de la Tierra y los demás astros, de las restantes fuerzas aplicadas $\mathbf{F}_a$.

Como sistema de referencia absoluto elegimos el Tierra-estrellas, ya que en su movimiento alrededor del Sol las aceleraciones son despreciables. Por tanto, la aceleración de arrastre será la debida a una rotación uniforme.

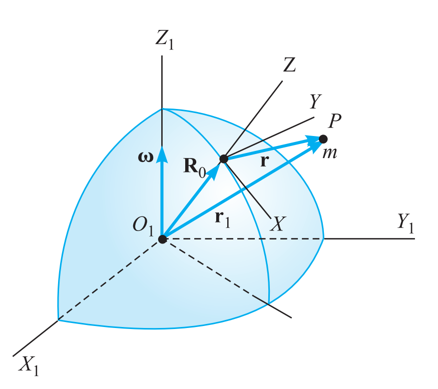


Figura 10.3.

Con todo ello, la ecuación fundamental de la Dinámica en el sistema móvil (Figura 10.3), se escribe:

$$\mathbf{F}_a + m\mathbf{g}_1 - m[\mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] - m\mathbf{a}_c = m\mathbf{a}_r \qquad [10.3]$$

siendo $\mathbf{a}_0 = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_0)$, la aceleración de arrastre de P se expresa:

$$\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R}_0 + \mathbf{r})] = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1)$$

y con ello:

$$\mathbf{F}_a + m\mathbf{g}_1 - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1) - m\mathbf{a}_c = m\mathbf{a}_r$$

$$\mathbf{F}_a + m\,[\mathbf{g}_1 - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1)] - m\mathbf{a}_c = m\mathbf{a}_r$$

y

Ecuación de la Dinámica terrestre

$$\mathbf{F}_a + m\mathbf{g} - m\mathbf{a}_c = m\mathbf{a}_r \qquad [10.4]$$

ecuación que constituye la ley de la Dinámica terrestre, y que pone de manifiesto que además de las fuerzas aplicadas $\mathbf{F}_a$ y el peso $m\mathbf{g}$, es necesario considerar las fuerzas complementarias de inercia, $-m\mathbf{a}_c$.

Condición necesaria de equilibrio

En el caso de estar la partícula material en equilibrio respecto al suelo, es $\mathbf{a}_r = 0$ y $\mathbf{a}_c = 0$, resultando:

$$\mathbf{F}_a + m\mathbf{g} = 0$$

expresión que constituye la condición necesaria de la Estática terrestre para la partícula.

La fuerza de inercia complementaria es, en general, despreciable, ya que la aceleración complementaria, aun en el caso más favorable de altas velocidades relativas y en dirección normal al eje de rotación, por ejemplo $v_r = 360$ km/h $= 100$ m/s, tiene por módulo:

$$a_c = 2\omega \cdot v_r < 2 \times 7{,}3 \times 10^{-5} \times 100 = 0{,}0146 \text{ m/s}^2$$

Sin embargo, como veremos a continuación, los efectos de $\mathbf{a}_c$ son de gran importancia, ya que al tener dirección distinta de $\mathbf{a}_r$, hace que la dirección del movimiento cambie.

En los casos en que sea despreciable $\mathbf{a}_c$, la ecuación fundamental de la Dinámica de la partícula en la superficie terrestre puede escribirse:

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}_r \qquad [10.5]$$

Expresión en la que en $\mathbf{F}$, además de las diferentes fuerzas que puedan actuar, debemos siempre considerar la acción de la gravedad, $m\mathbf{g}$.

EJEMPLO 10.2

Un ascensor arranca y para con aceleración constante **a**. En su interior se pesa una masa *m*. Cuál será su peso en cada uno de los siguientes supuestos:

a) Cuando el ascensor esté arrancando hacia arriba.

b) Cuando esté arrancando hacia abajo.

c) Cuando esté parando al subir.
d) Cuando esté parando al bajar.
e) Cuando se mueva uniformemente.
f) Si el ascensor cayera libremente.

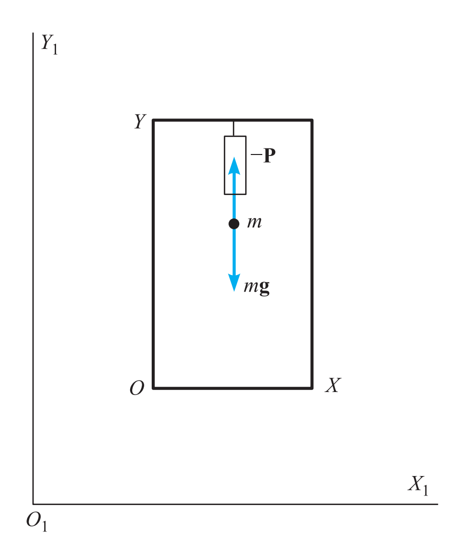


Figura 10.4.

Solución:

La ecuación de la Dinámica para la partícula m en el sistema de referencia móvil ligado al ascensor (Figura 10.4) se escribe:

$$m\mathbf{a}_r = -\mathbf{P} + m\mathbf{g} - m\mathbf{a}_a - m\mathbf{a}_c$$

Consideramos como sistema inercial el ligado a la superficie terrestre, con el eje O_1Y_1 según la vertical ascendente, en cuyo caso son: $\mathbf{a}_c = 0$ y $\mathbf{a}_a = \mathbf{a}$, con lo cual la ecuación de la Dinámica para la masa m se escribe:

$$m\mathbf{a}_r = -\mathbf{P} + m\mathbf{g} - m\mathbf{a}$$

Puesto que la partícula está en reposo dentro del ascensor, es $\mathbf{a}_r = 0$ y el peso se expresa:

$$\mathbf{P} = m(\mathbf{g} - \mathbf{a}) = -m(g\mathbf{j} + \mathbf{a})$$

peso que en cada uno de los casos indicados adopta los siguientes valores:

a) Cuando arranca hacia arriba es $\mathbf{a} = a\,\mathbf{j}$ y el peso es:

$$\mathbf{P} = -m(g + a)\mathbf{j}$$

es decir:

$$P = m(g + a)$$

b) Cuando arranca hacia abajo, es $\mathbf{a} = -a\,\mathbf{j}$ y el peso es:

$$\mathbf{P} = -m(g - a)\,\mathbf{j}$$

es decir:

$$P = m(g - a)$$

c) Si el ascensor está parando al subir, es $\mathbf{a} = -a\,\mathbf{j}$ y el peso es el mismo del caso anterior.

d) Si el ascensor está parando al bajar, es $\mathbf{a} = a\,\mathbf{j}$ resultando el mismo peso del apartado a).

e) Si el movimiento es uniforme, será $\mathbf{a} = 0$ y el peso es $P = mg$.

f) Si el ascensor cae libremente, su aceleración coincidirá con la de la gravedad, $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ y, por tanto, el peso de la masa m será nulo, $P = 0$, ella no ejercerá acción alguna sobre el ascensor, ni éste sobre ella.

10.3 Caída libre de un cuerpo sobre la superficie terrestre

Estudiemos la caída libre de un cuerpo de masa m sobre la superficie terrestre, en un lugar de latitud λ. El sistema de referencia móvil tiene como eje de las zetas la vertical del lugar, el origen de coordenadas es la intersección de aquélla con la

superficie del suelo, el plano XY es el horizontal que pasa por O, y el eje OY la tangente al paralelo del lugar (Figura 10.5).

Por ser la caída libre, $\mathbf{F}_a = 0$, y la Ecuación [10.4] se reduce a:

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r \qquad [10.6]$$

En el sistema de referencia ligado a la superficie del suelo es:

$$\mathbf{g} = -g\,\mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega[-\cos(\lambda + \alpha)\mathbf{i} + \operatorname{sen}(\lambda + \alpha)\mathbf{k}]$$

y, en el instante siguiente al comienzo de la caída, $\mathbf{v}_r = -v_r\mathbf{k}$, resultando para la [10.6] la expresión:

$$\mathbf{a}_r = -g\,\mathbf{k} + 2\omega\, v_r \cos(\lambda + \alpha)\,\mathbf{j}$$

La componente de la aceleración relativa sobre el plano horizontal tiene la dirección de la tangente al paralelo y sentido hacia el este, haciendo que el cuerpo que cae se desvíe en el mismo sentido. Esta desviación es realmente pequeña, pues para alturas de caída de 100 m se obtienen desviaciones de 1,6 cm, por tanto, en la práctica puede despreciarse y suponerse que el cuerpo cae según la vertical.

Para $\lambda = 90 - \alpha$, la partícula cae estrictamente según la vertical. Para $90 - \alpha < \lambda < 90$, la partícula se desviará hacia el oeste.

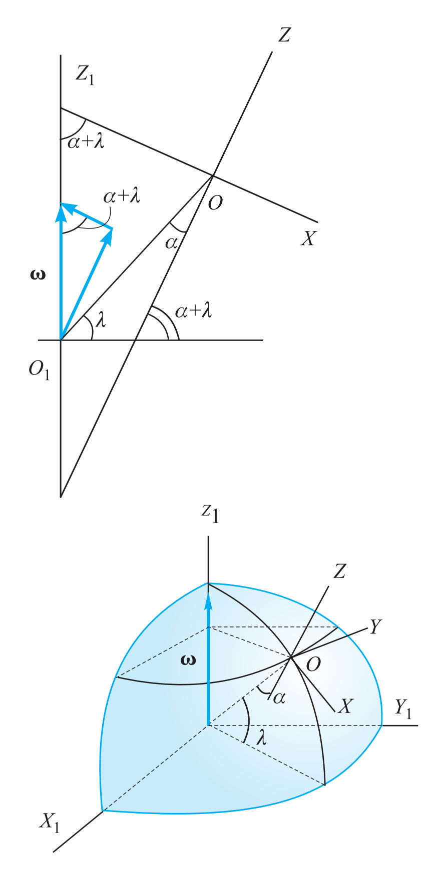


Figura 10.5.

10.4 Movimiento sobre la superficie terrestre

La ecuación vectorial del movimiento será la [10.4]:

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{F}_a + m\mathbf{g} - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r)$$

Suponemos que el movimiento se produce en el plano horizontal y que, por tanto, en él está contenida la velocidad relativa. Refiriendo el movimiento al sistema ligado a la superficie terrestre, indicado en el epígrafe anterior, la aceleración complementaria se escribe:

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r = 2\omega \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\cos(\lambda + \alpha) & 0 & \operatorname{sen}(\lambda + \alpha) \\ v_{rx} & v_{ry} & 0 \end{vmatrix} =$$

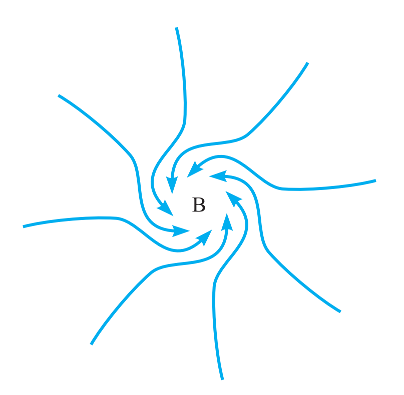
$$= 2\omega[-v_{ry}\operatorname{sen}(\lambda + \alpha)\mathbf{i} + v_{rx}\operatorname{sen}(\lambda + \alpha)\mathbf{j} - v_{ry}\cos(\lambda + \alpha)\mathbf{k}]$$

y la fuerza de inercia complementaria es:

$$-m\mathbf{a}_c = 2m\omega[v_{ry}\operatorname{sen}(\lambda + \alpha)\mathbf{i} - v_{rx}\operatorname{sen}(\lambda + \alpha)\mathbf{j} + v_{ry}\cos(\lambda + \alpha)\mathbf{k}]$$

La fuerza de inercia complementaria modifica la trayectoria, y el sentido en el cual el móvil es desviado depende de si es $\lambda + \alpha \gtrless 0$, es decir, y puesto que α es muy pequeño, de si el movimiento se produce en el hemisferio norte o en el sur y de si es $v_{rx} \gtrless 0$ y $v_{ry} \gtrless 0$. De todas las combinaciones posibles se deduce que el móvil siempre es desviado hacia la derecha de su trayectoria en el hemisferio norte y hacia la izquierda en el hemisferio sur. Asimismo, hay una fuerza que trata de despegar el móvil del suelo cuando es $v_{ry} > 0$ y que trata de apretarlo contra él cuando es $v_{ry} < 0$.

La fuerza complementaria de inercia contribuye a producir varios fenómenos observables en la naturaleza, como pueden ser un mayor desgaste del raíl derecho



Centro de baja presión. Hemisferio norte

Figura 10.6.

Péndulo de Foucault

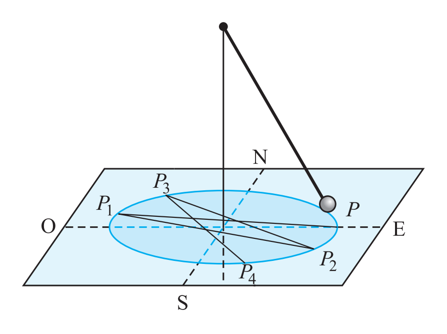


Figura 10.7.

de la vía del tren, en el sentido de la marcha de éste, en el hemisferio norte y del izquierdo en el sur; o una mayor erosión en la margen derecha del cauce de un río en el hemisferio norte y de la margen izquierda en el sur.

Asimismo, si en la atmósfera se crea un centro de baja presión, las moléculas de aire fluirán hacia él y debido a la componente horizontal de $-m\mathbf{a}_c$ serán desviadas hacia la derecha en el hemisferio norte y hacia la izquierda en el sur, resultando que la circulación del aire en torno a un centro de baja presión se hace en sentido contrario a las agujas de un reloj en el hemisferio norte (Figura 10.6) y en el mismo sentido que las agujas del reloj en el sur.

Finalmente, consideremos un péndulo que oscila con una amplitud suficientemente pequeña como para suponer que el movimiento se produce dentro del plano horizontal. El punto de oscilación del péndulo está situado en la vertical del lugar e inicialmente la masa de él se sitúa en un punto P de la dirección este. Si la Tierra no girase, el péndulo oscilaría sin salirse de la línea este-oeste, pero debido a la rotación de ésta, el plano de oscilación se desvía constantemente hacia la derecha en el hemisferio norte (Figura 10.7) y a la izquierda en el sur. Este efecto fue comprobado experimentalmente en 1851 por Foucault. Para ello, utilizó un péndulo de 67 m de longitud que colgó de la cúpula de la Basílica de los Inválidos, en París. La masa del péndulo dejaba caer un reguero de arena, y se comprobó que el plano de oscilación giraba $11^{\circ}15'$ por hora, lo que constituyó una nueva prueba de la rotación de la Tierra.

10.5 Movimiento en un campo de fuerzas constantes

Cuando la partícula sea movida por un campo de fuerzas constantes **F**, la aceleración que adquiera será constante, $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$, y el movimiento uniformemente acelerado.

De la definición de aceleración, $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, podemos expresar $d\mathbf{v} = \mathbf{a}\,dt$, cuya integración, por ser **a** constante, es:

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}\,t + \mathbf{v}_0 \qquad [10.7]$$

Expresión que nos da la velocidad de la partícula en función del tiempo y de la velocidad inicial.

Una segunda integración nos permite obtener la posición de la partícula:

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2}\,\mathbf{a}\,t^2 + \mathbf{v}_0\,t + \mathbf{r}_0 \qquad [10.8]$$

La Ecuación [10.7] nos expresa **v** como combinación lineal de los vectores **a** y $\mathbf{v}_0$, lo que nos indica que **v** es coplanario con ellos, y como **a** y $\mathbf{v}_0$ son dos vectores constantes, el plano que determinan es fijo. En este plano está siempre contenido **v** y en él se realiza el movimiento. La Ecuación [10.8], ecuación vectorial de la trayectoria del movimiento, es la de una parábola, situada en el plano que pasa por el extremo de $\mathbf{r}_0$, y que está definido por los vectores **a** y $\mathbf{v}_0$.

Movimiento libre en el campo gravitacional

En el campo gravitacional terrestre es $\mathbf{a} = \mathbf{g}$, prácticamente constante para entornos no demasiado grandes. El movimiento se realizará en un plano vertical, ya que debe contener a **g**, plano vertical que pasa por el punto de lanzamiento y queda determinado por la velocidad inicial, $\mathbf{v}_0$. Tomando como plano vertical el XZ y como eje OZ, la vertical ascendente (Figura 10.8), son: $\mathbf{a} = -g\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{v}_0 = v_{ox}\,\mathbf{i} + v_{0z}\,\mathbf{k}$, con lo que la [10.7] se escribe:

$$\mathbf{v} = -g\,t\,\mathbf{k} + v_{0x}\,\mathbf{i} + v_{0z}\,\mathbf{k} = v_{0x}\,\mathbf{i} + (v_{0z} - gt)\,\mathbf{k}$$

Su integración da:

$$\mathbf{r} = v_{0x}\, t\, \mathbf{i} + \left(v_{0z}\, t - \frac{1}{2} g t^2 \right) \mathbf{k}$$

habiendo tomado como origen de coordenadas el punto de lanzamiento.

La ecuación de la trayectoria en paramétricas es:

$$x = v_{0x}\, t \quad ; \quad z = v_{0z}\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

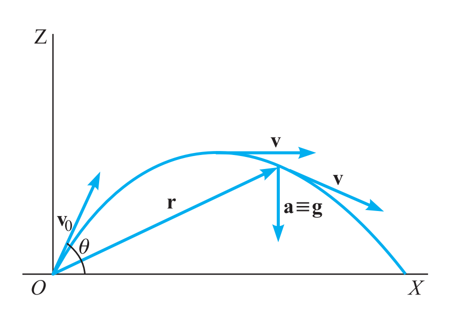


Figura 10.8.

y en cartesianas se obtiene eliminando el tiempo:

$$z = \frac{v_{0z}}{v_{0x}} x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} x^2 \quad \text{o bien:} \quad z = \operatorname{tg}\theta\, x - \frac{1}{2} \frac{g x^2}{v_0^2 \cos^2\theta}$$

Altura máxima

La altura máxima alcanzada se obtiene en el instante en el cual se anula v_z:

$$v_z = -gt + v_{0z} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_{0z}}{g}$$

Con este valor del tiempo se obtiene la altura máxima:

$$z_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \frac{v_{0z}^2}{g}$$

Tiempo de vuelo

El tiempo de vuelo, en el caso de que el móvil vuelva a la horizontal del punto de lanzamiento, será el tiempo que tarde en anularse z, es decir:

$$t_v = \frac{2 v_{0z}}{g}$$

que es el doble del tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima, lo que nos indica que emplea el mismo tiempo en subir que en caer, cuando cae en el plano horizontal que pasa por el punto de lanzamiento.

Alcance máximo

El alcance máximo será el valor de x particularizado para el tiempo de vuelo:

$$x_{\text{máx}} = \frac{2 v_{0x} \cdot v_{0z}}{g}$$

En función del módulo de la velocidad inicial v_0 y del ángulo de lanzamiento θ, que forma la velocidad inicial con el eje horizontal, se expresan:

$$z_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g} \quad ; \quad t_v = \frac{2 v_0 \operatorname{sen}\theta}{g} \quad \text{y} \quad x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g}$$

Para una velocidad de lanzamiento de módulo constante v_0, el mayor alcance se consigue para $\operatorname{sen} 2\theta = 1$, es decir, $\theta = \pi/4$.

10.6 Caída libre

Consideremos una masa m que se deja caer desde una altura h sobre la superficie terrestre. Tomando el eje OZ como la vertical ascendente (Figura 10.9) y

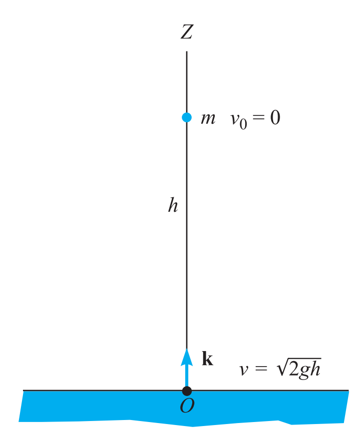


Figura 10.9.

despreciando el efecto de la aceleración complementaria, la única fuerza que actúa sobre ella se expresa: $\mathbf{F} = mg\,\mathbf{k}$.

La ecuación general de la Dinámica da: $\mathbf{a} = -g\mathbf{k}$, que integrada es: $\mathbf{v} = -g\,t\,\mathbf{k}$, ya que es $\mathbf{v}_0 = 0$.

Una nueva integración da: $z = -1/2gt^2 + h$.

El tiempo de caída, o tiempo que tarda la masa en tocar el suelo, es el tiempo que tarda en anularse z: $0 = -1/2\,gt_c^2 + h$, de donde $t_c = \dfrac{\sqrt{2g}}{h}$ y la velocidad en el instante de tocar el suelo:

$$\mathbf{v}_c = -gt_c\,\mathbf{k} = -g\sqrt{2h/g}\,\mathbf{k} = -\sqrt{2gh}\,\mathbf{k}$$

10.7 Cantidad de movimiento. Impulso

Definición. Se denomina cantidad de movimiento de una partícula al vector producto de su masa por su vector velocidad; lo designaremos con la letra **p**:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \qquad [10.9]$$

Sus dimensiones son MLT^{-1} y su unidad, que no tiene nombre especial, en el S.I. es el $\text{kg} \cdot \text{m/s}^{-1}$.

Teorema. Si derivamos [10.9] respecto al tiempo, suponiendo la masa constante, es:

$$\dot{\mathbf{p}} = m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{a} = \mathbf{F} \qquad [10.10]$$

lo que nos dice que la *derivada respecto al tiempo de la cantidad de movimiento es igual a la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula móvil*.

Este teorema, denominado de la cantidad de movimiento, es de suma importancia y de total validez en todos los campos de la Física. La segunda ley de Newton es válida ni para el mundo microscópico ni para altas velocidades, y es paradójico que el teorema de la cantidad de movimiento, que se ha deducido de ella, sea de validez general. Este teorema es reflejo de una de las leyes fundamentales de la naturaleza.

Conservación. Si sobre la partícula no actúa fuerza alguna, $\mathbf{F} = 0$, la cantidad de movimiento de ella debe permanecer constante, $\mathbf{p} =$ cte., y el movimiento será rectilíneo uniforme, $\mathbf{v} =$ cte.

En particular, si la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula tiene proyección nula sobre un cierto eje, la cantidad de movimiento sobre este eje permanecerá constante y la proyección del movimiento sobre él será un movimiento uniforme. Si tomamos como eje sobre el cual la proyección de la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula es nula al eje de las equis, es:

$$\dot{p}_x = 0 \quad ; \quad p_x = C \quad ; \quad v_x = \frac{C}{m} = C_1 \quad ; \quad x = C_1 t + x_0$$

Impulso. Escribamos la Expresión [10.10] de la forma $d\mathbf{p} = \mathbf{F}dt$ e integremos desde $t = t_0$, momento en el que $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$, hasta el instante $t = t_1$, en el que $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1$:

$$\int_{\mathbf{p}_0}^{\mathbf{p}_1} d\mathbf{p} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}\,dt \quad ; \quad \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}\,dt \qquad [10.11]$$

Pues bien, al producto de la fuerza por el tiempo que está actuando se le denomina *impulso* y la Ecuación [10.11] dice que el *impulso recibido por la partícula es igual a la variación de su cantidad de movimiento*. En consecuencia, el impulso es una magnitud vectorial y las unidades en que se mide el impulso son las mismas de la cantidad de movimiento.

EJEMPLO 10.3

Veamos cuál es el impulso debido a las fuerzas de la gravedad en el movimiento de caída libre. Podemos calcular el impulso como variación de la cantidad de movimiento, es decir:

$$\mathbf{I} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 = m\sqrt{2gh}\,\mathbf{k}$$

También puede calcularse como la integral de la fuerza por el tiempo, durante el intervalo de actuación:

$$\mathbf{I} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}\,dt = \int_0^{t_c} -mg\,dt\,\mathbf{k} = -mg[t]_0^{t_c}\mathbf{k} = -m\sqrt{2gh}\,\mathbf{k}$$

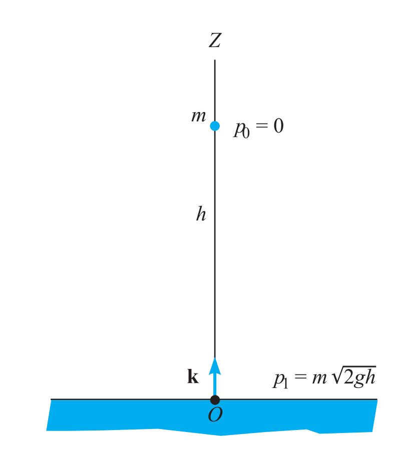


Figura 10.10.

10.8 Momento cinético o momento de la cantidad de movimiento. Ley de las áreas

Definición. El momento de la cantidad de movimiento, respecto a un punto fijo *O*, también denominado momento cinético o momento angular (Figura 10.11), es:

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\,\mathbf{r} \times \mathbf{v} \qquad [10.12]$$

Teorema: Si derivamos respecto al tiempo la Ecuación [10.12], es:

$$\dot{\mathbf{L}} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}$$

por ser $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0$, y teniendo en cuenta el teorema de la cantidad de movimiento resulta:

$$\dot{\mathbf{L}}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}_0(\mathbf{F}) \qquad [10.13]$$

que es la expresión del teorema del momento cinético: *la derivada respecto al tiempo del momento cinético de la partícula es igual al momento resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre ella*.

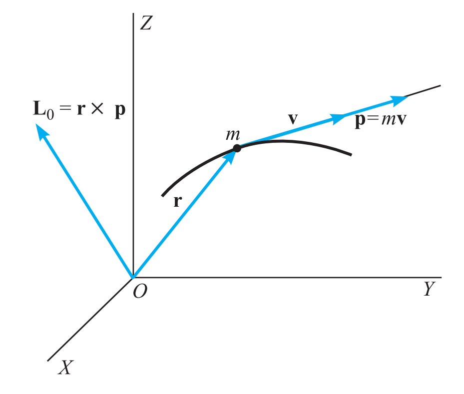


Figura 10.11.

Conservación. Ley de las Áreas: Si el momento resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula es nulo, el momento cinético de ésta debe permanecer constante:

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0 \qquad \text{de donde:} \qquad \mathbf{L}_0 = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{cte.}$$

Por tanto, el plano determinado por **r** y **v** es fijo (Figura 10.12), perpendicular a la dirección fija de $\mathbf{L}_0$ y contiene la posición inicial del móvil; en consecuencia, el movimiento es plano.

En estas condiciones se verifica la denominada *ley de las áreas:*

$$\mathbf{L}_0 = m\mathbf{r} \times d\mathbf{r}/dt = m2\,\frac{dA}{dt}\,\mathbf{n}$$

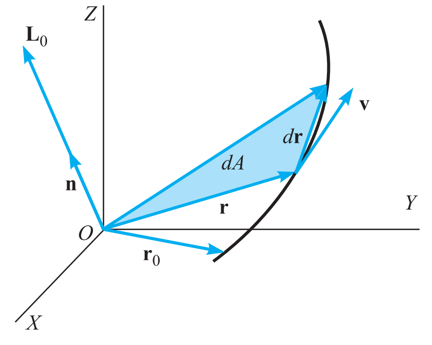


Figura 10.12.

siendo **n** un vector unitario normal al plano de la trayectoria. Por tanto, es

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L_0}{2m} \qquad \text{de donde:} \qquad A = \frac{L_0}{2m}\, t$$

El área barrida por el radio vector es proporcional al tiempo empleado en barrerla, siendo la constante de proporcionalidad $L_0/2m$.

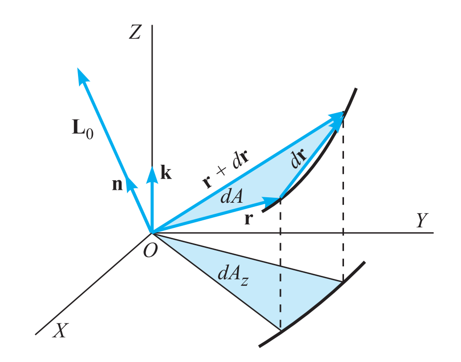


Figura 10.13.

En particular, si el momento resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula tiene proyección nula sobre un cierto eje fijo, la proyección del momento cinético sobre ese eje será constante. Tomando como eje fijo el de las zetas (Figura 10.13), es $\mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{k} = 0$, por tanto, debe ser:

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{k} = c_1 = (\mathbf{r}\times\mathbf{p})\cdot\mathbf{k} = m\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{v}) = m\,\frac{\mathbf{r}\times d\mathbf{r}}{dt}\cdot\mathbf{k} = 2m\,\frac{dA}{dt}\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} = 2m\,\frac{da}{dt}$$

y, en consecuencia:

$$A_z = \frac{L_{0z}}{2m}(t - t_0)$$

El área barrida por la proyección del radio vector sobre un plano normal al eje, sobre el cual la proyección del momento cinético es constante, es proporcional al tiempo empleado en barrerla.

Impulso angular. Podemos escribir la Expresión [10.13] en la forma $d\mathbf{L}_0 = \mathbf{M}_0\, dt$, que al integrarla entre dos instantes resulta:

$$\mathbf{L}_{02} - \mathbf{L}_{01} = \int \mathbf{M}_0\, dt = \mathbf{G} \qquad [10.14]$$

lo que establece que *la variación del momento cinético de una partícula entre dos instantes es igual al impulso recibido entre esos instantes*. El impulso angular puede determinarse mediante la integración del momento de las fuerzas exteriores o bien mediante el cálculo de la variación del momento cinético.

EJEMPLO 10.4

Una partícula de masa m se mueve sobre un plano horizontal con velocidad constante $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$, estando unida a un punto fijo O del plano mediante un hilo ideal de longitud l. La distancia desde O a la trayectoria de la partícula es $d \ll l$. Tomando como origen de tiempos el instante en el que la partícula pasa por el pie H de la perpendicular a la trayectoria desde O (Figura 10.14), calculemos:

Antes de tensarse el hilo:

1. El tiempo que tarda en tensarse.
2. La cantidad de movimiento, **p**, y el momento cinético respecto a O, $\mathbf{L}_0$.
3. El área barrida por el radio vector en función del tiempo.

Una vez tensado el hilo:

4. Razonar si se conservan o no las citadas magnitudes.
5. La velocidad angular de la partícula alrededor de O.
6. El área barrida por el radio vector en función del tiempo.

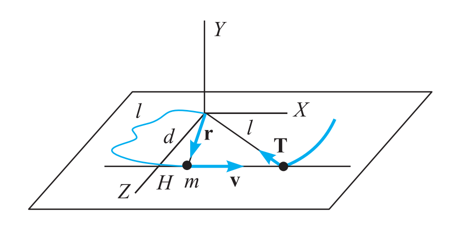


Figura 10.14.

Solución:

1. Puesto que la velocidad es constante, el espacio recorrido será $x = vt$. En el instante de tensarse el hilo, el espacio recorrido será $l_1 = \sqrt{l^2 - d^2}$ y se verificará:

$$\sqrt{l^2 - d^2} = vt_1 \qquad \text{de donde:} \qquad t_1 = \frac{1}{v}\sqrt{l^2 - d^2}$$

2. La cantidad de movimiento es $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = mv\,\mathbf{i}$ y el momento cinético respecto a O es $\mathbf{L}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = (x\,\mathbf{i} + d\,\mathbf{k}) \times m\,v\,\mathbf{i} = m\,d\,v\,\mathbf{j}$.

3. El área barrida por el radio vector es un triángulo rectángulo, de altura d y base x:

$$A = \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\,d\,v\,t = \frac{L_0}{2m}$$

4. La resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula es:

$$\mathbf{R} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{T} = \mathbf{T} \neq 0$$

luego no se conserva $\mathbf{p}$.

El momento cinético respecto a O es $\mathbf{M}_0 = 0$, luego $\mathbf{L}_0$ se conserva.

5. Ahora, el momento cinético respecto a O es:

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}' = l\,\mathbf{u}_r \times m\,l\,\omega\,\mathbf{u}_\theta = m\,l^2\omega\,\mathbf{j}$$

Puesto que $\mathbf{L}_0$ se conserva, debe ser $m\,d\,v = m\,l^2\omega$, de donde $\omega = d\,v/l^2$.

6. El área elemental barrida por el radio vector es $dA = \frac{1}{2}\,l^2\,d\theta = \frac{1}{2}\,l^2\omega\,dt$, expresión que integrada da:

$$A = \frac{1}{2}\,l^2\omega\,t = \frac{L_0}{2m}$$

10.9 Dinámica del movimiento circular

Analicemos un movimiento circular de centro O, radio $\mathbf{r}$ y velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, realizado por una partícula de masa m (Figura 10.15).

La cantidad de movimiento es $\mathbf{p} = m\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.

Momento cinético. El momento cinético de esta partícula respecto a O se expresa:

$$\mathbf{L}_0 = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = mr^2\boldsymbol{\omega} = I\boldsymbol{\omega} \qquad [10.15]$$

denominándose a $I = mr^2$, momento de inercia de la partícula respecto al eje de giro.

Ecuación de la Dinámica. Derivando respecto al tiempo la [10.15], se obtiene:

$$\mathbf{L}_0 = I\boldsymbol{\alpha} \qquad [10.16]$$

siendo $\boldsymbol{\alpha}$ la aceleración angular de la partícula.

El teorema del momento cinético para el movimiento circular se expresa:

$$I\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}_0(\mathbf{F}) \qquad [10.17]$$

que es la ecuación de la Dinámica de la partícula en el movimiento circular.

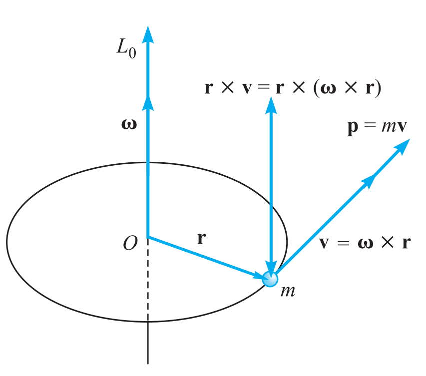


Figura 10.15.

10.10 Energía cinética. Teorema de la energía cinética

Definición. La energía cinética de una partícula de masa m que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$, se define como *la mitad del producto de su masa por el cuadrado del módulo de su velocidad* y se expresa:

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \qquad [10.18]$$

La energía cinética puede expresarse en función de la cantidad de movimiento de la partícula de la siguiente forma:

$$T = \frac{1}{2} m \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\mathbf{p}}{m} = \frac{p^2}{2m}$$

Teorema. Derivando respecto al tiempo la expresión de la energía cinética [10.18], se obtiene:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

La variación de la energía cinética en unidad de tiempo es igual a la potencia desarrollada por las fuerzas que actúan sobre la partícula.

La fórmula anterior puede expresarse multiplicada por dt:

$$dT = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

e integrando entre los estados 1 y 2, resulta:

$$T_2 - T_1 = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = W_{12} \qquad [10.19]$$

que constituye la expresión del teorema de la energía cinética, cuyo enunciado es: *la variación de la energía cinética es igual al trabajo producido por las fuerzas aplicadas a la partícula*.

Conservación. La energía cinética de la partícula únicamente se conservará cuando el trabajo producido por las fuerzas aplicadas a ella sea nulo, es decir, cuando la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula sea nula o cuando el desplazamiento sea normal a esa resultante. En esta situación la energía cinética se conserva y, por tanto, también el módulo de la velocidad, pero no es necesario que se conserve ésta como vector.

10.11 Conservación de la energía mecánica

Si las fuerzas que actúan sobre la partícula no son disipativas, es decir, si no hay fuerza alguna que transforme la energía mecánica en otras formas de energía, se dice que hay conservación de la energía mecánica, en cuyo caso ésta permanece como constante independiente del tiempo.

Si, además, las fuerzas que actúan sobre la partícula derivan de un potencial U, es decir, si se verifica $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dU$, la ecuación [10.19] se escribe:

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2$$

o bien:

$$E_m = T_1 + U_1 = T_2 + U_2 \qquad [10.20]$$

Esta ecuación constituye el teorema de conservación de la energía mecánica y nos dice que *cuando las fuerzas que actúan sobre la partícula no son disipativas y derivan de un potencial, la suma de las energías cinética y potencial de la partícula permanece constante.*



EJEMPLO 10.5

Dos toboganes arrancan a la misma altura $2R$ y acaban ambos en la superficie del agua. Están formados cada uno por dos cuartos de circunferencia de radio R, pero situados de forma diferente, como se indica en la Figura 10.16. Si desde el alto de los toboganes parten sendos niños al mismo tiempo y no hay disipación de energía, calculemos:

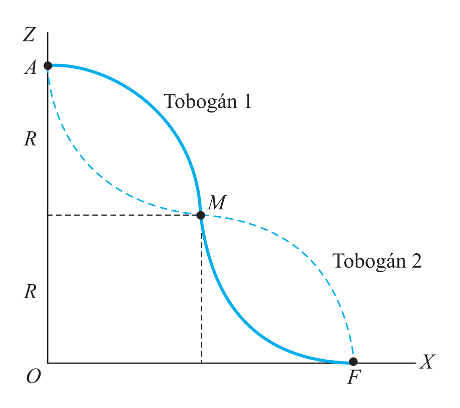


Figura 10.16.

1.º La velocidad con que llega al final del tobogán cada uno de ellos.

2.º La velocidad que cada uno lleva en función de la cota z, respecto a la superficie del agua.

Solución:

1.º La conservación de la energía mecánica entre los puntos superior e inferior de los toboganes se expresa, en ambos casos:

$$0 + mg2R = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

por tanto, ambos llegan al final con la misma velocidad $v = 2\sqrt{Rg}$.

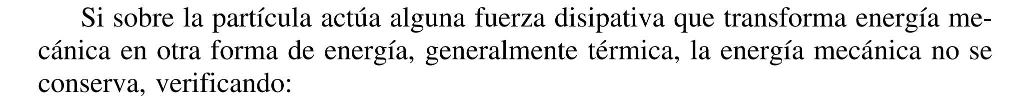
2.º La conservación de la energía mecánica entre el punto superior y un punto de cota z se expresa para ambos:

$$0 + mg2R = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$$

por tanto, la velocidad en función de la cota se expresa de igual forma para ambos:

$$v = \sqrt{2g(2R - z)}$$

El niño que desciende por el tobogán de línea continua, en el tramo AM, transforma su energía potencial en cinética de forma lenta, mientras que el niño que baja por el tobogán de línea discontinua lo hace de forma rápida. Ambos tendrán la misma velocidad en M, ya que ésta depende únicamente de z. En el tramo MF sucede lo contrario, el primer niño transforma su energía potencial en cinética rápidamente, mientras que el segundo lo hace de forma lenta.



Si sobre la partícula actúa alguna fuerza disipativa que transforma energía mecánica en otra forma de energía, generalmente térmica, la energía mecánica no se conserva, verificando:

$$E_{m1} = E_{m2} + E_d \qquad [10.21]$$

La energía mecánica de la partícula en el estado 1 es igual a la que le queda en el estado 2, más la disipada al pasar del estado 1 al 2:

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 + E_d \qquad [10.22]$$

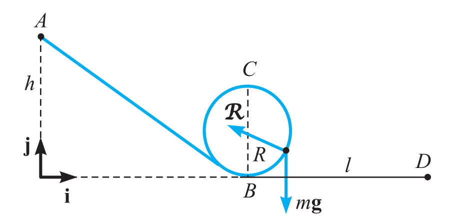


Figura 10.17.

EJEMPLO 10.6

Una masa puntual m se desliza por la pista que se indica en la Figura 10.17, partiendo del reposo en el punto A. Calculemos:

a) La velocidad de la partícula en C.

b) La reacción de la pista sobre la partícula y su valor en C.

c) La altura h para que la reacción de la pista sea nula en C.

d) La distancia l recorrida sobre la horizontal, después de salir de B, sabiendo que hay un coeficiente de rozamiento al resbalamiento μ, entre B y D.

Solución:

a) El teorema de la conservación de la energía mecánica entre A y C se escribe:

$$mgh = mg2R + \frac{1}{2}mv_c^2$$

de donde:

$$v_c = \sqrt{2g(h - 2R)}$$

b) La ecuación de la Dinámica para la partícula es:

$$m\mathbf{a} = -mg\,\mathbf{j} + \mathcal{R}, \qquad \text{de donde:} \qquad \mathcal{R} = m(g\,\mathbf{j} + \mathbf{a})$$

La aceleración en C es:

$$\mathbf{a}_c = -\frac{v_c^2}{R}\,\mathbf{j}$$

Ya que en C hay un máximo de energía potencial, luego hay un mínimo de la energía cinética, es decir, un mínimo de v, luego debe ser $dv/dt = R d\omega/dt = 0$. La reacción en C es:

$$\mathcal{R}_c = m\left(g - \frac{v_c^2}{R}\right)\mathbf{j} = mg\left(5 - \frac{2h}{R}\right)\mathbf{j}$$

c) Para que sea $\mathcal{R} = 0$, ha de ser $h = 5R/2$.

d) El teorema de la energía cinética aplicado entre B y D da:

$$T_D - T_B = \int_B^D \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}$$

y, puesto que son $T_D = 0$, $\mathbf{f} = -\mu m g\,\mathbf{i}$ y $d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i}$, resulta:

$$-\frac{1}{2}mv_B^2 = -\int_0^l \mu mg\,dx = -\mu mgl$$

La velocidad en B se obtiene por aplicación de la conservación de la energía mecánica entre A y B:

$$mgh = \frac{1}{2}\, m \cdot v_B^2 \quad \Rightarrow \quad v_B^2 = 2gh$$

con lo cual:

$$\frac{1}{2}\, m2gh = \mu mgl$$

y de aquí:

$$l = \frac{h}{\mu}$$

10.12 Movimiento en campos potenciales. Caso unidimensional

Analicemos el movimiento de una partícula de masa m sobre la que actúan fuerzas que derivan de un potencial. Consideremos el caso unidimensional y sea la función energía potencial $U(x)$, que ha sido representada en la Figura 10.18.

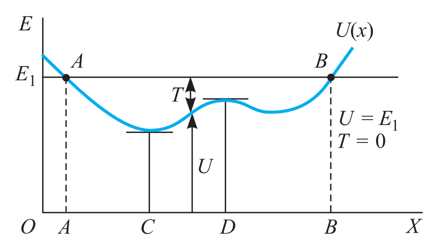


Figura 10.18.

Si el sistema es conservativo, la energía mecánica de la partícula se mantendrá constante:

$$E = T(x) + U(x) = \text{cte.}$$

Consideremos una partícula cuya energía mecánica sea $E_1 = \text{cte}$. La representación de ésta en la Figura 10.18 es una línea recta que corta a la de energía potencial en dos puntos, A y B, en los cuales se verifica $E_1 = U$ y, por tanto, en esos puntos, es $T = 0$ y, en consecuencia, $v = 0$. A estos puntos se les denomina *puntos de retroceso*, porque la partícula, al llegar a uno de ellos, se para y vuelve en sentido contrario. En efecto, la fuerza que actúa sobre la partícula es $F = -\partial U/\partial x$, es decir, es la pendiente de la curva de energía potencial cambiada de signo. Al llegar la partícula a B, se para y como la pendiente de $U(x)$ es positiva, la fuerza que actúa tiene sentido contrario y lleva la partícula hacia O. Al llegar a A, se para y como allí la pendiente de $U(x)$ es negativa, la fuerza que actúa tiene sentido positivo y la partícula vuelve hacia B.

Puntos de retroceso

En todo instante debe ser:

$$E_1 = T(x) + U(x) = \frac{1}{2}\, mv^2 + U(x)$$

luego la velocidad de la partícula en cada posición es:

$$v(x) = \sqrt{2[E_1 - U(x)]/m}$$

Hay que hacer notar que el menor valor de v no está en el máximo de U, sino en el mayor valor de U, es decir, no está en D sino en A o B. Igualmente, el mayor valor de v esta en los puntos de menor valor de U que, en general, no tiene por qué coincidir con un mínimo de U, aunque en el caso representado si coincida.

En los puntos de tangente horizontal la fuerza sobre la partícula es nula, son *puntos de equilibrio*, $\partial U/\partial x = 0$. Si al apartar la partícula de su posición de equilibrio, en ambos sentidos, las fuerzas del campo siempre la devuelven hacia aquél, el punto se dice de *equilibrio estable* (punto C). Los puntos de mínimo de la función

Puntos de equilibrio

energía potencial son de equilibrio estable. Por el contrario, si al apartar la partícula de su posición de equilibrio, las fuerzas del campo la alejan más de ella, el punto se dice de *equilibrio inestable* (punto D). Los puntos de máximo de la función energía potencial son puntos de equilibrio inestable.

EJEMPLO 10.7 Campo gravitacional próximo

La función de energía potencial para un campo gravitacional próximo ya fue obtenida en el Capítulo 8 y, tomando el eje OZ según la vertical ascendente, se expresa:

$$U = mgz$$

habiendo tomado el origen de potenciales en la superficie del planeta que crea el campo.

La conservación de la energía mecánica nos relaciona la velocidad de la partícula con su posición dentro del campo:

$$E_1 = \frac{1}{2}mv^2 + mgz \qquad \text{de donde:} \qquad v = \sqrt{2(E_1/m - gz)}$$

Los puntos de retroceso $T = 0$ o $E_1 = U = mgz$ nos dan la altura máxima que puede alcanzar la partícula en función de su energía, $z_{máx} = E_1/mg$. Por el contrario, la velocidad máxima se dará en puntos de potencial nulo:

$$E_1 = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{de donde:} \qquad v_{máx} = \sqrt{2E_1/m}$$

El campo en este caso es $\mathbf{F} = -\partial U/\partial z\,\mathbf{k} = -mg\,\mathbf{k}$.

Por tanto, siempre el campo lleva la partícula hacia posiciones de menor potencial.

EJEMPLO 10.8 Campo de las fuerzas elásticas

La energía potencial de las fuerzas elásticas ya fue deducida en el Capítulo 8 y, tomando el eje OX en dirección del campo, se expresa: $U = \frac{1}{2}kx^2$, expresión en la cual k es la constante elástica y hemos tomado origen de potenciales en $x = 0$. La conservación de la energía mecánica se expresa ahora:

$$E_1 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

de donde podemos obtener la velocidad de la partícula en función de su posición dentro del campo:

$$v = \sqrt{(2E_1 - kx^2)/m}$$

Los puntos de retroceso $T = 0$, $E_1 = \frac{1}{2}kx^2$, son los mayores valores de x:

$$x_{máx} = \sqrt{\frac{2E_1}{m}}$$

La partícula de energía E_1 sólo puede moverse en posiciones que verifiquen:

$$-\sqrt{2E_1/m} < x < \sqrt{2E_1/m}$$

La máxima velocidad se dará en puntos de potencial nulo, $x = 0$:

$$E_1 = \frac{1}{2}mv^2 \quad , \quad v_{\text{máx}} = \sqrt{2E_1/m}$$

Existe un punto de equilibrio $\partial U/\partial x = kx = 0$, el $x = 0$, que es de equilibrio estable, ya que el campo $\mathbf{F} = -\partial U/\partial x\,\mathbf{i} = -kx\,\mathbf{i}$, siempre lleva la partícula hacia esa posición, tanto si es $x < 0$ como si es $x > 0$.

10.13 Fuerzas centrales

Se dice que una fuerza es central cuando pasa constantemente por un punto fijo denominado centro de fuerzas. El momento de las fuerzas exteriores respecto a este punto es nulo y el teorema del momento cinético da:

$$\dot{\mathbf{L}}_0 = 0$$

y, por tanto:

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{cte.}$$

luego el plano determinado por **r** y **v** es fijo, perpendicular a la dirección fija de $\mathbf{L}_0$ y contiene la posición inicial del móvil, en consecuencia, el movimiento es plano (Figura 10.19).

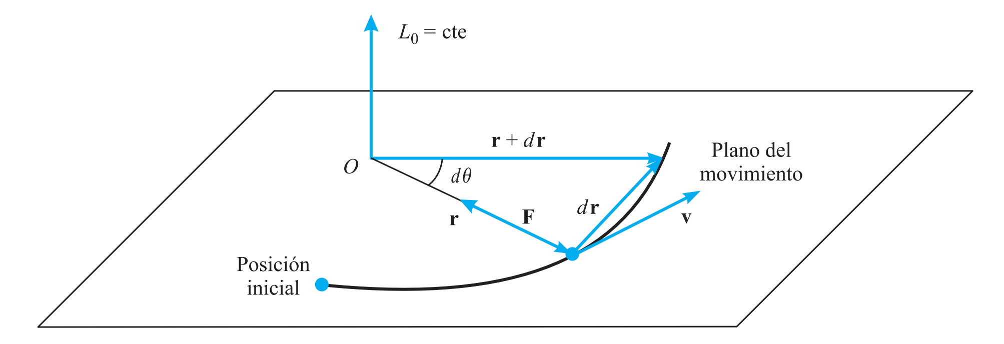


Figura 10.19.

Evidentemente que este movimiento verificará la ley de las áreas, ya que el momento cinético es constante.

Particularmente importante es el caso en el cual el módulo de la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro, ya que a este tipo pertenecen las fuerzas de atracción gravitacional, las de atracción del electrón por el núcleo del átomo y, en general, las de atracción o repulsión entre partículas cargadas.

Movimiento de satélites. Atracción gravitacional

La fuerza que sobre el satélite ejerce el planeta pasa siempre por el centro de éste; se trata, por tanto, de un caso de fuerzas centrales y se cumplirá todo lo indicado para éstas.

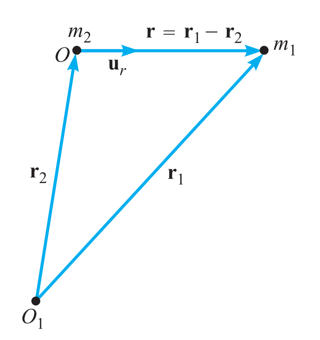


Figura 10.20.

Vamos a considerar el origen del sistema de referencia móvil en el centro del planeta y el origen del fijo en el centro del sistema solar. Sean m_1 y m_2, respectivamente, las masas del satélite y del planeta, y sus vectores de posición respecto al sistema de referencia fijo $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$, respectivamente (Figura 10.20).

Las ecuaciones del movimiento, considerando únicamente la atracción gravitacional entre planeta y satélite, son:

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\mathbf{u}_r \quad ; \quad m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\mathbf{u}_r$$

dividiendo la primera por m_1, la segunda por m_2 y restando de la primera la segunda resulta:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G\frac{m_1 + m_2}{r^2}\mathbf{u}_r$$

en la que $\mathbf{r}$ es el vector que posiciona el satélite respecto al centro del planeta y $\mathbf{u}_r$ es el vector unitario de la dirección desde el centro del planeta al satélite. Utilizando la llamada masa reducida:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

se escribe:

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\mathbf{u}_r = -\frac{C}{r^2}\mathbf{u}_r \qquad [10.23]$$

ecuación que nos determina el movimiento relativo del satélite respecto al planeta y que nos indica que podemos aplicar la ley fundamental de la Dinámica en el sistema de referencia móvil, pero utilizando la masa reducida en lugar de la masa del satélite. Para simplificar la escritura hemos llamado $C = Gm_1m_2$.

Momento cinético del satélite

En la determinación de la trayectoria utilizaremos coordenadas polares planas, en las cuales el momento cinético se expresa:

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{r} \times \mu\mathbf{v} = \mu r\,\mathbf{u}_r \times (\dot{r}\,\mathbf{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\mathbf{u}_\theta) = \mu r^2\,\dot{\theta}\,\mathbf{k} = \mu r v\,\mathbf{k}$$

Vector que debe ser constante, según se ha demostrado y, por tanto, la trayectoria plana pasa por el centro del planeta. El plano de la trayectoria queda determinado por la dirección de la velocidad inicial, ya que debe contener a ésta y pasar por O, centro del planeta. También queda determinado el plano de la trayectoria por los vectores $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{v}_0$, posición y velocidad iniciales.

El módulo del momento cinético se expresa:

$$L_0 = \mu r^2\dot{\theta} = \mu r v = \mu r_0 v_0 \qquad [10.24]$$

La última igualdad:

$$r v = r_0 v_0 = L_0/\mu \qquad [10.25]$$

permite, conocidas las condiciones iniciales, hallar la velocidad v en cada posición r.

La Ecuación [10.23], expresando la aceleración en coordenadas polares planas, se escribe:

$$\mu(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + \mu(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta = -\frac{C}{r^2}\mathbf{u}_r$$

de la que se deducen:

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{C}{r^2} \quad \text{y} \quad r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta} = 0 \qquad [10.26]$$

Esta última no es más que la [10.24] derivada respecto al tiempo, como puede comprobarse fácilmente. Mediante la [10.24] podemos eliminar $\dot{\theta}$ en la primera [10.26], quedando:

$$\mu\ddot{r} - \frac{L^2}{\mu r^3} = -\frac{C}{r^2} \qquad [10.27]$$

Siempre se verifica:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

lo que, teniendo en cuenta la [10.24], se expresa:

$$\frac{d}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta}$$

Para la segunda derivada es:

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{L}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta}\right) = \frac{L}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{L}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta}\right)$$

y, con ello, la [10.27] se escribe:

$$\frac{L}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{L}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{L^2}{\mu r^3} = -\frac{C}{r^2} \quad \text{o} \quad \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{1}{r} = -\frac{C\mu}{L^2}$$

Teniendo en cuenta que es:

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{d(1/r)}{d\theta}$$

puede ponerse de la forma:

$$\frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{\mu C}{L^2} \qquad [10.28]$$

y haciendo el cambio de variable:

$$y = \frac{1}{r} - \frac{\mu C}{L^2}$$

resulta:

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0$$

cuya solución es $y = A\cos(\theta - \theta_0)$.

Por tanto, la solución de [10.28], volviendo a la variable r, es:

Ecuación de la trayectoria

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu C}{L^2} + A\cos(\theta - \theta_0) \qquad [10.29]$$

que es la ecuación de la trayectoria expresada en polares planas y que corresponde a la ecuación de una cónica con un foco en el origen.

La ecuación general de éstas es de la forma:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}[1 + e\cos(\theta - \theta_0)]$$

Por tanto, el parámetro de la trayectoria es $p = L^2/\mu C$ y la excentricidad:

$$e = Ap = AL^2/\mu C$$

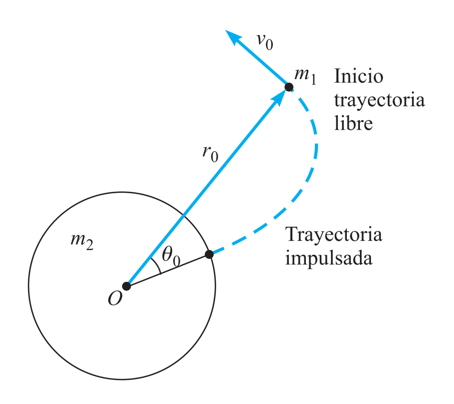


Figura 10.21.

Es necesario analizar el valor de e, pues la trayectoria será una hipérbola si es $e > 1$; será una parábola si es $e = 1$; será elipse para $0 < e < 1$, y circunferencia si $e = 0$.

Puesto que para $r = r_0$ es $\theta = \theta_0$ (Figura 10.21), el valor de la constante A es:

$$A = \frac{1}{r_0} - \frac{\mu C}{L^2}$$

y, con ello, el valor de la excentricidad está dado por:

$$e = \left(\frac{1}{r_0} - \frac{\mu C}{L^2}\right)\frac{L^2}{\mu C} = \frac{L^2}{r_0 \mu C} - 1 \qquad [10.30]$$

Sustituyendo el valor de L dado por [10.24] y el valor de la constante C, la excentricidad se escribe:

Excentricidad

$$e = \frac{r_0 v_0^2}{G(m_1 + m_2)} - 1 \qquad [10.31]$$

Por tanto, el tipo de trayectoria depende de la posición inicial, del módulo de la velocidad inicial y de las masas del planeta y del satélite, si bien ésta es despreciable frente a aquélla y no influye prácticamente en el tipo de trayectoria.

El valor del parámetro de la trayectoria pude expresarse de la siguiente manera:

$$p = \frac{L_0^2}{\mu C} = \frac{\mu r_0^2 v_0^2}{\mu C} = \frac{r_0^2 v_0^2}{G(m_1 + m_2)} = r_0(e + 1)$$

con lo cual, la trayectoria [10.29] se expresa:

Ecuación de la trayectoria

$$r = \frac{1 + e}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}\, r_0 \qquad [10.32]$$

La trayectoria será:

Hipérbola si es:

$$\frac{r_0 v_0^2}{G(m_1 + m_2)} > 2$$

Parábola si es:

$$\frac{r_0 v_0^2}{G(m_1 + m_2)} = 2$$

Elipse si es:

$$1 < \frac{r_0 v_0^2}{G(m_1 + m_2)} < 2$$

Circunferencia si es:

$$\frac{r_0 v_0^2}{G(m_1 + m_2)} = 1$$

Para cada posición de lanzamiento r_o, hay una velocidad v_{0e}, que se denomina *velocidad de escape*, a partir de la cual el satélite no queda en órbita, ya que su trayectoria sería parabólica o hiperbólica; su valor es:

Velocidad de escape

$$v_{0e} = \sqrt{\frac{2G(m_1 + m_2)}{r_0}} \qquad [10.33]$$

Para que la órbita sea circular, la velocidad inicial de puesta en órbita debe verificar:

Órbita circular

$$v_{0c} = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{r_0}} \qquad [10.34]$$

Si es $v_0 < v_{0c}$, el satélite cae sobre la superficie del planeta. Las trayectorias serán elipses, ocupando el centro del planeta uno de los focos, siempre que sea:

$$v_{0c} < v_0 < v_{0e}$$

Satélites terrestres

En el caso de satélites terrestres, despreciando la masa del satélite frente a la de la Tierra, $m_2 = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, la velocidad de escape [10.33] se expresa:

Velocidad de escape

$$v_{0e} = \sqrt{\frac{2 \times 6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24}}{r_0}} = \frac{28{,}244 \times 10^6}{\sqrt{r_0}} \qquad [10.35]$$

Para que la trayectoria sea circular, la aplicación de la [10.34] nos da:

Órbita circular

$$v_{0c} = \frac{14{,}122 \times 10^6}{\sqrt{r_0}} \qquad [10.36]$$

Si el inicio de la trayectoria libre se hace en un punto para el cual es $r_0 = 7\,000$ km, la velocidad de escape es:

$$v_{0e} = \frac{28{,}244 \times 10^6}{\sqrt{7 \times 10^3}} = 10\,675{,}23 \text{ m/s} = 38\,430{,}83 \text{ km/h}$$

y la velocidad, para que la trayectoria sea circular es:

$$v_{0c} = \frac{14{,}122 \times 10^6}{\sqrt{7 \times 10^3}} = 5\,337{,}61 \text{ m/s} = 19\,215{,}41 \text{ km/h}$$

Las trayectorias serán elipses, ocupando la Tierra uno de los focos, siempre que sea:

Órbitas elípticas

$$\frac{14{,}122 \times 10^6}{\sqrt{r_0}} \leqslant v_0 \leqslant \frac{28{,}244 \times 10^6}{\sqrt{r_0}}$$

En esta situación, al punto de la órbita más próximo a la Tierra se le denomina *perigeo* y al más alejado, *apogeo* (Figura 10.22). Los radios correspondientes se denominan r_p y r_a, respectivamente, y sus valores se obtienen de la ecuación [10.32] particularizada para $\theta = 0$ y $\theta = \pi$, respectivamente, obteniéndose:

Perigeo y apogeo

$$r_p = \frac{1 + e}{1 + e\cos\theta_0}\, r_0 \quad \text{y} \quad r_a = \frac{1 + e}{1 - e\cos\theta_0}\, r_0 \qquad [10.37]$$

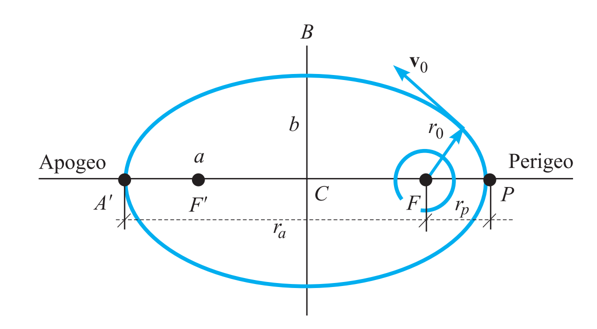


Figura 10.22.

En función de éstos puede obtenerse el valor de los semiejes a y b de la elipse trayectoria. Evidentemente, es $r_p + r_a = 2a$ y, por tanto:

Semieje mayor

$$a = \frac{1}{2}(r_p + r_a) = \frac{1 + e}{1 - e^2 \cos^2 \theta_0}\, r_0 \qquad [10.38]$$

Por otra parte, puesto que la suma de distancias desde los focos a un punto de la elipse es constante, será:

$$FA + F'A = 2a = FB + F'B = 2FB$$

es decir, $FB = F'B = a$.

En el triángulo rectángulo FCB se verifica:

$$b^2 = FB^2 - CF^2 = a^2 - (a - r_p)^2 = r_p(2a - r_p) = r_p \cdot r_a$$

y, en definitiva:

Semieje menor

$$b = \sqrt{r_p \cdot r_a} = \frac{1 + e}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta_0}}\, r_0 \qquad [10.39]$$

Ley de las áreas. Al describir la trayectoria el satélite, el radio vector barre el área de aquélla, cuyo valor es $A = \pi ab$. El área elemental barrida por el radio vector en un tiempo dt es:

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

y el área barrida por el radio vector en la unidad de tiempo es:

$$dA/dt = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

cuyo valor deducido de [10.24] es:

$$dA/dt = L_0/2\mu = \frac{1}{2} r_0 v_0$$

resultando que el área barrida en función del tiempo es $A = \frac{1}{2} r_0 v_0 t$.

Periodo orbital. El periodo orbital o tiempo que tarda el planeta en recorrer su órbita será igual al área de ésta dividida por lo que tarda el planeta en barrer la unidad de área, es decir:

$$P = 2\pi ab\mu/L_0 \qquad [10.40]$$

Teniendo en cuenta que es:

$$L_0^2 = \mu C p = \mu C b^2/a$$

ya que el parámetro de la elipse es $p = b^2/a$, el periodo se escribe:

$$P = \frac{2\mu\pi ab}{\sqrt{\dfrac{\mu C b^2}{a}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu a^3}{C}} = \frac{2\pi}{\sqrt{G(m_1 + m_2)}}\, a^{3/2} \qquad [10.41]$$

Período orbital

Con todo lo cual, quedan demostradas las famosas leyes de Kepler, que son:

— *El radio vector que va del Sol al planeta describe áreas iguales en tiempos iguales.*
— *Las trayectorias de los planetas son elipses estando el Sol en uno de sus focos.*
— *Los cuadrados de los periodos son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas.*

Ya hemos indicado cómo la masa del satélite, m_1, no influye en la órbita, como se deduce de la [10.31], ya que es despreciable frente a la masa de la Tierra, $m_2 = 5{,}98 \cdot 10^{24}$. Por ello, el tipo de órbita queda determinado por los valores de r_0 y v_0, como ya hemos indicado. En conscuencia, todos los elementos del satélite o de la cápsula están situados en la misma órbita y la apertura de la escotilla de ésta no es suficiente para que caiga ningún objeto de su interior, porque todos están colocados en órbita, la cápsula no los transporta, se la podría eliminar y todo el contenido seguiría en órbita.

Análogamente, tanto el astronauta como la cápsula espacial han sido colocados en órbita con la misma velocidad inicial y, por tanto, ambos recorren prácticamente la misma órbita. Las aceleraciones orbitales son las mismas para los dos, así como la aceleración de la gravedad que actúa sobre ambos. No existe, por tanto, aceleración relativa alguna entre el astronauta y la cápsula. En consecuencia, no hay fuerza alguna entre ambos y el astronauta flota dentro de la cápsula, pierde el sentido de la verticalidad y no encuentra reacción alguna por efecto de su peso. A esta situación se la conoce con el nombre de *ingravidez*. Quede, pues, bien claro que el astronauta flota porque su aceleración respecto a la cápsula es nula y no porque no exista la fuerza $m\mathbf{g}$, que sí existe tal y como ha sido definida y gracias a la cual no escapa de la órbita.

EJEMPLO 10.9

Un satélite de masa $m = 1\,000$ kg se lanza en su perigeo, a una altura $h = 420$ km sobre la superficie terrestre, con una velocidad $v_0 = 36\,000$ km/h, paralela a la superficie de la Tierra (Figura 10.23). Tomando como origen de ángulos el radio que va del centro de la Tierra al perigeo y los valores $R = 6{,}38 \cdot 10^6$ m, $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg y $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}, determinemos:

a) La excentricidad de la trayectoria. ¿Qué tipo de trayectoria es?
b) La ecuación de la trayectoria.
c) El valor del radio en el apogeo.
d) El valor de los semiejes de la órbita.
e) El periodo de revolución.

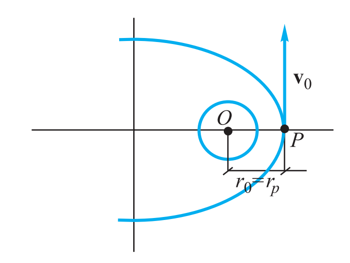


Figura 10.23.

Solución:

a) La posición de lanzamiento es:

$$r_0 = R + h = 6{,}38 \times 10^3 \text{ km} + 420 \text{ km} = 6{,}8 \times 10^3 \text{ km} = 6{,}8 \times 10^6 \text{ m}$$

La velocidad de lanzamiento es:

$$v_0 = 36\,000 \text{ km/h} = 10^4 \text{ m/s}$$

La excentricidad está dada por la Ecuación [10.31]:

$$e = \frac{6{,}8 \times 10^6 \times 10^8}{6{,}67 \times 10^{-11}(5{,}98 \times 10^{24} + 10^3)} - 1$$

despreciando la masa del satélite resulta:

$$e = \frac{6{,}8}{6{,}67 \times 5{,}98} \times 10 - 1 = 0{,}7048$$

luego la trayectoria es una elipse.

b) La ecuación de la trayectoria es de la forma [10.32] y, puesto que en el instante inicial es $\theta_0 = 0$, se expresa:

$$r = \frac{1{,}7048}{1 + 0{,}7048 \cos\theta} \times 6{,}8 \times 10^6 \text{ m} = \frac{11{,}5926 \times 10^6}{1 + 0{,}7048 \cos\theta}$$

c) El valor del apogeo se deduce de la ecuación de la trayectoria para $\theta = \pi$, lo que da:

$$r_a = \frac{11{,}5926 \times 10^6}{1 - 0{,}7048} = 39{,}27 \times 10^6 \text{ m} = 39\,270 \text{ km}$$

d) Los valores de los semiejes de la órbita están dados por las relaciones [10.38] y [10.39], resultando:

$$a = \frac{1}{2}(r_a + r_p) = 23\,035 \times 10^3 \text{ m} = 23\,035 \text{ km}$$

$$b = \sqrt{r_a \cdot r_p} = 16\,341{,}24 \times 10^3 \text{ m} = 16\,341{,}24 \text{ km}$$

e) El periodo de la órbita está dado pr la [10.31]:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3 \mu}{c} = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \times 23\;035^3 \times 10^9}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24}} = 1{,}2097548 \times 10^9 \text{ s}^2$$

$$T = 3{,}47815 \times 10^4 \text{ s} = 9{,}66 \text{ h}$$

Energía y órbitas

La energía cinética del satélite en su movimiento respecto al planeta es:

$$T = \frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} L_0^2/\mu r^2$$

Si es $m_1 << m_2$, resulta $\mu = m_1$ y la energía cinética se expresa

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L_0^2}{m_1 r^2} \qquad [10.42]$$

La energía potencial es:

$$U = -G\,\frac{m_1 m_2}{r} \qquad [10.43]$$

y la energía mecánica del satélite es:

$$E = T + U = \frac{1}{2}\,m_1\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\,\frac{L_0^2}{m_1 r^2} - G\,\frac{m_1 m_2}{r} = \frac{1}{2}\,m_1\dot{r}^2 + U_e$$

siendo:

$$U_e = \frac{1}{2}\,\frac{L_0^2}{m_1 r^2} - G\,\frac{m_1 m_2}{r} \qquad [10.44]$$

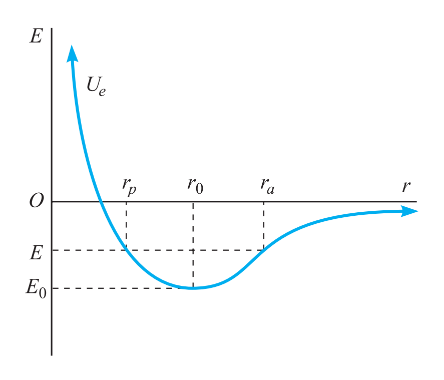
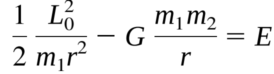


Figura 10.24.

la función *potencial efectivo*, que se ha representado en la Figura 10.24.

Tanto en el apogeo como en el perigeo es $\dot{r} = 0$, ya que r pasa por un máximo o un mínimo, respectivamente. Por tanto, los valores de r que verifican $E = U_e$ son los correspondientes al apogeo, el mayor, y al perigeo, el menor, y la trayectoria es elíptica:



$$\frac{1}{2}\,\frac{L_0^2}{m_1 r^2} - G\,\frac{m_1 m_2}{r} = E$$



que puede expresarse:

$$E\,r^2 + G\,m_1\,m_2\,r - L_0^2/2m_1 = 0 \qquad [10.45]$$

cuyas soluciones son:

$$r = \frac{-Gm_1m_2 \pm \sqrt{G^2m_1^2m_2^2 + 2E\,\dfrac{L_0^2}{m_1}}}{2E}$$

En las órbitas elípticas las dos raíces deben ser positivas, lo que exige que sea $E < 0$; además, deben ser reales, luego debe ser $G^2m_1^2m_2^2 - 2|E|L_0^2/m_1 > 0$ es decir:

$$|E| \leqslant \frac{G^2\,m_1^3\,m_2^2}{2L_0^2} \qquad [10.46]$$

El signo igual da una única raíz doble para la Expresión [10.45], lo que corresponde a órbitas circulares, en las cuales el radio de la órbita es:

$$r_0 = \frac{-Gm_1m_2}{2E} = \frac{L_0^2}{Gm_1^2\,m_2} = \frac{r_0^2\,v_0^2}{Gm_2}$$

La última igualdad se escribe teniendo en cuenta la [10.24] y la aproximación $m_1 << m_2$. Despejando r_0 es:

$$r_0 = \frac{G\,m^2}{v_0^2} \qquad [10.47]$$

También se puede obtener este resultado a partir de la Expresión [10.31], aplicando la misma aproximación, puesto que la excentricidad de la órbita circular es nula.

En la órbita circular sólo hay aceleración normal y la ley de la Dinámica se expresa:

$$m_1 \frac{v^2}{r_0} = G \frac{m_1 m_2}{r_0^2}$$

de donde:

$$v^2 = G \frac{m_2}{r_0} \qquad [10.48]$$

y la energía cinética se expresa:

$$T = \frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 G \frac{m_2}{r_0} = G \frac{m_1 m_2}{2r_0} \qquad [10.49]$$

Con lo cual, la energía total del satélite en órbita circular es:

$$E = T + U = G \frac{m_1 m_2}{2r_0} - G \frac{m_1 m_2}{r_0} = -G \frac{m_1 m_2}{2r_0} \qquad [10.50]$$

EXPLORACIÓN ESPACIAL

Los viajes espaciales se inician en 1959 con una nave lanzada por la URSS, que se estrelló sobre la superficie lunar. Ya, en diciembre de 1962, la Mariner 2 sobrevoló Venus y la Mariner 4 lo hizo sobre Marte en 1965. La primera nave espacial que utilizó navegación asistida fue la Mariner 10, que usó a Venus como acelerador para llegar a Mercurio en 1974; desde entonces diferentes naves espaciales han explorado los secretos de diferentes planetas. De forma simple podía pensarse en realizar estos viajes diseñando un potente cohete que venciera los campos gravitacionales interpuestos y fuera directamente hacia el planeta deseado; usando, al llegar, otros cohetes para frenar y situar la nave en órbita o depositarla sobre la superficie del planeta. Este sistema conllevaria un gran consumo de energía y se ha buscado un método más inteligente que utiliza el campo gravitacional del Sol y disminuye el consumo de combustible.

En primer lugar hay que situar a la nave en una órbita alrededor de la Tierra *órbita estacionaria* u *órbita de aparcamiento*, que debe ser recorrida en el mismo sentido de giro de la Tierra alrededor del Sol, por razones que luego veremos.

A continuación se debe transferir la nave a una órbita alrededor del Sol, llamada *órbita de transferencia*, la cual es una semielípse que debe ser tangente a la órbita estacionaria y a la órbita definitiva alrededor del planeta de destino, llamada *órbita de destino*.

Durante el tiempo que la nave está en la órbita de transferencia los motores pueden ir apagados, ya que el movimiento se realiza por la acción del campo gravitacional del Sol. Al llegar a la órbita de destino los motores deben encenderse para abandonar la órbita de transferencia y comenzar a girar alrededor del planeta.

El sistema de navegación descrito permite ahorrar energía, pero presenta algunos condicionantes, pues el lanzamiento debe hacerse cuando la nave esté en un extremo del eje mayor de la órbita de transferencia y en un momento tal, que tanto la nave como el planeta vayan a llegar en el mismo instante al otro extremo del citado eje. Para conseguir esto el lanzamiento debe hacerse en una determinada posición de la nave dentro de su órbita, que se denomina *ventana de lanzamiento*.

Cuando la nave se destina a uno de los planetas interiores, más cercanos al Sol que la Tierra (Venus o Mercurio), la ventana de lanzamiento esta situada en la zona de la órbita de aparcamiento más próxima al Sol, (Figura 1). En esta zona, la velocidad de la nave alrededor de su órbita, $\mathbf{v}_t$, tiene la misma dirección pero sentido contrario a la velocidad debida al movimiento de la Tierra alrededor del Sol, $\mathbf{v}_s$; por ello se requiere un menor impulso para que la nave abandone la órbita de aparcamiento y comience a moverse atraída por el Sol.

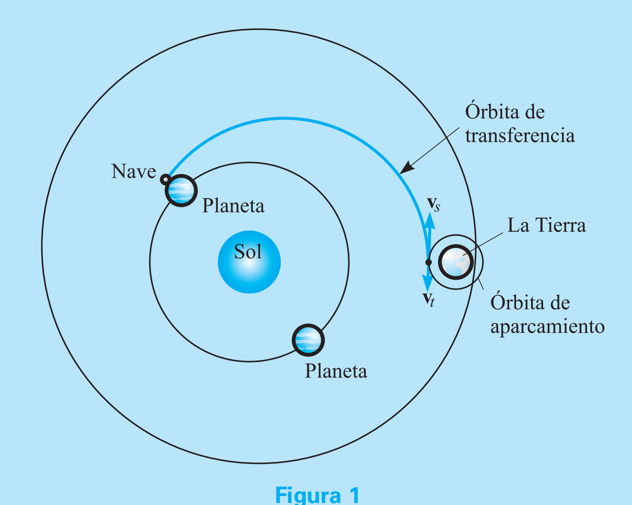


Figura 1

Si el destino de la nave es un planeta exterior, mas alejado del Sol que la Tierra, la ventana de lanzamiento debe estar en la zona de la órbita de aparcamiento no iluminada por el Sol (Figura 2), ya que en esta, las velocidades $\mathbf{v}_t$ y $\mathbf{v}_s$ tienen la misma dirección y sentido, y es necesario un menor impulso para dirigir la nave hacia el exterior del sistema solar.

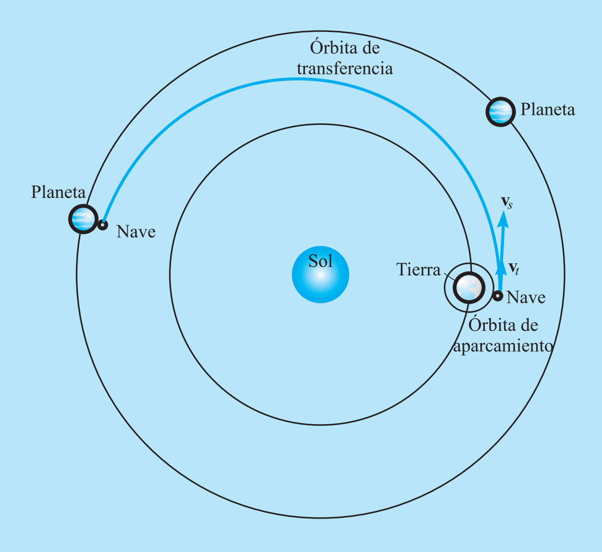


Figura 2

La ventana de lanzamiento solo se presenta en condiciones especiales, que no vuelven a repetirse hasta que el planeta ha descrito una revolución completa alrededor del Sol; es decir, tarda un tiempo igual al periodo de revolución del planeta alrededor del Sol. Estos periodos, junto con otros datos del Sistema Solar, se han recogido en la Tabla 10.1.

Los campos gravitacionales de los planetas pueden también ser usados para aumentar la velocidad de la nave y para cambiar su dirección, es lo que se denomina *navegación asistida por gravedad*. Así, si una nave la dirigimos hacia un planeta de forma que su energía total se mantenga ligeramente superior a la unidad, la trayectoria respecto a ese planeta será abierta (hipérbola o parábola) y su trayectoria habrá sido desviada por aquél (Figura 3). La nave además es arrastrada por el planeta en su movimiento de rotación alrededor del Sol con lo cual también aumenta la energía cinética de la nave. En consecuencia, la nave aumenta su velocidad y cambia de dirección, para lo cual ha debido aportar energía el planeta, ya que la energía total del sistema solar debe permanecer constante. Por este procedimiento la *Voyager* 2, lanzada el 20 de agosto de 1977, visitó los cuatro grandes planetas exteriores (Figura 4).

Tabla 10.1. El sistema solar

	Masa (kg)	Radio (10^3 km)	Distancia (10^6 km)	Periodo orbital (años)	Excentricidad	Periodo de rotación (días)
Sol	$1{,}987 \cdot 10^{30}$	696,5				27
Mercurio	$3{,}29 \cdot 10^{23}$	2,4	57,8	0,241	0,2056	
Venus	$4{,}84 \cdot 10^{24}$	6,1	108,2	0,616	0,0068	
La Tierra	$5{,}98 \cdot 10^{24}$	6,378	149,6	1	0,017	1
Luna	$7{,}34 \cdot 10^{22}$	1,738	0,384	0,075	0,055	27,3
Marte	$6{,}5 \cdot 10^{23}$	3,4	227,9	1,88	0,0934	1,02
Júpiter	$1{,}9 \cdot 10^{27}$	71,35	778,3	11,86	0,0483	0,41
Ganímedes	$1{,}53 \cdot 10^{23}$	2,47	1,07	0,02		
Saturno	$5{,}68 \cdot 10^{26}$	60,4	1 428,0	29,46	0,0560	0,43
Titán	$1{,}4 \cdot 10^{23}$	2,5	1,22	0,044		
Urano	$8{,}9 \cdot 10^{25}$	24,85	2 872,0	84,02	0,0461	0,45
Neptuno	$1{,}02 \cdot 10^{26}$	26,5	4 500,0	164,79	0,0098	0,66
Tritón	$1{,}5 \cdot 10^{23}$	2,0	0,354	0,016		
Plutón	$1{,}4 \cdot 10^{22}$	7,5	5 915,0	248,55	0,2494	0,7

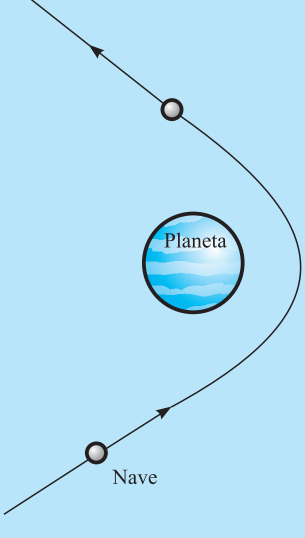


Figura 3

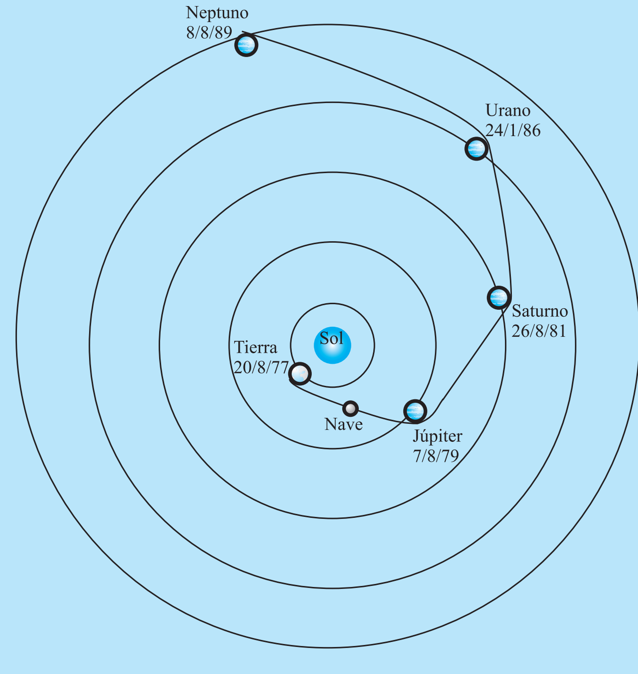


Figura 4

Dinámica de los sistemas

CAPÍTULO 11

11.1 Ecuaciones del movimiento del centro de masas del sistema

Consideremos un sistema formado por n puntos materiales de masa m_1, m_2, ..., m_n y cuyos vectores de posición son $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, ..., $\mathbf{r}_n$, respectivamente. De acuerdo con el principio de aislamiento, podemos considerar como libre un punto i del sistema, sin más que tener en cuenta, además de las fuerzas exteriores que sobre él actúan, las acciones que el resto del sistema ejercía sobre él. Sea $\mathbf{F}_i$ la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre el punto de masa m_i, y $\mathbf{f}_i$ la resultante de las fuerzas interiores que actúan sobre él. La ecuación de la Dinámica para este punto es:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i$$

Para cada punto del sistema puede escribirse una ecuación análoga y sumando todas ellas resulta:

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F} \qquad [11.1]$$

ya que $\sum_i \mathbf{f}_i = 0$, en virtud de la tercera ley de Newton.

El centro de masas del sistema, C, está determinado mediante su vector posición, dado por la ecuación:

$$m\mathbf{r}_C = \sum_i m_i \mathbf{r}_i$$

siendo $m = \sum_i m_i$, la masa total del sistema. Derivando esta ecuación dos veces respecto al tiempo, da:

$$m\ddot{\mathbf{r}}_C = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$$

y, al llevarlo a la [11.1], resulta ser:

$$m\ddot{\mathbf{r}}_C = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F} \qquad [11.2]$$

Movimiento del c.d.m.

es decir, *el centro de masas del sistema se mueve como un punto material cuya masa fuese igual a la masa total del sistema y sobre el cual actuasen fuerzas equipolentes a las exteriores que actúan sobre el sistema*.

11.2 Teorema de la cantidad de movimiento. Impulso lineal

Definición. La cantidad de movimiento total del sistema es la suma de las cantidades de movimiento de cada partícula que pertenece al sistema:

$$\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \qquad [11.3]$$

La cantidad de movimiento del sistema, teniendo en cuenta que el c.d.m. verifica:

$$m\dot{r}_C = \sum m_i \dot{r}_i$$

se expresa:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_C \qquad [11.4]$$

lo que se enuncia así: *la cantidad de movimiento de un sistema es igual a la que tiene su c.d.m. dotado de toda la masa del sistema*.

Teorema. Derivando respecto al tiempo la Expresión [11.3] se obtiene:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum (\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i) = \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{F}$$

$$d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F} \qquad [11.5]$$

que es la expresión analítica del teorema de la cantidad de movimiento, que dice: *la derivada respecto al tiempo de la cantidad de movimiento del sistema es igual a la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre él*.

Conservación. Si la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre un sistema es nula, así será la derivada de su cantidad de movimiento respecto al tiempo y, en consecuencia, la cantidad de movimiento del sistema permanecerá constante.

Si $\mathbf{F} = 0$, $d\mathbf{p}/dt = 0$ y $\mathbf{p} = \text{cte}$.

De acuerdo con [11.4], la velocidad del c.d.m. será constante y el c.d.m. se moverá con movimiento rectilíneo uniforme o permanecerá en reposo si antes lo estaba.

Si en estas circunstancias, $\mathbf{F} = 0$ y, por alguna causa interna del sistema, se modifica la cantidad de movimiento de una de sus partes, el resto del sistema deberá modificar su cantidad de movimiento, de forma que la cantidad de movimiento total del sistema permanezca constante.

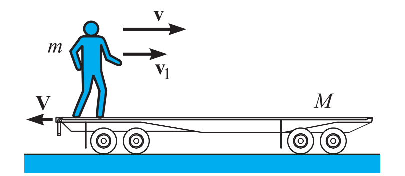


Figura 11.1.

EJEMPLO 11.1

Una persona, de masa m, se encuentran sobre una plataforma del tren, de masa M; inicialmente, ambas están en reposo (Figura 11.1). La persona se pone a caminar sobre la plataforma en sentido longitudinal y con una velocidad relativa v respecto a ella. Hallemos la velocidad de la persona respecto al suelo v_1 y la velocidad con que se moverá la plataforma.

Solución:

La resultante de las fuerzas que actúan (gravedad y reacción del suelo) es nula, por tanto, habrá conservación de la cantidad de movimiento. Como inicialmente la cantidad de movimiento es nula, pues se parte del reposo, deberá mantenerse nula durante todo el movimiento, lo que permite escribir:

$$m\mathbf{v}_1 + M\mathbf{V} = 0$$

Por otro lado, la Cinemática del movimiento nos da:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} + \mathbf{V}$$

con lo cual, resulta:

$$\mathbf{V} = -m\mathbf{v}/(m + M) \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_1 = M\mathbf{v}/(M + m)$$

EJEMPLO 11.2

Una persona ha parado su barca junto al muelle y se dispone a saltar a tierra (Figura 11.2). Antes de hacerlo, el sistema persona-barca está en reposo y su cantidad de movimiento es nula. Puesto que sobre el sistema la resultante de las fuerzas exteriores es nula, su cantidad de movimiento se mantendrá constante y, por tanto, deberá ser siempre nula. Si la masa de la persona es m y la de su barca M, al saltar hacia el muelle con una velocidad $\mathbf{v}$ respecto a éste, la barca se retirará de él con una velocidad $\mathbf{V}$ respecto al mismo, debiendo verificar:

$$M\mathbf{V} + m\mathbf{v} = 0 \qquad \text{de donde:} \qquad \mathbf{V} = -m\mathbf{v}/M$$

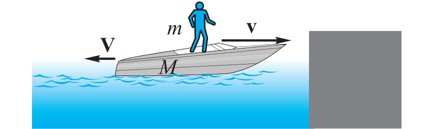


Figura 11.2.

EJEMPLO 11.3

Una persona de masa 80 kg está situada sobre una barca de masa 100 kg, cuyo eje longitudinal está dirigido normal al muelle del embarcadero. Inicialmente, todo el sistema está en reposo y la persona se encuentra a 6 m del muelle. En un cierto instante, la persona comienza a andar sobre la barca siguiendo el eje longitudinal de la misma, dirigiéndose hacia el muelle con velocidad relativa constante v_r. Calculemos:

1.º La velocidad de la barca respecto al muelle.

2.º La velocidad de la persona respecto al muelle.

3.º La distancia de la persona respecto al muelle, cuando la persona ha recorrido sobre la barca 3 m.

Solución:

1.º La resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema es nula, luego se conservará la cantidad de movimiento y, puesto que ésta inicialmente era nula, deberá seguir así:

$$\mathbf{p} = 0 = \sum \mathbf{p}_i = M\mathbf{V} + m\mathbf{v}$$

siendo **V** y **v** las velocidades respecto al muelle de la barca y de la persona, respectivamente. La velocidad de la persona respecto al muelle será la que tiene respecto a la barca, más la de ésta respecto al muelle, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{V}$, con lo que la ecuación anterior se expresa:

$$M\mathbf{V} + m(\mathbf{v}_r + \mathbf{V}) = 0 \qquad \text{de donde:} \qquad \mathbf{V} = -m\mathbf{v}_r/(M+m) = -\frac{4}{9}\mathbf{v}_r$$

2.º La velocidad de la persona respecto al muelle es:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r - m\mathbf{v}_r/(M+m) = M\mathbf{v}_r/(M+m) = \frac{5}{9}\mathbf{v}_r$$

3.º El desplazamiento de la persona respecto al muelle es $x = vt = \frac{5}{9}\mathbf{v}_r t$, el desplazamiento sobre la barca es $x' = v_r t$ y, cuando sobre la barca ha recorrido 3 m, respecto al muelle ha recorrido $x = 5/9 \times 3 = 5/3$, luego la distancia al muelle es $d = 6 - 5/3 = 13/3 \cong 4{,}33$ m.

Impulso. La Ecuación [11.5] puede escribirse de la forma $d\mathbf{p} = \mathbf{F}\,dt$ e, integrada entre dos instantes, es:

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \int \mathbf{F}\,dt = \mathbf{I} \qquad [11.6]$$

Al segundo miembro se le denomina impulso lineal del sistema y la ecuación expresa que *el impulso lineal del sistema es igual a la variación de la cantidad de movimiento.*

EJEMPLO 11.4

Dos etapas de un cohete, de masas m_1 y m_2, respectivamente, vuelan juntas a la velocidad v, en el momento en que se agota el combustible de la primera (Figura 11.3). Al encenderse el motor de la segunda se produce la separación de ambas con una velocidad relativa v_r (Figura 11.4). Calculemos:

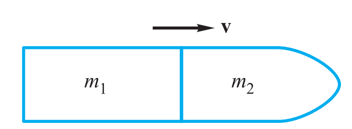


Figura 11.3.

a) Las velocidades de las dos etapas después de su separación.

b) El impulso de la segunda etapa durante la separación.

c) El empuje medio de la segunda etapa durante la separación, sabiendo que ésta se produce al cabo de t_1 segundos después de encendido el cohete.

Solución:

a) Las fuerzas exteriores aplicadas al sistema son nulas, por tanto, de acuerdo con el teorema de la cantidad de movimiento, ésta debe permanecer constante. Un instante antes de separarse las dos etapas, la cantidad de movimiento del sistema es:

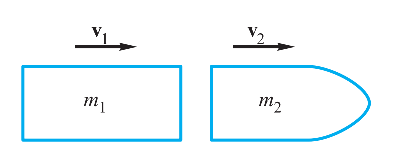


Figura 11.4.

$$(m_1 + m_2)v$$

Una vez separadas las dos etapas, la cantidad de movimiento del sistema es:

$$m_1v_1 + m_2v_2$$

Por tanto, debe verificarse:

$$(m_1 + m_2)v = m_1v_1 + m_2v_2$$

De acuerdo con el enunciado, es $v_r = v_2 - v_1$.
De las dos últimas expresiones se deduce:

$$v_1 = v - \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_r \quad \text{y} \quad v_2 = v + \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_r$$

b) La variación de la cantidad de movimiento de la segunda etapa durante la separación debe ser igual al impulso recibido durante ese tiempo:

$$\int_0^{t_1} \mathbf{F}\, dt = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 = m_2\mathbf{v}_2 - m_2\mathbf{v} = m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_r$$

c) El empuje medio verificará:

$$\mathbf{F}t_1 = m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}) = m_2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_r$$

de donde:

$$\mathbf{F} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{\mathbf{v}_r}{t_1}$$

11.3 Teorema del momento cinético. Impulso angular

Definición. El momento de la cantidad de movimiento o momento cinético del sistema respecto a un punto fijo *O*, se define como la resultante de los momentos respecto a *O* de las cantidades de movimiento de cada punto material del sistema; lo simbolizaremos mediante $\mathbf{L}_0$:

$$\mathbf{L}_0 = \sum_i \mathbf{L}_{0i} = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) \qquad [11.7]$$

Derivando esta expresión respecto al tiempo resulta:

$$\dot{\mathbf{L}}_0 = \sum_i (\dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{p}_i) \times \sum_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i)$$

El primer sumatorio es nulo, por tener la misma dirección los vectores $\dot{\mathbf{r}}_i$ y $\mathbf{p}_i$. El segundo sumatorio, aplicando el teorema de la cantidad de movimiento al punto *i*, se escribe:

$$\dot{\mathbf{L}}_0 = \sum_i [\mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i)]$$

y, al ser $\sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i) = 0$, ya que las fuerzas interiores son iguales y opuestas dos a dos, resulta:

$$\dot{\mathbf{L}}_0 = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \mathbf{M}_0(\mathbf{F}_i) \qquad [11.8]$$

lo que nos dice que *la derivada respecto al tiempo del momento cinético del sistema respecto a un punto O, es igual al momento resultante respecto a O de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema.*

Conservación. Si el momento resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema es nulo, así será la derivada respecto al tiempo del momento

cinético y, por tanto, éste deberá ser constante. Si en esta situación y por alguna causa interna cambiase el momento cinético de una parte del sistema, el resto del sistema deberá modificar su momento cinético de forma que permanezca constante el momento cinético total del sistema.

La Ecuación [11.8] puede escribirse de la forma:

$$d\mathbf{L} = \mathbf{M}\,dt$$

y, al integrarla entre dos instantes, resulta:

$$\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}\,dt = \mathbf{J} \qquad [11.9]$$

Al segundo miembro se le denomina *impulso angular* y la ecuación expresa que *el impulso angular es igual a la variación del momento cinético*.

11.4 Teorema de la energía cinética

Definición. La energía cinética del sistema es la suma de las energías cinéticas de cada partícula del sistema.

Llamando T_i a la energía cinética de la partícula i constituyente del sistema, la energía cinética total de éste es:

$$T = \sum T_i = \frac{1}{2}\sum m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \qquad [11.10]$$

Derivándola respecto al tiempo, es:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2}\sum m_i\left(\frac{d\mathbf{v}_i}{dt}\cdot\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i\cdot\frac{d\mathbf{v}_i}{dt}\right) =$$

$$= \sum m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum (\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i)\cdot\mathbf{v}_i$$

y multiplicando por dt e integrando entre los estados 1 y 2, resulta:

$$T_2 - T_1 = \sum \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i + \sum \int_1^2 \mathbf{f}_i \cdot d\mathbf{r}_i = W_e + W_i \qquad [11.11]$$

que es la expresión analítica del teorema de la energía cinética, que dice: *la variación de energía cinética del sistema es igual al trabajo producido por las fuerzas exteriores, más el producido por las interiores*.

El trabajo efectuado por las fuerzas interiores, en general, no es nulo, pero si el sistema es rígido, sí lo es. Por el principio de acción y reacción, cada acción de un punto sobre otro tiene su reacción igual y opuesta de éste sobre aquél. El trabajo producido por cada pareja acción-reacción es nulo y, en consecuencia, será nulo el trabajo producido por las fuerzas interiores. En efecto, consideremos los puntos i y j del sistema (Figura 11.5), sean $\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{r}_j$ sus vectores de posición y sea $\mathbf{f}_{ij}$ la acción del punto i sobre el j, y $\mathbf{f}_{ji}$ la acción del punto j sobre el i. Los trabajos producidos por las fuerzas indicadas en un desplazamiento elemental son:

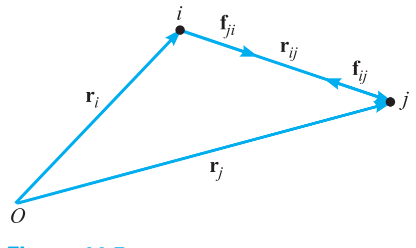


Figura 11.5.

$$dW_i = \mathbf{f}_{ji}\cdot d\mathbf{r}_i \quad ; \quad dW_j = \mathbf{f}_{ij}\cdot d\mathbf{r}_j$$

Sumando ambos trabajos y teniendo en cuenta que $\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}$, resulta:

$$dW_i + dW_j = \mathbf{f}_{ji} \cdot (d\mathbf{r}_i - d\mathbf{r}_j) = \mathbf{f}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_{ij}$$

siendo $\mathbf{r}_{ij}$ el vector con origen en el punto i y el extremo en el j. Este vector, por ser el sistema rígido, es de módulo constante. Su diferencial $d\mathbf{r}_{ij}$ será normal a él y, por tanto, normal a $\mathbf{f}_{ji}$. En consecuencia, es nulo el trabajo producido por la pareja acción-reacción, $\mathbf{f}_{ij}$, $\mathbf{f}_{ji}$.

Por tanto, para un sistema rígido, la Ecuación [11.11] se reduce a:

$$T_2 - T_1 = \sum \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i \qquad [11.12]$$

que es la expresión analítica del teorema de la energía cinética para sistemas rígidos, y dice: *la variación de energía cinética del sistema es igual al trabajo producido por las fuerzas exteriores.*

En sistemas materiales deformables, la energía cinética se conservará únicamente cuando la suma de los trabajos producidos por las fuerzas exteriores más el producido por las interiores, sea nulo. En sistemas materiales rígidos, la energía cinética se conserva solamente cuando el trabajo producido por las fuerzas exteriores es nulo.

11.5 Conservación de la energía mecánica

Si las fuerzas interiores derivan de un potencial U_i, la Ecuación [11.11] puede escribirse:

$$T_2 - T_1 = W_e + U_{i1} - U_{i2} \quad \text{o} \quad (T_2 - U_{i2}) = (T_1 + U_{i1}) + W_e$$

y, llamando energía propia del sistema a $E_p = T + U_i$, es:

Energía propia

$$E_{p2} - E_{p1} = W_e \qquad [11.13]$$

que nos dice que: *la variación de energía propia de un sistema es igual al trabajo producido por las fuerzas exteriores*. Si el sistema está aislado, $\mathbf{F}_i = 0$ y el trabajo producido por las fuerzas exteriores es nulo, resultando:

$$E_{p2} - E_{p1} = 0$$

es decir, *en un sistema aislado, su energía propia permanece constante.*

Si las fuerzas exteriores derivan también de un potencial U_e, la [11.13] se escribe:

$$E_{p2} - E_{p1} = U_{e1} - U_{e2} \quad \text{o} \quad E_{p2} + U_{e2} = E_{p1} + U_{e1}$$

y, llamando energía mecánica total del sistema a $E = E_p + U_e = T + U_i + U_e$, es:

Energía mecánica

$$E_2 = E_1 \quad \text{o} \quad T_2 + U_{i2} + U_{e2} = T_1 + U_{i1} + U_{e1} \qquad [11.14]$$

lo que nos dice que *la energía mecánica total del sistema permanece constante durante el movimiento*, o bien que *la suma de las energías cinética, potencial de las fuerzas interiores y potencial de las fuerzas exteriores del sistema, debe permanecer constante durante el movimiento*. En este caso, es decir, cuando E es constante, se dice que el sistema es conservativo; por el contrario, en el caso de existir fuerzas que disipan energía del sistema, transformándola en otras formas de energía no mecánica, se dice que el sistema es disipativo.

EJEMPLO 11.5

Consideremos un sistema formado por dos masas, m_1 y m_2, unidas mediante un resorte de masa despreciable, y una constante elástica k. Supongamos que el sistema se lanza al aire, la energía cinética de éste es $1/2m_1v_1^2 + 1/2m_2v_2^2$; la energía potencial interna, debida al alargamiento x del muelle, es $1/2kx^2$; y la energía potencial, debida a las fuerzas exteriores, en este caso únicamente las gravitatorias, es $mgz_1 + mgz_2$. La energía total que deberá permanecer constante en el movimiento es:

$$E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}kx^2 + m_1gz_1 + m_2gz_2$$

EJEMPLO 11.6

Un muelle de constante elástica k y masa despreciable está apoyado sobre una superficie horizontal y mantiene su eje vertical. Sobre su extremo libre se apoya una masa m y se le comprime una longitud d, en cuyo momento se suelta. Calculemos:

a) La altura máxima que alcanzará la masa.

b) En qué posición llevará la masa velocidad máxima.

c) Cuál es el valor de la velocidad máxima.

Solución:

a) Apliquemos el teorema de la conservación de la energía. La energía cinética, tanto en la posición inicial como en la final, será nula (Figura 11.6). La energía potencial elástica, en el instante inicial, vale $U_i = 1/2kd^2$ y, en el instante final, será nula. Consideremos nula la energía potencial gravitacional en el instante inicial y su valor en el final será $U_e = mgx$.

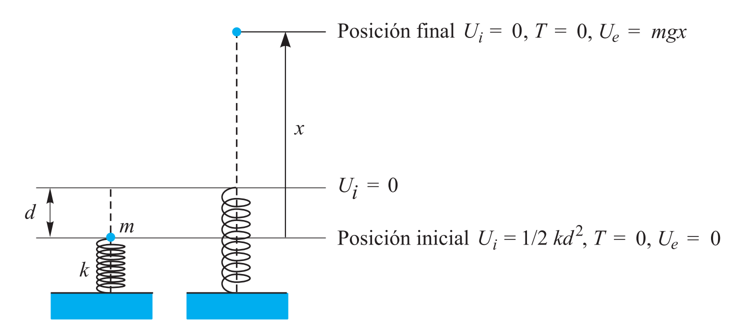


Figura 11.6.

La conservación de la energía se escribe:

$$\frac{1}{2}kd^2 = mgx \quad \Rightarrow \quad x = \frac{kd^2}{2mg}$$

b) Establecemos la conservación de la energía entre el instante inicial y uno cualquiera del movimiento (Figura 11.7):

$$\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}k(d - x)^2 + mgx + \frac{1}{2}mv^2$$

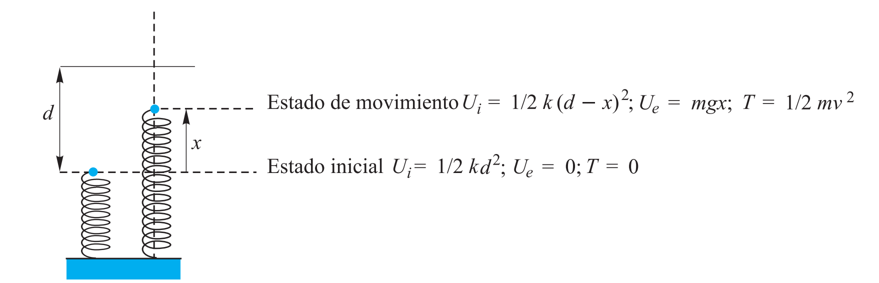


Figura 11.7.

de donde:

$$v^2 = \frac{2kd}{m}x - \frac{k}{m}x^2 - 2gx = 2\left(\frac{kd}{m} - g\right)x - \frac{k}{m}x^2$$

El máximo de v verificará $dv^2/dt = 0$:

$$2\left(\frac{kd}{m} - g\right) - 2\frac{k}{m}x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_{\text{máx}} = d - \frac{m}{k}g$$

c) El valor máximo de la velocidad será:

$$v_{\text{máx}}^2 = \frac{k}{m}\left(d - \frac{mg}{k}\right)^2 \quad \text{y} \quad v_{\text{máx}} = \left(d - \frac{mg}{k}\right)\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Si el sistema es rígido, la variación de la energía potencial de las fuerzas interiores es nula y la [11.14] se expresa:

$$T_2 + U_{e2} = T_1 + U_{e1} = \text{cte.} \qquad [11.15]$$

En un sistema rígido, la suma de su energía cinética más la energía potencial de las fuerzas exteriores se mantiene constante.

En el caso de ser E constante, se dice que el sistema es conservativo; por el contrario, en el caso de existir fuerzas que disipan energía del sistema, transformándola en otras formas de energía no mecánica, se dice que el sistema es disipativo. En este caso no se conserva la energía mecánica, pero siempre se verificará el principio de conservación de la energía.

Si en el paso del estado 1 al 2 hay una disipación de energía, ésta deberá ser tenida en cuenta en el balance energético, es decir:

$$E_1 = E_2 + E_d$$

La energía mecánica total en el estado inicial es igual a la energía mecánica total en el estado final, más la energía disipada en el paso del estado inicial al final.

EJEMPLO 11.7

Una cuerda de longitud L y peso por unidad de longitud p, está situada sobre una mesa horizontal, cuya cota sobre el plano de referencia es L. Entre la mesa y la cuerda hay un coeficiente de rozamiento al resbalamiento μ. En el instante inicial

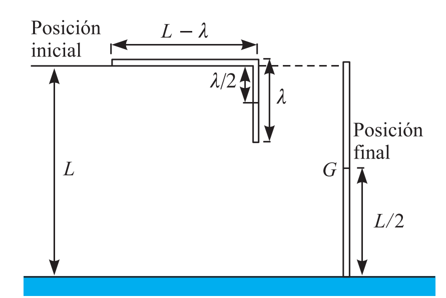


Figura 11.8.

cuelga de la mesa una longitud de cuerda λ, siendo esta longitud la estrictamente necesaria para que comience el movimiento (Figura 11.8). Determínese:

a) La longitud λ.

b) La velocidad de la cuerda cuando su extremo inferior toque el suelo.

Solución:

a) En la posición inicial la fuerza de la gravedad sobre la parte de cuerda que cuelga es neutralizada por la fuerza de rozamiento entre la mesa y la parte de cuerda sobre ella, y se verifica:

$$\lambda p = \mu p(L - \lambda)$$

de donde:

$$\lambda = \frac{\mu L}{1 + \mu}$$

b) La energía cinética inicial es nula: $T_i = 0$. La energía cinética final vale $T_f = \frac{1}{2} M v^2$, siendo v la velocidad de la cuerda cuando su extremo inferior toca el suelo y M la masa total de la cuerda, que cumple $Mg = pL$. Tomando el origen de potenciales en el plano de la mesa, la energía potencial inicial es:

$$U_i = -p\lambda \frac{\lambda}{2} = -\frac{1}{2} p\lambda^2$$

La energía potencial final es:

$$U_f = -pL \frac{L}{2} = -\frac{1}{2} pL^2$$

Éste es un caso en el cual las fuerzas disipativas tienen función potencial. La fuerza disipativa es el rozamiento entre la cuerda y la mesa, cuya expresión es $F_d = \mu p x$, siendo x la longitud de cuerda que queda sobre la mesa. Su potencial es:

$$U_d = \frac{1}{2} \mu p x^2 + C$$

En el instante inicial, $x = L - \lambda$, la energía disipada es nula:

$$0 = \frac{1}{2} \mu p(L - \lambda)^2 + C$$

de donde $C = -\frac{1}{2} \mu p(L - \lambda)^2$ y el potencial de las fuerzas disipativas es:

$$U_d = \frac{1}{2} \mu p[x^2 - (L - \lambda)^2]$$

La energía total disipada, desde el instante inicial hasta el final ($x = 0$), es:

$$E_d = U_d(L - \lambda) - U_d(0) = \frac{1}{2} \mu p(L - \lambda)^2$$

La conservación de la energía se expresa:

$$T_i + U_i = T_f + U_f + E_d$$

$$-\frac{1}{2}p\lambda^2 = \frac{1}{2}\frac{pL}{g}v^2 - \frac{1}{2}pL^2 + \frac{1}{2}\mu p(L-\lambda)^2$$

$$\frac{L}{g}v^2 = L^2 - \lambda^2 - \mu(L-\lambda)^2 = L^2 - \frac{\mu^2L^2}{(1+\mu)^2} - \frac{\mu L^2}{(1+\mu)^2} = L^2 - \frac{\mu L^2}{(1+\mu)^2} = \frac{L^2}{1+\mu}$$

de donde:

$$v = \sqrt{\frac{Lg}{1+\mu}}$$

11.6 Movimiento del sistema respecto a su c.d.m.

La Ecuación [11.2] permite estudiar el movimiento del c.d.m. del sistema pero, además, para un análisis completo del movimiento del sistema, es necesario conocer el movimiento de este respecto a su c.d.m.. Para ello, elegimos un sistema de referencia con origen en el c.d.m., $CX'Y'Z'$, y cuyos ejes se conserven paralelos a los ejes del sistema de referencia fijo, $OXYZ$.

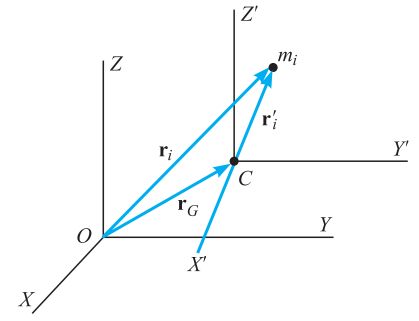


Figura 11.9.

Cantidad de movimiento

La cantidad de movimiento de un sistema respecto a su c.d.m. es nula. Ello se obtiene al aplicar la [11.4] en el sistema de referencia móvil, cuyo origen está ligado al c.d.m.: $\mathbf{p}' = M\mathbf{v}_C$ y, al ser $\mathbf{v}_C = 0$, es $\mathbf{p}' = 0$.

Lo cual puede también demostrarse directamente. En efecto, la cantidad de movimiento en el sistema de referencia ligado al c.d.m. es:

$$\mathbf{p}' = \sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i$$

Puesto que en el sistema de referencia ligado a C, el c.d.m. está en el origen, es:

$$M\mathbf{r}'_C = \sum m_i \mathbf{r}'_i$$

cuya derivada es:

$$\sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i = 0 \qquad [11.16]$$

y, por tanto, $\mathbf{p}' = 0$.

Momento cinético

El momento cinético respecto al c.d.m. es:

$$\mathbf{L}_C = \sum (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i)$$

El teorema del momento cinético, expresado en la ecuación vectorial [11.6], también se verificará en unos ejes ligados al c.d.m., alrededor de los cuales se

mueve el sistema, lo cual puede demostrarse directamente. Para ello, derivemos respecto al tiempo la expresión del momento cinético:

$$\dot{\mathbf{L}}_C = \sum_i (\dot{\mathbf{r}}_i \times m_i \mathbf{v}'_i) + \sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{v}}'_i)$$

El primer sumatorio es nulo, ya que lo es cada sumando, resultando:

$$\dot{\mathbf{L}}_C = \sum_i (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{a}'_i) = \sum_i (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}'_i) = \mathbf{M}_C(\mathbf{F}')$$

que es la expresión del teorema del momento cinético en unos ejes ligados al c.d.m.

El momento cinético respecto a O y el momento cinético respecto a C están relacionados mediante el siguiente teorema: *el momento cinético de un sistema material respecto a un punto O es igual a su momento cinético respecto a su c.d.m., más el momento cinético respecto a O, de su cantidad de movimiento situada en C.*

En efecto, el momento cinético respecto a O es:

$$\mathbf{L}_0 = \sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i)$$

teniendo en cuenta que son: $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_C + \mathbf{r}'_i$ y $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}'_i$, se expresa:

$$\mathbf{L}_0 = \sum_i [(\mathbf{r}_C + \mathbf{r}'_i) \times m_i(\mathbf{v}_C + \mathbf{v}'_i)$$

Al desarrollar, y puesto que es:

$$\sum_i m_i \mathbf{r}'_i = \sum_i m_i \mathbf{v}'_i = 0$$

queda:

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{r}_C \times \sum_i m_i \mathbf{v}_C + \sum_i (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i)$$

es decir:

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{r}_C \times m\mathbf{v}_C + \mathbf{L}_C = \mathbf{L}_C + \mathbf{M}_0(\mathbf{P}_C) \qquad [11.17]$$

con lo cual queda demostrado el teorema.

Un teorema análogo puede enunciarse para ejes, diciendo: *el momento cinético de un sistema material respecto a un cierto eje es igual al momento cinético del sistema respecto a un eje paralelo al anterior pasando por su c.d.m., más el momento cinético respecto al eje, de la cantidad de movimiento del sistema situada en su c.d.m.* La demostración es inmediata, basta multiplicar la [11.17] escalarmente por el vector unitario de dirección el eje:

$$L_E = L_{E'} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{M}_0(\mathbf{p}_C)$$

EJEMPLO 11.8

Dos partículas A y B, de igual masa m, están unidas mediante un hilo ideal de longitud l. La partícula A va unida a un punto fijo O mediante otro hilo ideal de la misma longitud l. Las partículas se mueven, sin rozamiento, sobre el plano horizontal que pasa por O, girando alrededor de la normal a ese plano, OZ, con velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ y manteniéndose alineadas con O. Calculemos:

1.º Las tensiones del hilo en los tramos OA y AB.
2.º El momento cinético del sistema respecto a O.
3.º El momento cinético del sistema respecto a su c.d.m.

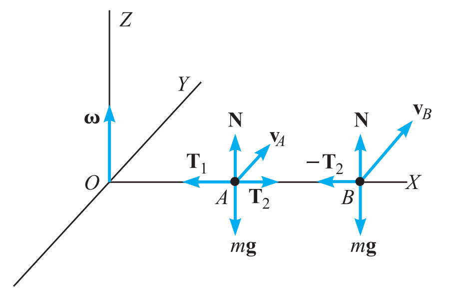


Figura 11.10.

Solución:

1.º Tomemos la línea OAB como eje OX del sistema de referencia móvil, y sean T_1 y T_2 las tensiones del hilo en los tramos OA y AB respectivamente (Figura 11.10). La ecuación de la Dinámica para la partícula B, escrita en el sistema de referencia móvil, es:

$$m\mathbf{a}_r = -T_2\mathbf{i} - mg\mathbf{k} + N\mathbf{k} - m\mathbf{a}_a = 0$$

La aceleración de arrastre de la partícula B es:

$$\mathbf{a}_a = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \omega\mathbf{k} \times (\omega\mathbf{k} \times 2l\mathbf{i}) = -2l\omega^2\mathbf{i}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación anterior resulta:

$$(2ml\omega^2 - T_2)\mathbf{i} + (N - mg)\mathbf{k} = 0$$

de donde: $T_2 = 2ml\omega^2$ y $N = mg$.

La ecuación del movimiento para la partícula A se expresa en el sistema móvil:

$$m\mathbf{a}_r = T_2\mathbf{i} - T_1\mathbf{i} + N\mathbf{k} - mg\mathbf{k} - m\mathbf{a}_a = 0$$

La aceleración de arrastre de la partícula A es $\mathbf{a}_a = -l\omega^2\mathbf{i}$ que, sustituido en la ecuación anterior, es:

$$(T_2 - T_1 + ml\omega^2)\mathbf{i} + (N - mg)\mathbf{k} = 0$$

de donde: $T_1 = T_2 + ml\omega^2 = 3ml\omega^2$.

2.º El momento cinético respecto a O es:

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{r}_A \times \mathbf{p}_B + \mathbf{r}_B \times \mathbf{p}_B = l\mathbf{i} \times ml\omega\mathbf{j} + 2l\mathbf{i} \times 2ml\omega\mathbf{j} = 5ml^2\omega\mathbf{k}$$

3.º El momento cinético respecto a C podemos obtenerlo por aplicación de la [11.17]. El c.d.m. del sistema verifica $2mx_C = ml + m2l$, por tanto, $x_C = 3l/2$.

La cantidad de movimiento del sistema, de acuerdo con [11.4], es $\mathbf{p} = 2m\mathbf{v}_C = 3ml\omega\mathbf{j}$ y el momento cinético respecto a C es:

$$\mathbf{L}_C = \mathbf{L}_0 - \mathbf{r}_C \times \mathbf{p} = 5ml^2\omega\mathbf{k} - 3l/2\,\mathbf{i} \times 3ml\omega\mathbf{j} = \frac{1}{2}ml^2\omega\mathbf{k}$$

Energía cinética

La energía cinética de un sistema es igual a la que tendría su c.d.m. dotado de toda la masa del sistema, más la debida al movimiento del sistema alrededor de su c.d.m. (Teorema de König).

En efecto, la energía cinética del sistema:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i$$

se expresa:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\mathbf{v}_C + \mathbf{v}'_i)\cdot(\mathbf{v}_C + \mathbf{v}'_i) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i\mathbf{v}_C\cdot\mathbf{v}_C + \frac{1}{2}\sum_i \mathbf{v}'_i\cdot\mathbf{v}'_i + \sum_i m_i\mathbf{v}_C\cdot\mathbf{v}'_i$$

El último sumando es nulo, ya que es:

$$\sum m_i\mathbf{v}_C\cdot\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_C\cdot\sum m_i\mathbf{v}'_i = 0$$

por la Expresión [11.16]. Con ello, la energía cinética se escribe:

$$T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2 = \frac{1}{2}Mv_C^2 + T' \qquad [11.18]$$

que es la expresión analítica del teorema de König.

EJEMPLO 11.9

Dos partículas de igual masa m tienen como vectores de posición, respecto a un sistema de referencia S de origen O, los vectores:

$$\mathbf{r}_1 = t^2\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_2 = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Determínese:

a) La cantidad de movimiento del sistema respecto a O.
b) El momento cinético respecto a O.
c) El momento cinético respecto a C.
d) La comprobación del teorema que relaciona ambos momentos cinéticos.
e) La energía cinética del sistema en la referencia S.
f) La energía cinética del sistema en la referencia S'.
g) La comprobación del teorema de König.

Solución:

a) Las velocidades de las partículas en el sistema S son:

$$\mathbf{v}_1 = 2t\,\mathbf{i} + \mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}$$

La cantidad de movimiento es:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 2m(t + 1)\mathbf{i} + m(1 + 2t)\mathbf{j}$$

que también puede calcularse aplicando [11.4]. Para ello, calculemos el vector posición del c.d.m.:

$$2m\mathbf{r}_C = m\mathbf{r}_1 + m\mathbf{r}_2 = m(t^2 + 2t)\mathbf{i} + m(t + t^2)\mathbf{j} + 2m\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{2}(t^2 - 2t)\mathbf{i} + \frac{1}{2}(t + t^2)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

La velocidad del c.d.m. es:

$$\mathbf{v}_C = (t + 1)\mathbf{i} + \frac{1}{2}(1 + 2t)\mathbf{j}$$

y la cantidad de movimiento del sistema:

$$\mathbf{p} = 2m\mathbf{v}_C = 2m(t + 1)\mathbf{i} + m(1 + 2t)\mathbf{j}$$

b) El momento cinético del sistema respecto a O es:

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_{01} + \mathbf{L}_{02} = \mathbf{r}_1 \times m\mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_2 \times m\mathbf{v}_2 =$$

$$= m\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ t^2 & t & 1 \\ 2t & 1 & 0 \end{vmatrix} + m\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2t & t^2 & 1 \\ 2 & 2t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -m(1 + 2t)\mathbf{i} + 2m(t + 1)\mathbf{j} + mt^2\mathbf{k}$$

c) El momento cinético del sistema respecto a C es:

$$\mathbf{L}_C = m\mathbf{r}'_1 \times \mathbf{v}'_1 + m\mathbf{r}'_2 \times \mathbf{v}'_2$$

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_C = \left(\frac{t^2}{2} - t\right)\mathbf{i} + \left(\frac{t}{2} - \frac{t^2}{2}\right)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_C = \left(t - \frac{t^2}{2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}\right)\mathbf{j} = -\mathbf{r}_1$$

$$\mathbf{v}'_1 = (t - 1)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{2} - t\right)\mathbf{j} = -\mathbf{v}'_2$$

Por tanto:

$$\mathbf{L}_C = 2m\mathbf{r}'_1 \times \mathbf{v}'_1 =$$

$$= 2m\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{t^2}{2} - t & \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2} & 0 \\ t - 1 & \frac{1}{2} - t & 0 \end{vmatrix} = 2m\frac{t^2}{4}\mathbf{k} = \frac{m}{2}t^2\mathbf{k}$$

d) Calculemos el momento cinético respecto a O de la cantidad de movimiento del sistema colocada en C:

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_C + \mathbf{r}_C \times 2m\mathbf{v}_C$$

$$2m\mathbf{r}_C \times \mathbf{v}_C = 2m\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{2}(t^2 + 2t) & \frac{1}{2}(t + t^2) & 1 \\ t + 1 & \frac{1}{2}(1 + 2t) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -m(1 + 2t)\mathbf{i} + 2m(t + 1)\mathbf{j} + \frac{m}{2}t^2\mathbf{k}$$

Es fácil comprobar que al sumar este vector con $\mathbf{L}_C$ se obtiene $\mathbf{L}_O$.

e) La energía cinética del sistema material en la referencia *OXYZ* es:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \frac{1}{2} m\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = \frac{m}{2}(8t^2 + 5)$$

f) La energía cinética del sistema en la referencia ligada a *C* es:

$$T' = T'_1 + T'_2 = \frac{1}{2} m\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_1 + \frac{1}{2} m\mathbf{v}'_2 \cdot \mathbf{v}'_2 = m\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_1 = \frac{m}{2}\left(4t^2 - 6t + \frac{5}{2}\right)$$

g) El teorema de König se comprueba fácilmente:

$$T = T' + \frac{2m}{2} \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{v}_C = \frac{m}{2}\left(4t^2 - 6t + \frac{5}{2}\right) +$$

$$+ m\left(2t^2 + 3t + \frac{5}{4}\right) = \frac{m}{2}(8t^2 + 5)$$

EJEMPLO 11.10

Una circunferencia de radio *R* y masa despreciable lleva, situadas diametralmente, dos masas iguales *m*, que pueden considerarse puntuales (Figura 11.11). La circunferencia, contenida en un plano vertical, rueda sin resbalar sobre una horizontal, siendo la velocidad de su centro constante, $\mathbf{v}_C = v_C \mathbf{i}$. En la posición inicial, una de las masas está en el punto de contacto con la recta sobre la que rueda. Determínese:

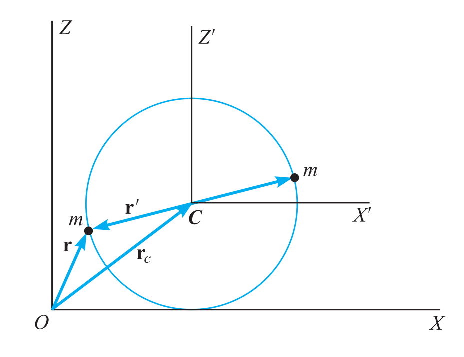


Figura 11.11.

a) La cantidad de movimiento del sistema.

b) El momento cinético respecto a *C*.

c) El momento cinético respecto a *O*.

d) La comprobación del teorema que relaciona ambos momentos.

e) La energía cinética respecto al sistema *S*.

f) La energía cinética respecto al sistema *S*′.

g) La comprobación del teorema de König.

Solución:

a) Posición inicial: una masa *m* en *O* y otra en el eje *OZ*, los ejes *OZ* y *CZ*′ son coincidentes. La velocidad del c.d.m. es $\mathbf{v}_C = v_C\mathbf{i}$ y la cantidad de movimiento es:

$$\mathbf{p} = 2m\mathbf{v}_C = 2mv_C\,\mathbf{i} \quad ; \quad \mathbf{p}' = 0$$

b) $\mathbf{L}_C = \mathbf{L}_{C1} + \mathbf{L}_{C2} = \mathbf{r}'_1 \times m\mathbf{v}'_1 + \mathbf{r}'_2 \times m\mathbf{v}'_2$. Puesto que son $\mathbf{r}'_2 = -\mathbf{r}'_1$ y $\mathbf{v}'_2 = -\mathbf{v}'_1$, resulta $\mathbf{L}_C = 2\mathbf{r}' \times m\mathbf{v}'$, siendo:

$$\mathbf{r}' = -R(\text{sen}\,\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{k}) \quad \text{y} \quad \mathbf{v}' = -R(\cos\theta\mathbf{i} - \text{sen}\,\theta\mathbf{k})\dot{\theta}$$

La circunferencia rueda sin deslizar y, por ello, es:

$$x_C = R\theta \quad , \quad v_C = R\dot{\theta} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}' = -v_C(\cos\theta\mathbf{i} - \text{sen}\,\theta\mathbf{k})$$

con lo cual:

$$\mathbf{L}_C = 2mRv_C \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \end{vmatrix} = 2mRv_C\,\mathbf{j}$$

c) El momento cinético respecto a O puede calcularse por aplicación de la Expresión [11.17]:

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_C + 2m\mathbf{r}_C \times \mathbf{v}_C$$

siendo

$$\mathbf{r}_C = v_C t\,\mathbf{i} + R\,\mathbf{k} \quad , \quad \text{es}$$

$$\mathbf{r}_C \times \mathbf{v}_C = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_C t & 0 & R \\ v_C & 0 & 0 \end{vmatrix} = Rv_C\,\mathbf{j}$$

y

$$\mathbf{L}_0 = 2mRv_C\,\mathbf{j} + 2mRv_C\,\mathbf{j} = 4mRv_C\,\mathbf{j}$$

d) Hallemos el cálculo directo de $\mathbf{L}_0$ primero para una de las masas:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_C + \mathbf{r} = v_C t\,\mathbf{i} + R\,\mathbf{k} - R(\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{k}) = (v_C t - R\operatorname{sen}\theta)\mathbf{i} + R(1 - \cos\theta)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}' = v_C\,\mathbf{i} - v_C(\cos\theta\,\mathbf{i} - \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{k}) = v_C(1 - \cos\theta)\mathbf{i} + v_C\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{L}_{01} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = mv_C \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_C t - R\operatorname{sen}\theta & 0 & R(1 - \cos\theta) \\ 1 - \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \end{vmatrix} =$$

$$= m[R(1 - \cos\theta)^2 - v_C t\operatorname{sen}\theta + R\operatorname{sen}^2\theta]v_C\,\mathbf{j} =$$

$$= mv_C(2R - 2R\cos\theta - v_C t\operatorname{sen}\theta)\,\mathbf{j}$$

El momento cinético para la otra partícula se obtendrá haciendo $\theta = \pi + \theta$:

$$\mathbf{L}_{01} = mv_C(2R + 2R\cos\theta + v_C t\operatorname{sen}\theta)\,\mathbf{j}$$

El momento cinético total es:

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_{01} + \mathbf{L}_{02} = 4mRv_C\,\mathbf{j}$$

e) La energía cinética en el sistema de referencia móvil es:

$$T' = T'_1 + T'_2 = m\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' = mv_C^2$$

f) Podemos obtener la energía cinética en el sistema de referencia fijo por aplicación del teorema de König:

$$T = T' + \frac{1}{2}\,2mv_C^2 = mv_C^2 + mv_C^2 = 2mv_C^2$$

g) Por cálculo directo se obtendrá así:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}m\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{v}_1 = v_C(1 - \cos\theta)\mathbf{i} + v_C \operatorname{sen}\theta\mathbf{k} \quad ; \quad \mathbf{v}_2 = v_C(1 + \cos\theta)\mathbf{i} - v_C \operatorname{sen}\theta\mathbf{k}$$

$$T_1 = \frac{m}{2}v_C^2[(1 - \cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta)] = mv_C^2(1 - \cos\theta)$$

$$T_2 = \frac{m}{2}v_C^2\,[(1 + \cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta)] = mv_C^2(1 + \cos\theta)$$

Por tanto:

$$T = 2mv_C^2$$

11.7 Choques

En el choque de dos cuerpos juegan un papel muy importante las características elásticas de los mismos. Durante el choque se producen en ambos deformaciones, creándose en el interior de ellos fuerzas elásticas que se oponen a la deformación, cesando ésta cuando se ha consumido en ella toda la energía cinética que el sistema tenía antes del choque. Si las deformaciones se producen dentro del límite elástico de los cuerpos, éstos recuperan su forma primitiva, devolviendo toda la energía que habían absorbido, que pasa de nuevo a ser energía cinética de ellos. El choque en el que esto se verifica se denomina *elástico* y en él hay conservación de la energía cinética. Si en el choque las deformaciones superan a las correspondientes al límite elástico de los cuerpos, quedarán deformaciones residuales, consumiéndose una parte de la energía del sistema y no cumpliéndose la conservación de la energía mecánica; en este caso, el choque se denomina *inelástico*.

En cualquier caso, siempre que las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema sean nulas se verificará la conservación de la cantidad de movimiento, pues el teorema de la cantidad de movimiento así lo establece:

$$\text{Si} \quad \mathbf{F} = 0 \quad , \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{p} = \text{cte.}$$

Puede suceder que las fuerzas exteriores no sean nulas, pero si su componente sobre una cierta dirección, en cuyo caso se conserva la proyección de la cantidad de movimiento sobre esa dirección.

Si la dirección del movimiento de los cuerpos es la misma en el instante del choque, se dice que éste es *frontal* y, en el caso contrario, *oblicuo*.

Analicemos algunos casos importantes de choques.

a) *Choque elástico frontal.*

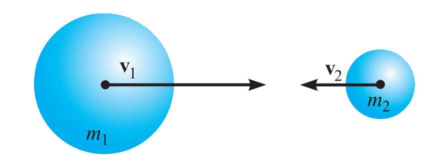


Figura 11.12.

Consideremos el choque de dos esferas perfectamente elásticas, de masas m_1 y m_2, con velocidades $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ antes del choque, y $\mathbf{v}_1'$ y $\mathbf{v}_2'$ después del mismo. Si en la dirección del movimiento no existe fuerza alguna, la conservación de la cantidad de movimiento da:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \qquad [11.19]$$

y, debido a que el choque es elástico, la conservación de la energía cinética se escribe:

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \qquad [11.20]$$

Estas dos ecuaciones nos permiten determinar las velocidades de las esferas después del choque, lo que puede hacerse escribiéndolas en la forma:

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2)$$

$$m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2)$$

y dividiéndolas miembro a miembro resulta:

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2$$

lo que pone de manifiesto que la velocidad relativa antes del choque, $v_1 - v_2$, es igual a la velocidad relativa después del choque cambiada de signo, $-(\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_2')$:

$$v_1 - v_2 = -(v_1' - v_2')$$

Llevando a la Expresión [11.19] el valor de:

$$v_2' = v_1 + v_1' - v_2 \qquad [11.21]$$

obtenemos el valor de v_1':

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + 2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_2 \qquad [11.22]$$

y, con este valor en [11.21], obtenemos el valor de v_2':

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_2 \qquad [11.23]$$

Si las dos esferas son de igual masa, resulta $v_1' = v_2$ y $v_2' = v_1$, es decir, las esferas intercambian entre sí sus velocidades. Así, por ejemplo, si una estaba en reposo antes del choque, después de él se pone en movimiento con la velocidad que tenía la otra, la cual quedará ahora en reposo. Si la masa de la esfera que está en reposo es enormemente grande frente a la otra, $v_2 = 0$ y $m_1/m_2 = 0$, resulta:

$$v_1' = \frac{m_1/m_2 - 1}{m_1/m_2 + 1} v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1' = -v_1$$

es decir, la esfera móvil cambia de sentido su velocidad, pero no de módulo ni de dirección. Este caso se presenta cuando una pelota choca normalmente contra un muro.

EJEMPLO 11.11

Una masa m está inmóvil sobre un plano horizontal y unida mediante un muelle de constante elástica k a una pared fija. Otra masa de valor $2m$ se dirige a la primera siguiendo la línea eje del muelle con velocidad V y choca frontalmente con la primera. Sabiendo que el choque es perfectamente elástico, conociendo el valor de m y que el muelle se comprimió una longitud d después del choque, calculemos las velocidades de ambas masas después del choque y la velocidad V de la masa $2m$ antes del choque.

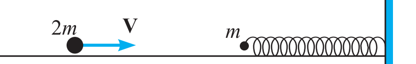


Figura 11.13.

Solución:

Entre un instante antes y un instante después del choque habrá conservación de la cantidad de movimiento:

$$2mV = mv' + 2mV'$$

siendo v' la velocidad de la masa m después del choque y V' la velocidad de la masa $2m$ después del choque.

Por ser el choque perfectamente elástico se conservará la energía cinética:

$$2mV^2 = mv'^2 + 2mV'^2$$

Puesto que toda la energía cinética de la masa m después del choque se emplea en comprimir el muelle, se transformará en energía potencial de éste:

$$mv'^2 = kd^2$$

de donde:

$$v' = d\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Con ello, las dos ecuaciones anteriores se escriben:

$$V - V' = \sqrt{\frac{k}{m}}\frac{d}{2} \quad \text{y} \quad V^2 - V'^2 = \frac{k}{m}\frac{d^2}{2}$$

cuya resolución da:

$$V = \frac{3}{4}d\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{y} \quad V' = \frac{d}{4}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

b) *Choque elástico oblicuo.*

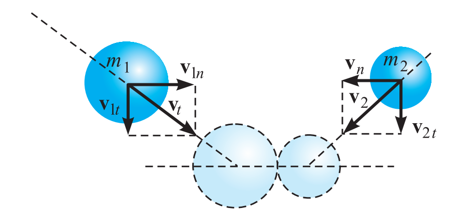


Figura 11.14.

Podemos descomponer las velocidades de las esferas según la normal, común a ambas en el instante del choque, y según la perpendicular a ésta (Figura 11.14). Por simetría, la resultante de las fuerzas elásticas tiene la dirección de la normal común a las esferas en el instante del choque, no resultando afectadas por el choque las componentes de las velocidades sobre la perpendicular a la misma, $v_{1t} = v'_{1t}$ y $v_{2t} = v'_{2t}$. Para las componentes según la normal común a las esferas en el instante del choque, se cumplen relaciones análogas a las [11.22] y [11.23]:

$$v'_{1n} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{1n} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_{2n}$$

$$v'_{2n} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1n} - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{2n}$$

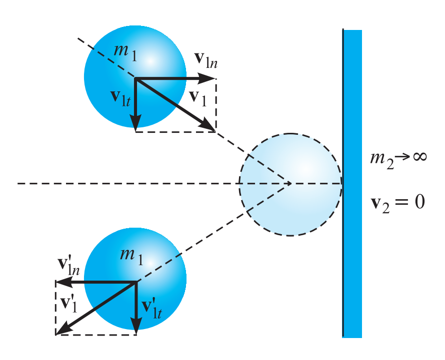


Figura 11.15.

Si una de las esferas está en reposo, $v_2 = 0$, y su masa es muy grande frente a la de la otra, $m_1/m_2 = 0$, resulta:

$$v'_{1n} = -v_{1n}$$

y, como se verificará $v'_{1t} = v_{1t}$, se concluye que el ángulo de incidencia y el de reflexión son iguales (Figura 11.15). Esto sucede realmente cuando una pelota elástica choca oblicuamente contra la pared, manteniéndose en un plano horizontal.

c) *Choque inelástico o plástico.*

Si los cuerpos que chocan se comportan de forma completamente inelástica, es decir, si toda la deformación producida en el choque se conserva, se dice que éste es inelástico o plástico. Al no haber reacción elástica, los dos cuerpos quedan unidos después del choque, es decir, $v'_1 = v'_2 = v'$. La conservación de la cantidad de movimiento se escribe, en este caso:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v'$$

y la velocidad de ambas esferas después del choque es:

Velocidad después del choque

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Parte de la energía cinética inicial se emplea en la deformación. La energía cinética inicial es:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

y, después del choque, la energía cinética es:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v'^2 = \frac{1}{2} \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{m_1 + m_2}$$

La pérdida de energía cinética es:

Energía cinética perdida

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$$

poniéndose de manifiesto que la pérdida de energía cinética es proporcional al cuadrado de la diferencia entre los módulos de las velocidades iniciales.

EJEMPLO 11.12

Un péndulo está formado por una masa M suspendida de un punto fijo O mediante una varilla rígida de masa despreciable y longitud L. El péndulo se encuentra en su posición de equilibrio estable. Una masa m se mueve siguiendo una línea horizontal con velocidad v, que se desea determinar, chocando con el centro de la masa del péndulo y quedando incrustada en ella (Figura 11.16). Sabiendo que la masa del péndulo después del choque alcanza una altura máxima H sobre la posición inicial, determinemos:

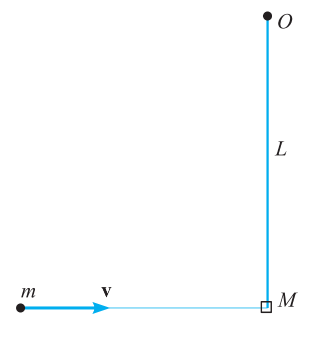


Figura 11.16.

a) La velocidad de la masa m antes del choque.

b) La energía perdida en el choque.

Solución:

a) La conservación de la cantidad de movimiento entre un instante antes y uno inmediatamente después del choque se expresa:

$$mv = (m + M)V$$

y la velocidad inicial de salida después del choque de la masa del péndulo (ahora $m + M$) es:

$$V = \frac{m}{m + M} v$$

La energía cinética inicial después del choque es:

$$T = \frac{1}{2}(m + M)V^2 = \frac{m^2 v^2}{2(m + M)}$$

La energía potencial inicial, así como la energía cinética final, son ambas nulas. La energía potencial final es $U_f = (m + M)gH$ (Figura 11.17).

La conservación de la energía mecánica, desde un instante después del choque hasta la posición final, se expresa:

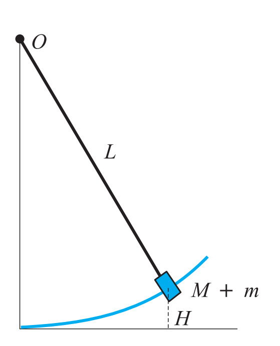


Figura 11.17.

$$(m + M)gH = \frac{m^2 v^2}{2(m + M)} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{m + M}{m}\sqrt{2gH}$$

b) La energía antes del choque es sólo cinética:

$$T' = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{(m + M)^2}{m} gH$$

y la energía, un instante después del choque, también es sólo cinética:

$$T = \frac{m^2 v^2}{2(m + M)} = (m + M)gH$$

Por tanto, la pérdida de energía en el choque es:

$$\Delta T = T' - T = (m + M)\frac{M}{m} gH$$

d) *Choque parcialmente elástico. Coeficiente de restitución.*

Hemos visto cómo en el choque elástico la velocidad relativa de las esferas cambia de sentido, pero no de módulo, y cómo en el choque inelástico la velocidad relativa se anula. En la realidad se presentan todos los casos intermedios posibles, diciéndose que el comportamiento de los cuerpos que chocan es parcialmente elástico, lo que se expresa:

$$v_2' - v_1' = e(v_1 - v_2) \qquad [11.24]$$

Coeficiente de restitución

llamándose a *e coeficiente de restitución*. Para $e = 1$ estamos en el caso de choque elástico; $e = 0$ corresponde al choque inelástico; y $0 < e < 1$ corresponde a los casos de choque parcialmente elástico. La Ecuación [11.19] se sigue cumpliendo y, junto con la [11.24], nos permite calcular las velocidades después del choque, obteniéndose:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2 e}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2(1 + e)}{m_1 + m_2} v_2$$

$$v_2' = \frac{m_1(1 + e)}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1 e}{m_1 + m_2} v_2$$

La pérdida de energía cinética en el choque es:

Energía cinética perdida

$$\Delta T = \frac{(1 - e^2)}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_2 - v_1)^2$$

Estas tres expresiones coinciden con las del choque elástico para $e = 1$ y para $e = 0$, con las correspondientes al inelástico.

Dinámica del sólido

CAPÍTULO 12

12.1 Teoremas generales de la Dinámica del sólido rígido

Sólido rígido es toda distribución continua de materia en la cual la distancia entre las distintas partículas que lo componen permanece constante bajo la acción de fuerzas exteriores. Por tanto, en un sistema material rígido formado por infinitos puntos materiales, su forma, su masa y su volumen permanecerán constantes. La materia que forma el sólido rígido puede configurar una línea, una superficie o un volumen y cada elemento diferencial de masa, dm, puede adoptar, respectivamente, las expresiones $dm = \lambda\, dl$, $dm = \sigma\, dA$ o $dm = \rho\, dv$, siendo λ, σ y ρ, las densidades lineal, superficial o espacial del sólido, respectivamente.

Es evidente que en este sistema se cumplirán los teoremas deducidos para los sistemas de puntos materiales, con la particularidad de ser ahora infinitos los puntos y su masa elemental. El movimiento del centro de masas del sólido está dado por:

$$m\ddot{\mathbf{r}}_C = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F} \qquad [12.1]$$

Los teoremas de la cantidad de movimiento y del momento cinético también se seguirán cumpliendo:

$$\dot{\mathbf{p}} = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F} \qquad [12.2]$$

$$\dot{\mathbf{L}}_0 = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \mathbf{M}_0 \qquad [12.3]$$

La expresión de la cantidad de movimiento ahora será:

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{v}\, dm \qquad [12.4]$$

que también, de acuerdo con [11.4], puede expresarse:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_C \qquad [12.5]$$

y la expresión del momento cinético:

$$\mathbf{L}_0 = \int (\mathbf{r} \times \mathbf{v})\, dm \qquad [12.6]$$

integrales que deben estar extendidas a todo el espacio ocupado por el sólido.

También se verificará el teorema de la energía cinética para los sistemas rígidos, cuya Expresión [11.12] es:

$$T_2 - T_1 = \sum \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{dr}_i \qquad [12.7]$$

En consecuencia, la energía cinética se conserva siempre que el trabajo producido por las fuerzas que actúan sobre el sólido sea nulo. La energía cinética total del sólido ahora se expresa:

$$T = \frac{1}{2} \int v^2\, dm \qquad [12.8]$$

Si las fuerzas exteriores derivan de un potencial U y no existen fuerzas disipativas, se verificará el teorema de la conservación de la energía mecánica:

$$T_2 + U_2 = T_1 + U_1 = T + U = \text{cte.} \qquad [12.9]$$

Asimismo, se verificarán los llamados teoremas de König:

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_C + \mathbf{r}_C \times m\mathbf{v}_C \quad \text{y} \quad T = T' + \frac{1}{2} m v_C^2 \qquad [12.10]$$

Veamos ahora la aplicación de todos estos teoremas a la Dinámica del sólido rígido en sus movimientos simples.

12.2 Dinámica del sólido rígido con movimiento de traslación

Por ser el movimiento de traslación, las velocidades de todas las partículas del sólido son iguales en cada instante e iguales a la velocidad de traslación del sólido en ese instante. Lo mismo sucede con las aceleraciones, todos los puntos tienen la misma en cada instante.

El teorema del movimiento del centro de masas y el de la cantidad de movimiento conducen al mismo resultado. El primero de expresa:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \qquad [12.11]$$

y, puesto que la cantidad de movimiento del sólido es $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, el teorema de la cantidad de movimiento da:

$$\dot{\mathbf{p}} = m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

que es la misma [12.11], de la cual se obtiene $\mathbf{a}$ y, por integración, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{r}$ para cada punto del sólido, usando las condiciones iniciales para ese punto. Las trayectorias de los diferentes puntos del sólido serán líneas paralelas.

El momento cinético se expresa:

$$\mathbf{L} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{v}\, dm = \left(\int \mathbf{r}\, dm\right) \times \mathbf{v} = m\mathbf{r}_C \times \mathbf{v} = \mathbf{r}_C \times \mathbf{p}$$

y derivando obtenemos:

$$\dot{\mathbf{L}} = \dot{\mathbf{r}}_C \times m\mathbf{v} + \mathbf{r}_C \times m\mathbf{a} = \mathbf{r}_C \times m\mathbf{a}$$

con lo que el teorema del momento cinético es:

$$\mathbf{r}_C \times m\mathbf{a} = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) \qquad [12.12]$$

En consecuencia, *el sistema de vectores formado por las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema es equivalente en O al vector m***a** *situado en el centro de masas del sistema*, puesto que, según [12.11], tienen la misma resultante y, de acuerdo con [12.12], el mismo momento respecto a O.

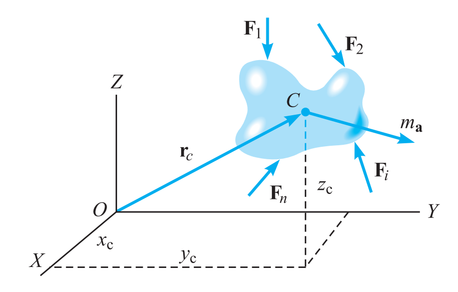


Figura 12.1.

Por todo ello, para la resolución de problemas de Dinámica de sólidos en traslación, es aconsejable construir un diagrama para el sólido libre, en el que aparezcan todas las fuerzas exteriores al sistema, y establecer la equivalencia de ellas con el vector $m\mathbf{a}$ situado en el centro de masas (Figura 12.1).

Si los sistemas $m\mathbf{a}$ y $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_n$, son equivalentes en O, también lo serán en cualquier otro punto y, concretamente, en C; y puesto que el momento del vector $m\mathbf{a}$ respecto a C es nulo, el momento resultante en C de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sólido debe ser nulo:

$$\sum \mathbf{M}_C(\mathbf{F}) = \sum (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i) = 0 \qquad [12.13]$$

Ésta es la condición para que el sólido no gire alrededor de su c.d.m.

La energía cinética de un sólido en movimiento de traslación, debido a tener todos sus puntos la misma velocidad en cada instante, es:

$$T = \frac{1}{2} v^2 \int dm = \frac{1}{2} mv^2 \qquad [12.14]$$

que *es la energía cinética del c.d.m. dotado de toda la masa del sistema*. La energía cinética respecto al sistema de referencia ligado al c.d.m. será nula, $T' = 0$, pues el sólido, en el movimiento de traslación, no se mueve respecto a él.

El teorema de las fuerzas vivas se verificará tal y como se ha visto, así como la conservación de la energía mecánica en el caso de que las fuerzas exteriores no sean disipativas y deriven de un potencial:

$$\frac{1}{2} m(v_{C2}^2 - v_{C1}^2) = W_e \quad , \quad \frac{1}{2} mv_{C1}^2 + U_1 = \frac{1}{2} mv_{C2}^2 + U_2$$

EJEMPLO 12.1

Una barra homogénea de masa $m = 100$ kg y longitud l está articulada a un sistema fijo mediante dos varillas rígidas de masa despreciable, como se indica en la Figura 12.2, siendo $d = 1$ m. En la articulación O se aplica un momento $\mathbf{M}_0 = 900\mathbf{k}$ N.m. Hallemos en función del ángulo θ y expresado en el sistema móvil indicado:

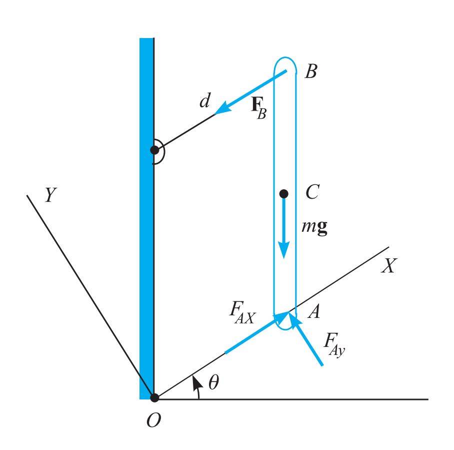


Figura 12.2.

1.º La aceleración angular.
2.º La velocidad angular.
3.º Las acciones que las varillas transmiten a la barra en A y B.
4.º Todos los valores citados para la posición $\theta = 60°$.

Solución:

1.º En la figura se han representado todas las fuerzas que actúan sobre la barra. El momento transmitido por OA es $M_0 = dF_{Ay}$, $F_{Ay} = 900$ N.

La ecuación del movimiento del c.d.m. es:

$$100\,\mathbf{a}_C = (F_{Ax} - F_B - mg\operatorname{sen}\theta)\mathbf{i} + (900 - mg\cos\theta)\mathbf{j}$$

La barra realiza un movimiento de traslación, por lo que todos sus puntos describen trayectorias paralelas con igual velocidad y aceleración en cada posición. La aceleración del c.d.m. es:

$$\mathbf{a}_C = -\omega^2\,\mathbf{i} + \alpha\,\mathbf{j}$$

y, por tanto, deben ser:

$$100\,\omega^2 = F_B - F_{Ax} + 980\operatorname{sen}\theta \qquad [1]$$

y

$$100\,\alpha = 900 - 980\cos\theta$$

Esta última fórmula permite despejar $\alpha = 9 - 9{,}8\cos\theta$.

2.º Una integración de α nos permite obtener ω. Para ello, eliminamos el tiempo en la definición de ambas, resultando $\omega\,d\omega = \alpha\,d\theta$, cuya integración es:

$$\frac{1}{2}\,\omega^2 = \int \alpha\,d\theta = 9\theta - 9{,}8\operatorname{sen}\theta \quad \text{y} \quad \omega = (18\theta - 19{,}6\operatorname{sen}\theta)^{1/2}$$

3.º Para obtener las acciones sobre la barra, tomemos momentos respecto a C:

$$\mathbf{CB} \times \mathbf{F}_B + \mathbf{CA} \times \mathbf{F}_A = 0$$

que en el sistema de referencia elegido se expresa:

$$\frac{1}{2}\,l\,(\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}) \times (-F_B\,\mathbf{i}) - \frac{1}{2}\,l\,(\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}) \times (F_{Ax}\,\mathbf{i} + F_{Ay}\,\mathbf{j}) = 0$$

de la que se obtiene:

$$F_B + F_{Ax} = 900\tan\theta \qquad [2]$$

Al sustituir en la Expresión [1] el valor obtenido de ω, se obtiene:

$$F_B - F_{Ax} = 1\,800\theta - 2\,940\operatorname{sen}\theta$$

que permite, junto con la [2], obtener:

$$F_B = 900\theta + 450\tan\theta - 1\,470\operatorname{sen}\theta$$

y

$$F_{Ax} = 450\tan\theta - 900\,\theta + 1\,470\operatorname{sen}\theta$$

4.º Para la posición $\theta = 60^\circ$ se obtienen los valores:

$$\alpha = 4{,}1 \text{ rad/s}^2 \quad , \quad \omega = 1{,}37 \text{ rad/s} \quad , \quad F_B = 448{,}84 \text{ N y } F_{Ax} = 1\,110 \text{ N}$$

12.3 Momentos y productos de inercia

Para el estudio de la Dinámica del sólido rígido es necesario tener un profundo conocimiento sobre momentos y producto de inercia. Aquí, pretendemos dar únicamente los conceptos fundamentales que nos permitan, en cada caso, establecer las ecuaciones de la Dinámica del sólido rígido en rotación alrededor de un eje, en los casos particulares que indicaremos.

Se define el *momento de inercia de un sistema material respecto a un punto, recta o plano, como la suma de los productos de las masas de los puntos del sistema por el cuadrado de sus distancias al punto, recta o plano, respectivamente*. Según que el sistema sea discreto o continuo, el momento de inercia se expresa:

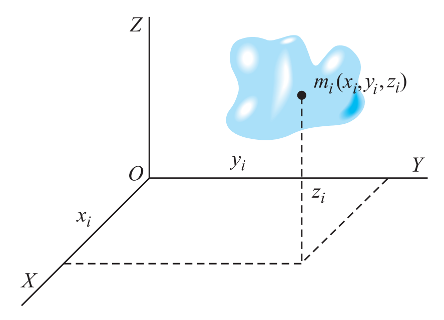
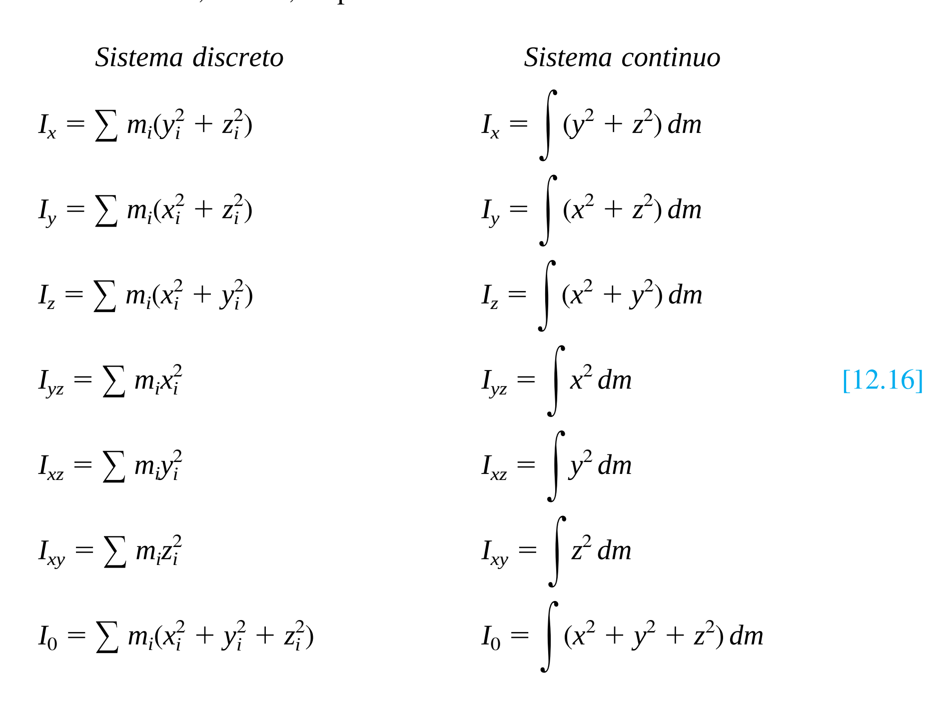


Figura 12.3.

$$I = \sum d_1^2 m_i \quad \text{o} \quad I = \int_R d^2\, dm \qquad [12.15]$$

estando el sumatorio extendido a todos los puntos con masa y la integral a todo el espacio ocupado por la masa.

Consideremos un sistema de referencia cartesiano trirrectangular y hallemos los momentos de inercia de un sólido cualquiera (Figura 12.3) respecto a cada uno de los ejes coordenados y a cada uno de los planos coordenados, así como al origen de coordenadas, siendo, respectivamente:



Sistema discreto — *Sistema continuo*

$$I_x = \sum m_i(y_i^2 + z_i^2) \qquad I_x = \int (y^2 + z^2)\, dm$$

$$I_y = \sum m_i(x_i^2 + z_i^2) \qquad I_y = \int (x^2 + z^2)\, dm$$

$$I_z = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) \qquad I_z = \int (x^2 + y^2)\, dm$$

$$I_{yz} = \sum m_i x_i^2 \qquad I_{yz} = \int x^2\, dm \qquad [12.16]$$

$$I_{xz} = \sum m_i y_i^2 \qquad I_{xz} = \int y^2\, dm$$

$$I_{xy} = \sum m_i z_i^2 \qquad I_{xy} = \int z^2\, dm$$

$$I_0 = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \qquad I_0 = \int (x^2 + y^2 + z^2)\, dm$$

De la simple observación de estas relaciones se deduce:

a) El momento de inercia respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a tres planos perpendiculares dos a dos, que pasan por el punto.

b) El momento de inercia respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a un plano y a una recta, perpendiculares entre sí y pasando por el punto.

c) El momento de inercia respecto a un eje es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a dos planos, perpendiculares entre sí y que pasan por el eje.

d) El momento de inercia respecto a un punto es la mitad de la suma de los momentos de inercia respecto a tres ejes perpendiculares dos a dos que pasan por el punto.

A las expresiones:

Productos de inercia

$$P_{xy} = \sum m_i x_i y_i \quad , \quad P_{xz} = \sum m_i x_i z_i \quad \text{y} \quad P_{yz} = \sum m_i y_i z_i$$

suma de los productos de las masas de los puntos del sistema por las distancias a dos de los planos coordenados, se les denomina *productos de inercia* respecto a dichos planos o también, momentos de inercia compuestos. Para un sistema continuo son:

$$P_{xy} = \int xy\, dm, \quad P_{xz} = \int xz\, dm \quad \text{y} \quad P_{yz} = \int yz\, dm \qquad [12.17]$$

Se denomina *radio de giro correspondiente a un eje*, a la distancia de este eje, a la que sería necesario concentrar toda la masa del sistema en un punto, para obtener el mismo momento de inercia respecto al eje que tiene el sistema, $I = Mr_g$.

12.4 Teoremas de Steiner

1.º *El momento de inercia de un sistema material respecto a un punto es igual al momento de inercia del sistema respecto a su c.d.m., más el producto de la masa total del sistema por la distancia al cuadrado entre el punto y el c.d.m. del sistema.*
2.º *El momento de inercia de un sistema material respecto a una recta es igual al momento de inercia respecto a una recta paralela a la primera, trazada por el c.d.m. del sistema, más el producto de la masa total del sistema por la distancia al cuadrado entre las dos rectas.*
3.º *El momento de inercia de un sistema material respecto a un plano es igual al momento del sistema respecto a un plano paralelo al primero, trazado por su c.d.m., más el producto de la masa total del sistema por la distancia al cuadrado entre los dos planos.*
4.º. *El producto de inercia respecto a dos planos es igual al producto de inercia respecto a dos planos paralelos a los anteriores pasando ambos por el c.d.m. del sistema, más el producto de la masa total del sistema por las distancias entre las dos parejas de planos paralelos.*

La demostración de estos teoremas es la siguiente:

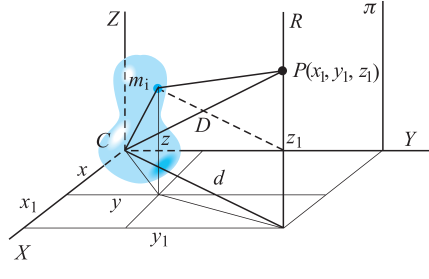


Figura 12.4.

1.º Tomemos como origen de coordenadas el c.d.m. del sistema y calculemos el momento de inercia del sólido respecto al punto $P(x_1, y_1, z_1)$:

$$\begin{aligned} I_P &= \sum m_i[(x_1 - x_i)^2 + (y_1 - y_i)^2 + (z_1 - z_i)^2] = \\ &= \sum m_i(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + \sum m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \\ &\quad - 2x_1 \sum m_i x_i - 2y_1 \sum m_i y_i - 2z_1 \sum m_i z_i = \\ &= I_C + MD^2 \end{aligned}$$

puesto que, por coincidir el c.d.m. del sistema con el origen de coordenadas se verifican:

$$\sum m_i x_i = 0 \quad , \quad \sum m_i y_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum m_i z_i = 0$$

2.º Consideremos la recta R de ecuaciones $x = x_1$, $y = y_1$, y hallemos el momento de inercia del sólido respecto a ella:

$$I_R = \sum m_i[(x_1 - x_i)^2 + (y_1 - y_i)^2] =$$
$$= \sum m_i(x_1^2 + y_1^2) + \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) -$$
$$- 2x_1 \sum m_i x_i - 2y_1 \sum m_i y_i =$$
$$= I_z + Md^2$$

3.º Consideremos el plano de ecuación $y = y_1$. El momento de inercia del sólido respecto a él es:

$$I_\pi = \sum m_i(y_1 - y_i)^2 = \sum m_i y_i^2 -$$
$$- 2y_1 \sum m_i y_i + \sum m_i y_i^2 = I_y + My_1^2$$

4.º El producto de inercia respecto a los planos de ecuación $y = y_1$ y $x = x_1$ es:

$$P_{x_1 y_1} = \sum m_i(x_1 - x_i)(y_1 - y_i) =$$
$$= \sum m_i x_1 y_1 + \sum m_i x_i y_i -$$
$$- \sum m_i x_i y_1 - \sum m_i y_i x_1 =$$
$$= P_{xy} + Mx_1 y_1$$

12.5 Cálculo de momentos de inercia

Momento de inercia de una varilla homogénea de longitud L, masa m y sección despreciable: 1.º *Respecto a su centro*; *y* 2.º *respecto a uno de sus extremos.*

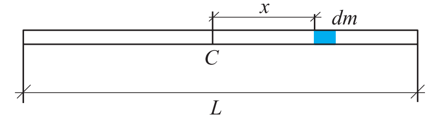


Figura 12.5.

1.º Llamando λ a su densidad lineal, el elemento de masa es $dm = \lambda\, dx$. El momento de inercia respecto a C es:

$$I_C = \int x^2\, dm \quad \text{o} \quad I_C = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \lambda\, dx$$

cuya integración da:

$$I_C = \frac{\lambda L^3}{12} = \frac{ML^2}{12}$$

La última igualdad se escribe teniendo en cuenta que es $M = \lambda L$.

2.º El momento respecto a uno de sus extremos se obtiene aplicando el correspondiente teorema de Steiner:

$$I_A = I_C + M\frac{L^2}{4} = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{4} = \frac{ML^2}{3}$$

Momento de inercia de una placa rectangular, *de dimensiones a y b*, *homogénea*, *de espesor despreciable y densidad superficial* σ: 1.º *Respecto a cada uno de los ejes de simetría que pasan por su centro*; 2.º *respecto a cada uno de sus lados*; 3.º *respecto a su centro*; *y* 4.º *respecto a uno de sus vértices.*

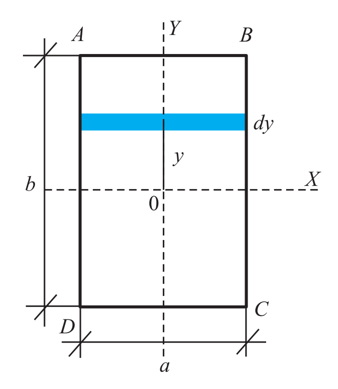


Figura 12.6.

1.º El momento de inercia respecto al eje de las equis es:

$$I_x = \int y^2\, dm$$

Como elemento diferencial de masa tomamos el indicado en la Figura 12.6, cuyo valor es $dm = \sigma a\, dy$, con lo cual es:

$$I_x = \sigma a\, p\mathbf{N} \int_{-b/2}^{b/2} y^2\, dy = \sigma a\, \frac{b^3}{12}$$

La masa total de la placa es $M = \sigma ab$ y, en función de ella, se escribe:

$$I_x = \frac{Mb^2}{12}$$

Análogamente, el momento de inercia repecto al eje de YY' será:

$$I_y = \frac{Ma^2}{12}$$

El momento de inercia respecto al eje de las zetas se obtiene como suma de los momentos de inercia respecto a dos planos perpendiculares entre sí que lo contengan. Al ser la placa de espesor despreciable, éstos serán I_x e I_y. Por tanto:

$$I_z = I_x + I_y = \frac{M}{12}(a^2 + b^2) = I_0$$

2.º El momento de inercia respecto a los lados se obtiene por aplicación del teorema de Steiner:

$$I_{AB} = I_{CD} = I_x + M\,\frac{b^2}{4} = \frac{Mb^2}{12} + M\,\frac{b^2}{4} = \frac{Mb^2}{3}$$

Análogamente, es:

$$I_{AD} = I_{BC} = \frac{Ma^2}{3}$$

3.º El momento de inercia respecto a O, por ser la placa de espesor despreciable, será igual al momento de inercia respecto al eje de las zetas, es decir:

$$I_0 = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$$

También puede verse como la suma de los momentos de inercia respecto a tres planos perpendiculares dos a dos pasando por el punto O:

$$I_0 = I_{xz} + I_{yz} + I_{xy} = I_x + I_y = I_z$$

4.º El momento de inercia respecto al vértice A es:

$$I_A = I_0 + M\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right) = \frac{M}{12}(a^2 + b^2) + \frac{M}{4}(a^2 + b^2) = \frac{M}{3}(a^2 + b^2)$$

Momento de inercia de un disco homogéneo de radio R, espesor despreciable y densidad superficial σ, respecto: 1.º *A su centro*; 2.º *a un diámetro*; 3.º *a un punto de la circunferencia que lo limita*; 4.º *a una tangente*; *y* 5.º *al eje normal al disco en O*.

1.º El momento de inercia respecto al centro es:

$$I_0 = \int r^2\,dm$$

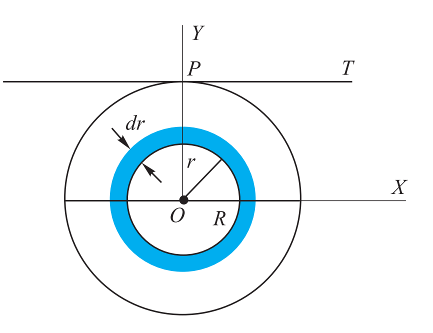


Figura 12.7.

Tomamos como elemento de masa la de una corona circular de radios r y $r + dr$ (Figura 12.7), que es:

$$dm = \sigma\, 2\pi r\, dr$$

Con ello, el momento de inercia respecto a O es:

$$I_0 = 2\pi\sigma \int_0^R r^3\,dr = \frac{\pi\sigma R^4}{2}$$

Puesto que la masa total del disco es $M = \pi R^2\sigma$, el momento de inercia respecto a O es:

$$I_0 = \frac{MR^2}{2}$$

2.º El momento de inercia respecto a O, por ser la figura plana, será igual a la suma de los momentos de inercia respecto a dos ejes perpendiculares entre sí, contenidos en el plano de la figura y pasando por O, es decir:

$$I_0 = I_D + I_D \quad ; \quad I_D = \frac{MR^2}{4}$$

3.º Por el correspondiente teorema de Steiner es:

$$I_P = I_0 + MR^2 = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3MR^2}{2}$$

4.º Asimismo, aplicando el teorema de Steiner resulta:

$$I_T = I_D + MR^2 = \frac{MR^2}{4} + MR^2 = \frac{5MR^2}{4}$$

5.º El momento de inercia respecto al eje E será la suma de los momentos de inercia respecto a dos planos, perpendiculares entre sí y que contienen al eje. Es decir:

$$I_E = 2I_D = \frac{MR^2}{2}$$

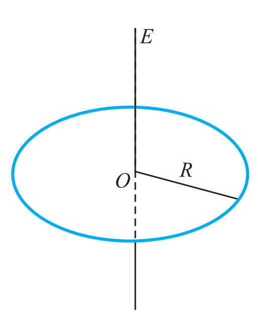


Figura 12.8.

Momento de inercia de una esfera homogénea, de radio R y densidad espacial ρ: 1.º *Respecto a su centro*; 2.º *respecto a un punto de su superficie*; 3.º *respecto a un plano diametral*; 4.º *respecto a un diámetro*; *y* 5.º *respecto a una tangente a ella*.

1.º Tomemos como elemento de masa la comprendida entre dos superficies esféricas concéntricas muy próximas, una de radio r y otra de radio $r + dr$ (Figura 12.9):

$$dm = 4\pi r^2\,dr\rho$$

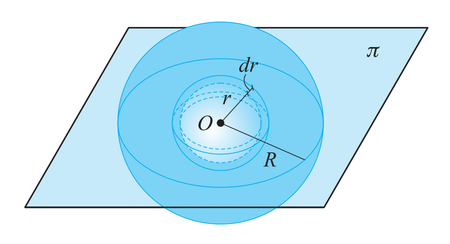


Figura 12.9.

El momento de inercia respecto al origen es:

$$I_0 = \int r^2\, dm = 4\pi\rho \int_0^R r^4\, dr = 4\pi\rho\, \frac{R^5}{5}$$

La masa de la esfera es:

$$M = \frac{4}{3}\, \pi R^3 \rho$$

y, en función de ella, el momento de inercia respecto a O se expresa:

$$I_0 = \frac{3}{5}\, MR^2$$

2.º El momento de inercia respecto a un punto de la superficie se obtiene por aplicación de Steiner:

$$I_A = I_0 + MR^2 = \frac{8}{5}\, MR^2$$

3.º El momento de inercia respecto a O es la suma de los momentos de inercia respecto a tres planos perpendiculares, dos a dos, pasando por O:

$$I_0 = 3I_\pi \quad ; \quad I_\pi = \frac{1}{5}\, MR^2$$

4.º El momento de inercia respecto a una recta es la suma de los momentos de inercia respecto a dos planos perpendiculares entre sí que pasan por la recta:

$$I_D = 2I_\pi \quad ; \quad I_D = \frac{2}{5}\, MR^2$$

5.º Aplicando el teorema de Steiner:

$$I_T = I_D + MR^2 \quad ; \quad I_T = \frac{7}{5}\, MR^2$$

Momento de inercia de un cilindro circular recto, de radio R, altura H, homogéneo y de densidad espacial ρ, respecto: 1.º *A su eje de simetría*; 2.º *a una de sus generatrices*; 3.º *a un plano diametral*; 4.º *a un plano tangente*; 5.º *a un plano normal que pasa por su centro de masas*; 6.º *a su centro de masas*; 7.º *a un eje normal que pasa por su centro de masas*; 8.º *a un eje normal contenido en una de sus bases y pasando por el centro de ella*; 9.º *al centro de una de sus bases*; *y* 10.º *a un punto del perímetro de una de sus bases.*

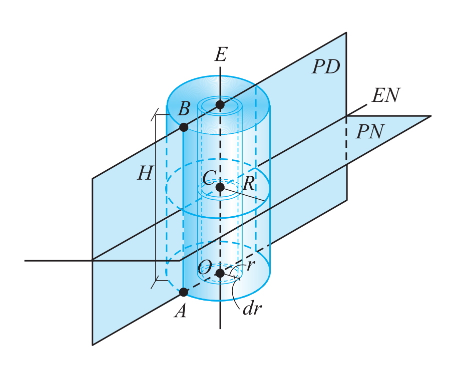


Figura 12.10.

1.º El elemento de masa será el comprendido entre dos superficies cilíndricas coaxiales, de altura H y radios r y $r + dr$ (Figura 12.10), respectivamente:

$$dm = 2\pi r\, dr\, H\rho$$

El momento de inercia respecto al eje es:

$$I_E = \int r^2\, dm = 2\pi\rho H \int_0^R r^3\, dr = \frac{1}{2}\, \pi\rho H R^4$$

La masa del cilindro es $M = \pi R^2 H \rho$ y, en función de ella:

$$I_E = \frac{1}{2} MR^2$$

2.º Aplicando el teorema de Steiner, el momento de inercia respecto a una generatriz es:

$$I_g = I_E + MR^2 = \frac{3}{2} MR^2$$

3.º Puesto que el momento de inercia respecto a un eje es la suma de los momentos de inercia respecto a dos planos perpendiculares que pasan por él, resulta:

$$I_E = 2I_{PD} \quad ; \quad I_{PD} = \frac{1}{4} MR^2$$

4.º Aplicando el teorema de Steiner:

$$I_{PT} = I_{PD} + MR^2 = \frac{5}{4} MR^2$$

5.º Tomaremos ahora como elemento de masa la comprendida entre dos secciones normales al eje del cilindro y muy próximas (Figura 12.11):

$$dm = \pi R^2 \, dz \, \rho$$

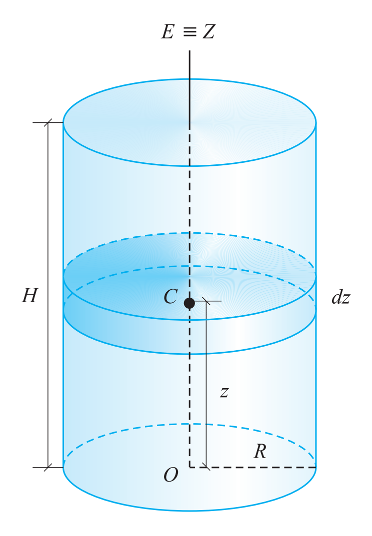


Figura 12.11.

El momento de inercia es:

$$I_{PN} = \int z^2 \, dm = \pi R^2 \rho \int_{-H/2}^{H/2} z^2 \, dz = 2\pi R^2 \rho \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{H/2} = \pi R^2 \rho \, \frac{H^3}{12}$$

$$I_{PN} = \frac{1}{2} MH^2$$

6.º El momento de inercia respecto a C será la suma de los momentos de inercia respecto a un plano y un eje perpendiculares entre sí pasando por C:

$$I_C = I_{PN} + I_E = \frac{MH^2}{12} + \frac{MR^2}{2} = \frac{M}{12} (H^2 + 6R^2)$$

7.º El momento de inercia respecto al eje normal que pasa por C es la suma de los momentos de inercia respecto a los planos normal y diametral:

$$I_{EN} = I_{PD} + I_{PN} = \frac{MR^2}{4} + \frac{MH^2}{12} = \frac{M}{12} (H^2 + 3R^2)$$

8.º Aplicando el teorema de Steiner:

$$I_{E'} = I_{EN} + M \frac{H^2}{4} = \frac{MH^2}{12} + \frac{MH^2}{4} = \frac{MH^2}{3}$$

9.º Aplicando el teorema de Steiner:

$$I_O = I_C + M \frac{H^2}{4} = \frac{M}{12} (H^2 + 6R^2) + \frac{MH^2}{4} = \frac{M}{6} (3R^2 + 2H^2)$$

10.º Aplicando el teorema de Steiner:

$$I_A = I_C + M\left(R^2 + \frac{H^2}{4}\right) = \frac{M}{12}(H^2 + 6R^2) + M\left(R^2 + \frac{H^2}{4}\right)$$

$$I_A = \frac{M}{6}(9R^2 + 2H^2)$$

12.6 Momento cinético en la rotación de un sólido alrededor de un eje fijo

Sea un eje fijo en el sistema de referencia *OXYZ*, definido mediante el vector unitario $\mathbf{u}_e$ de su dirección. El vector rotación $\boldsymbol{\omega}$ tendrá la dirección del eje de rotación y sentido tal que verifique:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

El momento cinético del sólido respecto a *O* es:

$$\mathbf{L}_0 = \int \mathbf{r} \times \mathbf{v}\, dm = \int \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\, dm$$

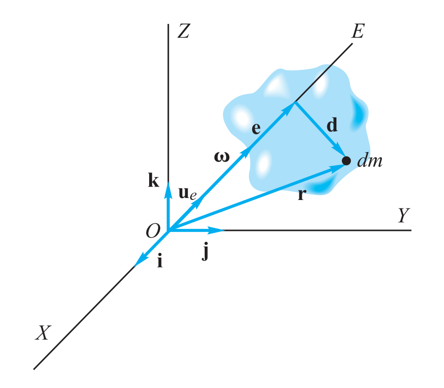


Figura 12.12.

Utilizando el vector $\mathbf{d}$, cuya dirección es perpendicular desde la partícula considerada al eje de rotación y sentido el indicado en la Figura 12.12, y teniendo en cuenta que es $\mathbf{r} = \mathbf{e} + \mathbf{d}$, el momento cinético se escribe:

$$\mathbf{L}_0 = \int \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d})\, dm$$

Teniendo en cuenta la Expresión [1.18], el doble producto vectorial se expresa:

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{d})\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{d} = d^2\boldsymbol{\omega} - e\omega\,\mathbf{d}$$

y la expresión del momento cinético se transforma en:

$$\mathbf{L}_0 = \boldsymbol{\omega} \int d^2\, dm - \omega \int e\,\mathbf{d}\, dm$$

El factor $I_E = \int d^2\, dm$, suma de los productos de cada masa elemental del sólido por el cuadrado de su distancia al eje de giro, es el momento de inercia del sólido respecto al citado eje:

$$\mathbf{L}_0 = I_E\,\boldsymbol{\omega} - \omega \int e\,\mathbf{d}\, dm \qquad [12.18]$$

En general, el momento cinético del cuerpo que gira no tiene la dirección del eje de rotación debido al factor $\omega \int e\,\mathbf{d}\, dm$. Si este factor se anula, se dice que el eje de rotación es principal de inercia, y entonces sí se verifica que el momento cinético tiene la dirección del eje de giro:

$$\mathbf{L}_0 = I_E\,\boldsymbol{\omega} \qquad [12.19]$$

Si tomamos como eje de giro el eje OZ, serán: $\boldsymbol{\omega} = \omega\,\mathbf{k}$, $e = z$ y $\mathbf{d} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$, con lo cual la Expresión [12.18] se escribe:

$$\mathbf{L}_0 = \omega\, I_z\,\mathbf{k} - \omega \int xz\, dm\,\mathbf{i} - \omega \int zy\, dm\,\mathbf{j} = I_z\,\boldsymbol{\omega} - \omega P_{xz}\,\mathbf{i} - \omega P_{yz}\,\mathbf{j} \qquad [12.20]$$

Los factores:

$$P_{xz} = \int xz\, dm \quad \text{y} \quad P_{yz} = \int yz\, dm$$

son los productos de inercia respecto a los planos $x = 0$, $z = 0$ e $y = 0$, $z = 0$, respectivamente.

Para que el momento cinético tenga la dirección del eje de rotación, es decir, para que pueda expresarse de la forma [12.19], deben ser nulos los productos de inercia $P_{xz} = 0$ y $P_{yz} = 0$, lo cual sucede en dos casos:

a) Cuando el eje de rotación es eje de simetría del sólido (Figura 12.13), pues entonces a cada elemento de masa $dm(x, y, z)$ le corresponde otro $dm(-x, -y, z)$, lo que hace nulos los citados productos de inercia. En este caso, el eje de rotación contiene el c.d.m., ya que éste está sobre el eje de simetría.

b) Cuando el plano normal al eje de rotación en O es plano de simetría del sólido (Figura 12.14), pues entonces a cada elemento de masa $dm(x, y, z)$, le corresponde otro $dm(x, y, -z)$, lo que hace que se anulen los citados productos de inercia. El plano de simetría normal al eje de rotación en O contendrá el c.d.m.

En el primer caso, por ser $v_C = 0$, es $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_C = 0$; resulta:

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{L}_C + \mathbf{OC} \times \mathbf{p} = \mathbf{L}_C = I_E\,\boldsymbol{\omega} \qquad [12.21]$$

En el segundo caso, el c.d.m. describe un movimiento circular alrededor del eje de rotación y el momento cinético del sólido respecto a este eje puede expresarse de la forma:

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{L}_C + \mathbf{OC} \times m\mathbf{v}_C = I_C\,\boldsymbol{\omega} + r_C\,\mathbf{u}_r \times m r_C\,\omega\,\mathbf{u}_\theta =$$
$$= I_C\,\boldsymbol{\omega} + m r_C^2\,\omega\,\mathbf{k} = (I_C + m r_C^2)\boldsymbol{\omega} = I_E\,\boldsymbol{\omega}$$

Figura 12.13.

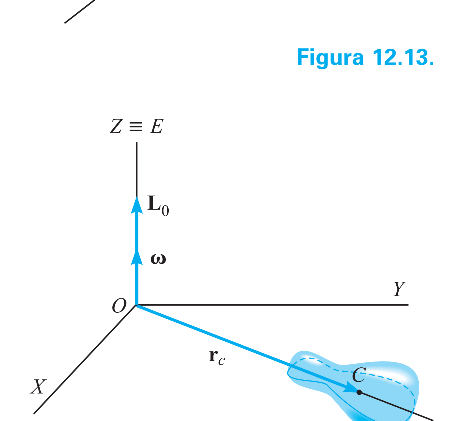


Figura 12.14.

EJEMPLO 12.2

Calculemos el momento cinético de la Tierra en su rotación alrededor de su eje polar, tomando para la masa de la Tierra $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg y, para su radio medio, $R = 6{,}38 \cdot 10^3$ km.

Solución:

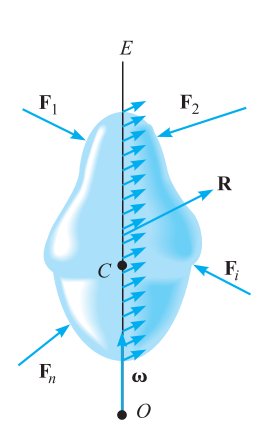
Debemos suponer que la Tierra tiene simetría respecto a su eje de rotación, es decir, que éste es principal de inercia. Su momento de inercia respecto a este eje es:

$$I = 2/5MR^2 = 2/5 \times 5{,}97 \times 10^{24} \times 6{,}38^2 \times 10^{12}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 = 9{,}72 \times 10^{37}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

El momento cinético es $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$. La velocidad angular de la Tierra se obtiene fácilmente, $\omega = 2\pi$ rad/día $= 2\pi/86\,400$ rad/s $= 7{,}27 \times 10^{-5}$ rad/s, con lo cual es:

$$L = 9{,}72 \times 10^{37} \times 7{,}27 \times 10^{-5}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} = 7{,}07 \times 10^{33}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

12.7 Dinámica de rotación de un sólido alrededor de un eje fijo principal de inercia



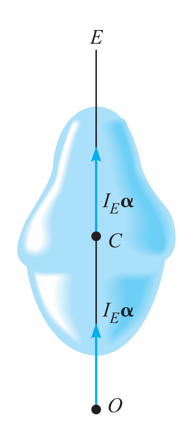


Figura 12.15.

Al ser el eje de rotación principal de inercia del sólido, el momento cinético se expresa de la forma [12.19] y, al derivar esta ecuación respecto al tiempo, el teorema del momento cinético se escribe:

$$I_E\,\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M}_O = \mathbf{M}_C \qquad [12.22]$$

que es la ecuación de la Dinámica de rotación de un sólido alrededor de un eje principal de inercia de él, y en la cual $\mathbf{M}_O$ *y* $\mathbf{M}_C$ son los momentos resultantes, respecto a O y al c.d.m., respectivamente, de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema, debiendo considerar las directamente aplicadas sobre el sólido, entre las cuales nunca debe olvidarse la debida a la gravedad y las reacciones que sobre él ejerza el eje de rotación (Figura 12.15).

La aceleración de cualquier punto del eje de giro es nula y, en particular, la del c.d.m. Por ello, la ecuación del movimiento de éste es:

$$m\mathbf{a}_C = \sum \mathbf{F}_i + m\mathbf{g} + \mathbf{R} = 0 \qquad [12.23]$$

En consecuencia, el sistema de fuerzas que actúa sobre el sólido es equivalente al momento $I_E\,\boldsymbol{\alpha}$.

La Ecuación [12.23] nos permite calcular la reacción que ejerce el eje de giro sobre el sólido:

$$\mathbf{R} = -m\mathbf{g} - \sum \mathbf{F}_i$$

Queremos hacer notar que el momento de las fuerzas exteriores respecto a cualquier punto del eje de rotación, $\mathbf{M}_O$, cuando éste es eje de simetría, es igual al momento respecto al c.d.m., ya que al ser nula la resultante de todas las fuerzas exteriores, el teorema del cambio de centro de momentos así lo establece:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_C + \mathbf{OC} \times \left(\sum \mathbf{F}_i + m\mathbf{g} + \mathbf{R}\right) = \mathbf{M}_C$$

Existe una analogía entre las ecuaciones [12.11] y [12.22]; lo que en una es la masa del sólido, la aceleración lineal de su c.d.m. y las fuerzas exteriores que actúan sobre él, en la otra es el momento de inercia del sólido respecto al eje de giro, la aceleración angular y el momento resultante de las fuerzas exteriores respecto a un punto del eje de rotación, respectivamente.

EJEMPLO 12.3

Las masas m_1 y m_2, $m_2 > m_1$ están unidas mediante un hilo flexible, inextensible y de masa despreciable, que pasa por una polea cilíndrica, homogénea, de masa m y radio R, la cual puede girar sin rozamiento alrededor de su eje de simetría cilíndrica, que es horizontal (Figura 12.16). Determinemos:

1.º La aceleración lineal del sistema.

2.º La aceleración angular de la polea.

3.º Las tensiones en el hilo.

4.º La reacción en el eje de la polea.

Solución:

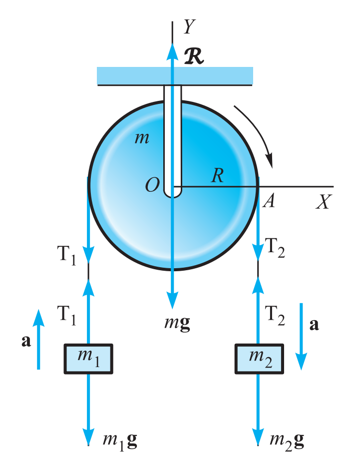


Figura 12.16.

1.º En el sistema de referencia indicado en la Figura 12.16, la ecuación del movimiento de la masa m_1 es:

$$m_1 a = T_1 - m_1 g \qquad [1]$$

y la correspondiente a la masa m_2:

$$m_2 a = m_2 g - T_2 \qquad [2]$$

La ecuación de la Dinámica de rotación para la polea es:

$$I_E \boldsymbol{\alpha} = -R(T_2 - T_1)\mathbf{k} \quad \text{o} \quad I_E \alpha = R(T_2 - T_1)$$

y teniendo en cuenta que $I_E = \frac{1}{2} mR^2$ resulta:

$$\frac{1}{2} mR\alpha = T_2 - T_1$$

Además, al no resbalar el hilo sobre la polea, la aceleración del punto A como perteneciente al hilo será igual a su aceleración tangencial como perteneciente a la polea, $a = R\alpha$ y, con ello, la última ecuación se escribe:

$$\frac{1}{2} ma = T_2 - T_1 \qquad [3]$$

Sumando [1], [2] y [3], resulta que: $(m_1 + m_2 + m/2)a = (m_2 - m_1)g$:

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \dfrac{m}{2}} = \frac{2(m_2 - m_1)g}{2(m_1 + m_2) + m}$$

2.º La aceleración angular de la polea es:

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{m_2 - m_1}{2(m_1 + m_2) + m} \cdot \frac{2g}{R}$$

3.º La tensión T_1 se obtiene llevando el valor de a a la Ecuación [1]:

$$T_1 = m_1(a + g) = \frac{m_1(2m_2 + m/2)g}{m_1 + m_2 + m/2} = \frac{m_1(4m_2 + m)g}{2(m_1 + m_2) + m}$$

Análogamente, llevando el valor de a a la [2] resulta:

$$T_2 = m_2(g - a) = \frac{m_2(2m_1 + m/2)g}{m_1 + m_2 + m/2} = \frac{m_2(4m_1 + m)g}{2(m_1 + m_2) + m}$$

4.º La reacción en el eje de la polea se obtiene de la ecuación del movimiento de su c.d.m.:

$$m\mathbf{a}_O = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + m\mathbf{g} + \mathcal{R} = 0$$

de donde:

$$\mathcal{R} = -\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2 - m\mathbf{g} = -(T_1 + T_2 + mg)\mathbf{j} = -\frac{m^2 + 3m(m_1 + m_2) + 8m_1 m_2}{2(m_1 + m_2) + m}\,\mathbf{j}$$

Conservación del momento cinético. Impulso angular

Si el momento resultante de las fuerzas exteriores respecto a un punto del eje de rotación es nulo, el momento cinético debe permanecer constante:

$$\mathbf{L} = I_E \boldsymbol{\omega} = \text{cte.} \qquad [12.24]$$

En esta situación, si I_E varía por causas internas al sistema, deberá variar $\boldsymbol{\omega}$, de forma que en todo instante se verifique la Ecuación [12.24]. Puede suceder que el momento de las fuerzas exteriores no sea nulo, pero sí lo sea su componente sobre el eje de rotación, en cuyo caso debe ser $L_E = I_E \boldsymbol{\omega} = \text{cte.}$

En general, si una parte del sistema varía su momento cinético, el resto del sistema tendrá que cambiar el suyo, de forma que el momento cinético del sistema permanezca constante:

$$I_1 \boldsymbol{\omega}_1 = I_2 \boldsymbol{\omega}_2 \qquad [12.25]$$

EJEMPLO 12.4

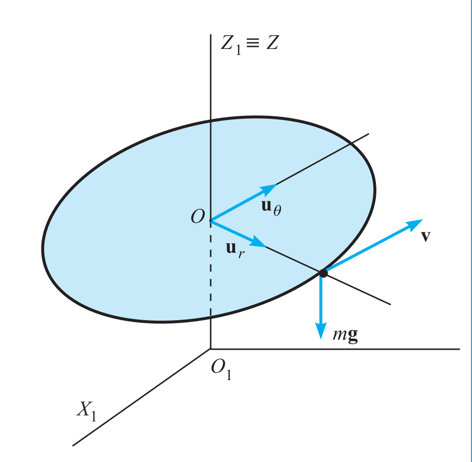


Figura 12.17.

Una plataforma circular de radio R puede girar sin rozamiento alrededor de un eje vertical, normal a ella por su centro, siendo I su momento de inercia respecto al eje de giro. Una persona de masa m se encuentra sobre la plataforma en el borde de ésta. Inicialmente todo está en reposo. Si la persona se pone a caminar sobre el borde de la plataforma con velocidad relativa $\mathbf{v} = v\mathbf{u}_\theta$, hallemos la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ con la que deberá moverse la plataforma (Figura 12.17).

Solución:

El momento de las fuerzas exteriores respecto a O es:

$$\mathbf{M}_O = R\,\mathbf{u}_r \times (-mg\,\mathbf{k}) = mgR\,\mathbf{u}_\theta$$

no tiene componente sobre el eje de rotación y la componente del momento cinético sobre este eje debe permanecer constante. Como inicialmente era nula, así deberá permanecer siempre. Por tanto, en todo instante, el momento cinético de la plataforma más el momento cinético de la persona debe ser nulo:

$$0 = \mathbf{L}_{Pl} + \mathbf{L}_{Pe}$$

$$\mathbf{L}_{pl} = I\boldsymbol{\omega} = -I\omega\,\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{L}_{Pe} = R\,\mathbf{u}_r \times m\,\mathbf{v}_1$$

fórmula en la que $\mathbf{v}_1$ es la velocidad de la persona respecto al sistema fijo:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_a = v\,\mathbf{u}_\theta + (-\omega\,\mathbf{k}) \times R\,\mathbf{u}_r = (v - R\omega)\mathbf{u}_\theta$$

con esto, el momento cinético de la persona se expresa:

$$\mathbf{L}_{Pe} = mR(v - R\omega)\mathbf{k}$$

y la conservación del momento cinético:

$$0 = -I\omega + mR(v - R\omega)$$

de donde:

$$\omega = \frac{mRv}{I + mR^2}$$

La Ecuación [12.21] puede escribirse de la forma:

$$I d\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}\, dt$$

e integrada entre dos instantes es:

$$I(\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1) = \int \mathbf{M}\, dt \qquad [12.26]$$

Impulso angular

que es la misma [11.9], *la variación del momento cinético es igual al impulso angular*, pero ahora expresado para la rotación de un sólido alrededor de un eje principal de inercia.

EJEMPLO 12.5

Un disco homogéneo de masa m y radio R puede girar sin rozamiento alrededor de un eje fijo, horizontal y normal a él por su centro. El disco lleva arrollado un hilo ideal y se tira del extremo de éste con una fuerza constante $\mathbf{F} = F\mathbf{j}$, como se indica en la Figura 12.18. Suponiendo que inicialmente el disco está en reposo, hallemos:

1.º El impulso angular comunicado.
2.º La velocidad de rotación del disco en función del tiempo.

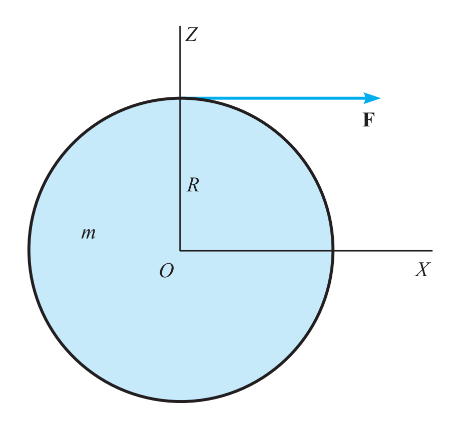


Figura 12.18.

Solución:

1.º El momento de la fuerza $\mathbf{F}$ respecto a O es

$$\mathbf{M}_0 = R\,\mathbf{k} \times F\,\mathbf{j} = -RF\,\mathbf{i}$$

y el impulso angular que comunica entre los instantes t_0 y t es:

$$\mathbf{G}_0 = \int_{t_0}^{t} \mathbf{M}_0\, dt = -\int_{t_0}^{t} RF\, dt\,\mathbf{i} = -RF(t - t_0)\mathbf{i}$$

2.º Con ello, la variación del momento cinético es:

$$I(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0) = -RF(t - t_0)\mathbf{i}$$

Puesto que en el instante $t_0 = 0$, es $\omega_0 = 0$, resulta:

$$I\boldsymbol{\omega} = -RFt\,\mathbf{i}$$

y

$$\omega = -\frac{RFt}{I}\,\mathbf{i} = -\frac{2Ft}{mR}\,\mathbf{i}$$

12.8 Movimiento de una figura plana en su plano o de un sólido con un eje principal de inercia paralelamente a sí mismo

Los casos enunciados son exactamente el mismo siempre que el c.d.m. del sólido se mueva dentro de un mismo plano. Pero, tanto si el c.d.m. del sólido sigue una trayectoria plana, como si no, el movimiento queda determinado mediante las ecuaciones del movimiento del c.d.m. y de la rotación alrededor del eje principal de inercia:

$$m\mathbf{a}_C = \mathbf{F} \qquad \text{e} \qquad I\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M}_C(\mathbf{F})$$

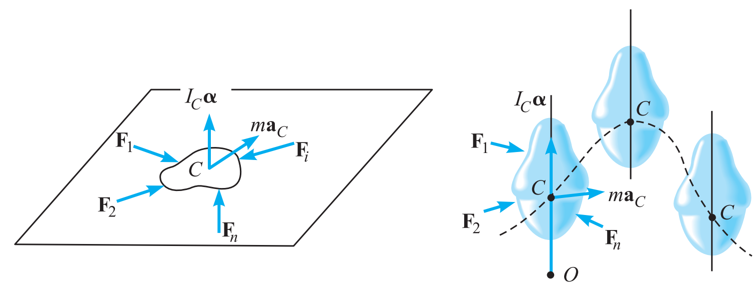


Figura 12.19.

En consecuencia, el sistema de fuerzas que actúan sobre el sólido o figura plana es equivalente al sistema formado por los vectores $m\mathbf{a}_C$ e $I\boldsymbol{\alpha}$, situados en el correspondiente c.d.m.

Debemos hacer notar, que siempre que la figura sea plana y se mueva en su plano, aunque C no sea centro de simetría, estaremos en el caso b), analizado en el Epígrafe 12.6, y el momento cinético respecto a un punto cualquiera O del plano, tendrá la dirección y sentido de $\boldsymbol{\omega}$.

Asimismo, el momento cinético y el momento de las fuerzas exteriores, en el caso del sólido con eje principal de inercia que se mueve paralelamente a sí mismo, pueden tomarse respecto a C, pero también respecto a cualquier punto O con la condición de que éste pertenezca al eje de giro, pues en este caso se verifica:

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{L}_C + \mathbf{OC} \times \mathbf{p}$$

que al derivar respecto al tiempo es:

$$\dot{\mathbf{L}}_O = \dot{\mathbf{L}}_C + \mathbf{OC} \times \mathbf{F}$$

y, para los momentos:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_C + \mathbf{OC} \times \mathbf{F}$$

de forma que al restar ambas expresiones resulta:

$$\dot{\mathbf{L}}_O - \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{L}}_C - \mathbf{M}_C = 0$$

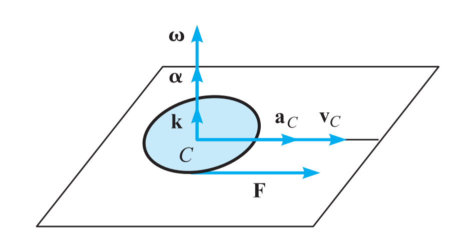


Figura 12.20.

EJEMPLO 12.6

Un disco homogéneo de radio R y masa m puede deslizarse sin rozamiento apoyado sobre una superficie plana horizontal. El disco lleva arrollado un hilo ideal, flexible, inextensible y de masa despreciable. Del extremo libre del hilo se tira con una fuerza constante $\mathbf{F}$ (Figura 12.20). Analicemos el movimiento del disco sabiendo que parte del reposo.

Solución:

La única fuerza que actúa sobre el disco es $\mathbf{F}$, ya que su peso y la reacción de la superficie sobre la que se mueve se anulan. La ecuación del movimiento del c.d.m. es:

$$m\mathbf{a}_C = \mathbf{F}$$

Por tanto, el centro del disco se mueve con la aceleración:

$$\mathbf{a}_C = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

La velocidad, puesto que parte del reposo, será:

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{F}\,\frac{t}{m}$$

y el espacio recorrido:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{F}t^2}{2m} + \mathbf{r}_0$$

si inicialmente C está en O, es $\mathbf{r}_0 = 0$.

El movimiento alrededor del c.d.m. está dado por:

$$I_C\,\boldsymbol{\alpha} = RF\,\mathbf{k}$$

siendo $\mathbf{k}$ un vector unitario normal al plano del movimiento. La aceleración angular es:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{RF}{I_C}\,\mathbf{k} = \frac{2F}{MR}\,\mathbf{k}$$

La velocidad angular, puesto que parte del reposo, es:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{2F}{MR}\,t\,\mathbf{k}$$

y el ángulo girado a partir de la posición inicial es:

$$\theta = \frac{F}{MR}\,t^2$$

EJEMPLO 12.7

Un cilindro sólido homogéneo, de radio R y masa m, rueda sin resbalar sobre un plano inclinado un ángulo ϕ respecto al plano horizontal, manteniendo su eje de simetría paralelo a sí mismo (Figura 12.21). Hallemos:

1.º La aceleración de su c.d.m.

2.º La aceleración angular de rotación alrededor de su eje.

3.º La fuerza de rozamiento que ofrece el plano.

4.º El valor mínimo del coeficiente de rozamiento para que el cilindro ruede sin resbalar.

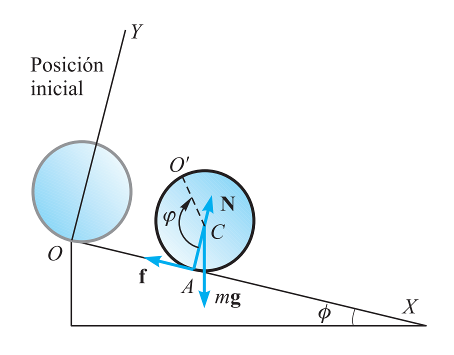


Figura 12.21.

Solución:

1.º En el instante inicial del movimiento, el cilindro parte del reposo de una posición como la indicada en la Figura 12.21. Al cabo de un cierto tiempo, el punto O, como perteneciente al cilindro, ocupará una posición O' y, puesto que ha rodado sin resbalar, debe ser:

$$x = OA = AO' = R\varphi \qquad [1]$$

Las fuerzas que actúan sobre el cilindro son las indicadas en la Figura 12.21: el peso, $m\mathbf{g}$; la reacción normal del plano, $\mathbf{N}$; y la fuerza de rozamiento, $\mathbf{f}$. El teorema del movimiento del c.d.m. permite escribir:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{f}$$

En el sistema de referencia elegido son:

$$\mathbf{N} = N\mathbf{j}, \quad \mathbf{f} = -f\mathbf{i} \quad \text{y} \quad \mathbf{g} = g(\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{i} - \cos\phi\,\mathbf{j})$$

con lo cual, la ecuación anterior se escribe:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = (mg\operatorname{sen}\phi - f)\mathbf{i} + (N - mg\cos\phi)\mathbf{j}$$

de donde:

$$m\ddot{x} = mg\operatorname{sen}\phi - f \quad \text{y} \quad m\ddot{y} = N - mg\cos\phi \qquad [2]$$

Puesto que el cilindro rueda sobre el plano, debe ser $y = 0$ y, por tanto:

$$N = mg\cos\phi$$

El momento cinético alrededor del eje de giro que pasa por C es:

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} = -I\omega\,\mathbf{k}$$

El momento resultante de las fuerzas exteriores respecto a C es:

$$\mathbf{M} = \mathbf{CA} \times \mathbf{f} = -R\,\mathbf{j} \times (-f\mathbf{i}) = -Rf\mathbf{k}$$

y el teorema del momento cinético se expresa:

$$I\alpha = Rf$$

que, teniendo en cuenta el valor del momento de inercia del cilindro respecto a su eje, es:

$$\frac{1}{2}mR\alpha = f$$

Derivando la Ecuación [1] dos veces se obtiene $x = R\alpha$, con lo cual, la última ecuación se reduce a:

$$\frac{1}{2}mx = f \qquad [3]$$

Sumando la primera Ecuación [2] y la [3] obtenemos:

$$\frac{3}{2}mx = g\operatorname{sen}\phi$$

y la aceleración del c.d.m. expresada en el sistema de referencia elegido es:

$$\mathbf{a}_C = \frac{2}{3}g\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{i}$$

2.º La aceleración angular de rotación del cilindro alrededor de su eje es:

$$\alpha = \frac{a_C}{R} = \frac{2g}{3R}\operatorname{sen}\phi$$

3.º La fuerza de rozamiento que actúa durante el movimiento es:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2}\, m\mathbf{a}_C = \frac{1}{3}\, mg \operatorname{sen} \phi(-\mathbf{i})$$

4.º El módulo de esta fuerza es proporcional a la componente normal de las acciones que se ejercen los cuerpos en contacto, es decir:

$$f = \mu N = \mu mg \cos \phi$$

con lo cual, al igualar con la anterior expresión, el coeficiente de rozamiento mínimo para que el cilindro ruede sin resbalar debe ser:

$$\mu \geqslant \frac{1}{3} \tan \phi$$

12.9 Dinámica de rotación de un sólido alrededor de un eje fijo paralelo a uno principal de inercia

Ahora, el eje de giro no pasa por el c.d.m. y la aceleración de éste respecto al sistema fijo ya no es nula, pues tiene un movimiento de rotación alrededor del eje de giro. Tomando como origen O, la proyección de C sobre el eje de giro, y como sistema de referencia el indicado en la Figura 12.22, la aceleración de C se expresa:

$$\mathbf{a}_C = r_C(\alpha\,\mathbf{j} - \omega^2\,\mathbf{i})$$

y la ecuación del movimiento del c.d.m. es:

$$m\mathbf{a}_C = \sum \mathbf{F} + \mathbf{R}$$

siendo **R** la reacción del eje fijo sobre el sólido:

$$mr_C(\alpha\,\mathbf{j} - \omega^2\,\mathbf{i}) = \sum \mathbf{F} + \mathbf{R} \qquad [12.27]$$

El momento respecto a O de las fuerzas exteriores es:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_C + \mathbf{OC} \times \mathbf{R} = I_{EC}\boldsymbol{\alpha} + r_C\,\mathbf{i} \times mr_C(-\omega^2\,\mathbf{i} + \alpha\,\mathbf{j}) =$$
$$= I_{EC}\,\alpha\,\mathbf{k} + mr_C^2\,\mathbf{k} = (I_{EC} + mr_C^2)\boldsymbol{\alpha} = I_E\,\boldsymbol{\alpha}$$

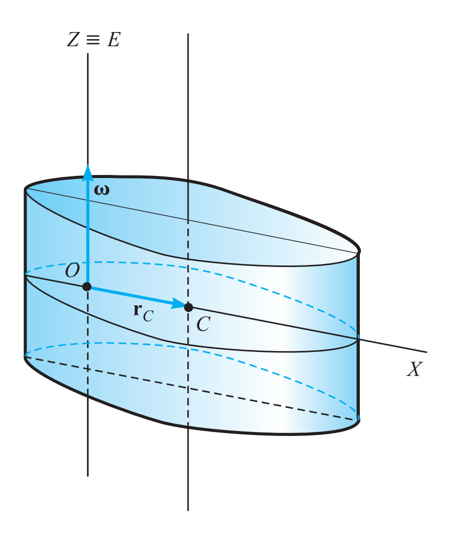
lo que únicamente se verifica si O es la proyección de C sobre el eje de rotación, es decir, si es $\mathbf{r}_C = r_C\,\mathbf{i}$, única forma de que $\mathbf{M}_0$ tenga la dirección del eje de rotación y se verifique:

$$I_E\,\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M}_0 \qquad [12.28]$$

De esta ecuación se obtiene α, una primera integración nos da ω y una nueva integración nos da la posición θ del sólido respecto a un sistema de referencia fijo.

Llevando a [12.27] los valores de α y ω, se calcula la reacción **R** del eje de rotación.

Debemos insistir en que O debe ser la proyección de C sobre el eje de rotación y éste debe ser paralelo a uno principal de inercia del sólido, pues de lo contrario no se verifica la [12.28].



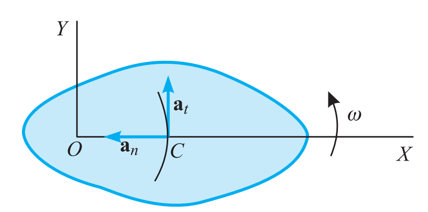


Figura 12.22.

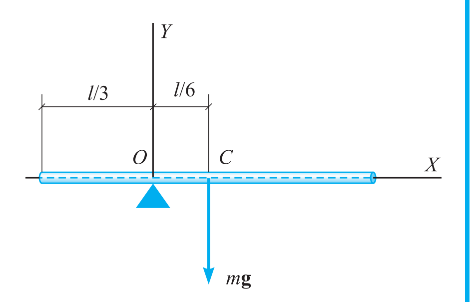


Figura 12.23.

EJEMPLO 12.8

Una varilla homogénea de longitud l y masa m, puede girar sin rozamiento alrededor de un eje fijo horizontal, normal a ella por el punto fijo O, que dista $l/3$ de uno de sus extremos (Figura 12.23). Inicialmente, se la mantiene en reposo en posición horizontal y se la suelta desde esa posición. Hallemos la aceleración angular un instante después de comenzar a girar.

Solución:

El eje de rotación es paralelo a uno principal de inercia, que es el paralelo por C al eje de giro. El momento de inercia de la varilla respecto al eje de giro se obtiene por aplicación de Steiner:

$$I_O = I_C + ml^2/36 = ml^2/12 + ml^2/36 = ml^2/9$$

El momento de las fuerza exteriores respecto a O es:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OC} \times m\mathbf{g} = \frac{l}{6}\,\mathbf{i} \times (-mg\mathbf{j}) = -\frac{lmg}{6}\,\mathbf{k}$$

La ecuación de la Dinámica de rotación es:

$$\frac{ml^2}{9}\,\boldsymbol{\alpha} = -\frac{lmg}{6}\,\mathbf{k}$$

y, por tanto, la aceleración angular inicial es:

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{3g}{2l}\,\mathbf{k}$$

12.10 Energía cinética de rotación. Teorema de la energía cinética

Teniendo en cuenta que en la rotación se verifica $v = \omega d$, siendo d el radio de la circunferencia descrita por el punto alrededor del eje de giro, la expresión general de la energía cinética [12.8] se escribe:

$$T = \frac{1}{2}\,\omega^2 \int d^2\,dm = \frac{1}{2}\,I_E\omega^2 \qquad [12.29]$$

La energía cinética puede expresarse en función del momento cinético, ya que en la rotación alrededor del eje es $L = I\omega$ y la energía cinética se expresa:

$$T = \frac{1}{2}\,I\omega^2 = \frac{1}{2}\,I(L/I)^2 = \frac{1}{2}\,\frac{L^2}{I}$$

El teorema de la energía cinética para los sistemas rígidos, que ha sido expresado mediante la Ecuación [12.7], teniendo en cuenta [12.29] se escribe:

$$\frac{1}{2}\,I_E\,\omega_2^2 - \frac{1}{2}\,I_E\,\omega_1^2 = \sum \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathbf{M} \cdot d\boldsymbol{\theta} \qquad [12.30]$$

es decir, *la variación de energía cinética de rotación es igual al trabajo producido por las fuerzas exteriores en el movimiento de rotación*. La última igualdad se ha establecido teniendo en cuenta la Expresión [8.20].

Si las fuerzas exteriores derivan de un potencial U, la [12.30] se puede escribir de la forma:

$$\frac{1}{2} I_E \omega_2 + U_2 = \frac{1}{2} I_E \omega_1^2 + U_1 = \frac{1}{2} I_E \omega^2 + U = \text{cte.} \qquad [12.31]$$

que es la expresión del teorema de la conservación de la energía mecánica en el movimiento de rotación y dice: *en el movimiento de rotación la suma de la energía cinética de rotación y la potencial es constante.*

EJEMPLO 12.9

Resolvamos el Ejemplo 12.3 aplicando la conservación de la energía mecánica.

Solución:

Inicialmente, la energía cinética del sistema es nula. En un estado cualquiera del movimiento la energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} I_E \omega^2$$

la cual, teniendo en cuenta que es $\omega = v/R$ y el valor de I_E, se escribe:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + m/2) v^2$$

La energía potencial inicial, respecto de un plano arbitrario de referencia (Figura 12.24), es:

$$U_i = m_1 g h_1 + m_2 g h_2 + mgH$$

La energía potencial en un instante del movimiento es:

$$U = m_1 g(h_1 + x) + m_2 g(h_2 - x) + mgH$$

La conservación de la energía permite escribir:

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2 + m/2) v^2 = (m_2 - m_1) g x$$

lo que nos da la velocidad en función de la posición:

$$v = \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1) g x}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}}$$

Derivando la anterior respecto al tiempo:

$$a = \frac{1}{2v} \frac{2(m_2 - m_1) g}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} v$$

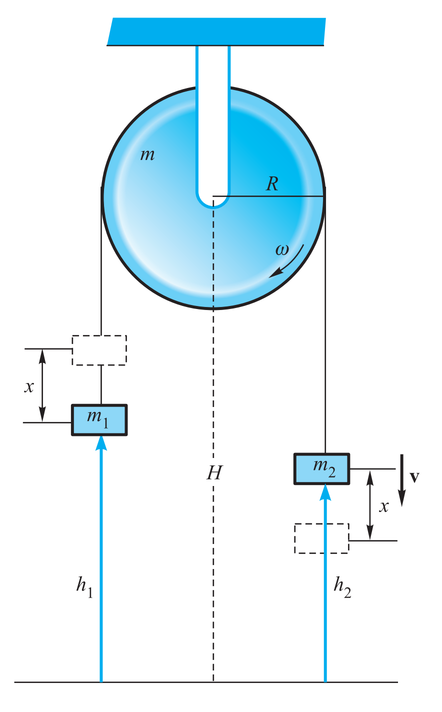


Figura 12.24.

de donde:

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + m/2} = \frac{2(m_2 - m_1)g}{2(m_1 + m_2) + m}$$

Para el cálculo de las tensiones inevitablemente hay que acudir a las Ecuaciones [1] y [2] de la misma forma ya realizada en el Ejemplo 12.3.

EJEMPLO 12.10

Resolvamos, mediante aplicación de la conservación de la energía, el Ejemplo 12.7 del cilindro que rueda por un plano inclinado.

Y
Y′
C
φ
O
X′
H
h
φ
X

Figura 12.25.

Solución:

En la posición inicial, puesto que el cilindro parte del reposo, su energía cinética es nula. Su energía potencial será:

$$U_i = MgH$$

En una posición genérica de su movimiento, su energía cinética, de acuerdo con la segunda [12.10], es:

$$T = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

La energía potencial en esta posición es $U = Mgh$. El teorema de la conservación de la energía mecánica se escribe:

$$\frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 = Mg(H - h) = Mgx \operatorname{sen} \phi$$

y puesto que son:

$$\omega = \frac{\dot{x}}{R} \quad \text{e} \quad I = \frac{1}{2} MR^2$$

resulta:

$$\frac{3}{4} \dot{x}^2 = gx \operatorname{sen} \phi$$

que al derivar respecto al tiempo se obtiene:

$$\ddot{x} = \frac{2}{3} g \operatorname{sen} \phi$$

La fuerza de rozamiento no produce trabajo, ya que la velocidad del punto de contacto con el plano es nula. Para determinar la reacción del plano es necesario establecer la ecuación del movimiento del centro del cilindro, como ya se hizo en el Ejemplo 12.7.

EJEMPLO 12.11

Una polea cilíndrica de masa m y radio R, lleva arrollado un hilo, cuyo extremo libre se ha sujetado a un punto fijo de un techo (Figura 12.26). Se suelta la polea, con velocidad nula, desde una determinada posición. Calculemos la velocidad que llevara cuando haya descendido la distancia h.

Solución:

Tomemos como origen de potenciales la posición inicial de la polea. En el instante inicial son:

$$T_i = 0 \quad \text{y} \quad U_i = 0$$

La conservación de la energía mecánica se expresa:

$$T_i + U_i = T_f + U_f$$

La energía potencial final es $U_f = -mgh$ y la energía cinética final:

$$T_f = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Teniendo en cuenta el momento de inercia de la polea respecto a su eje de giro, $I = \frac{1}{2}mR^2$, y que la polea rueda sobre el hilo, es decir, que es $v = R\omega$, la energía cinética final se expresa:

$$T_f = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mv^2 = \frac{3}{4}mv^2$$

Con ello, la conservación de la energía mecánica nos da:

$$0 = -mgh + \frac{3}{4}mv^2 \quad \text{y} \quad v = \sqrt{\frac{4gh}{3}} = 2\sqrt{\frac{gh}{3}}$$

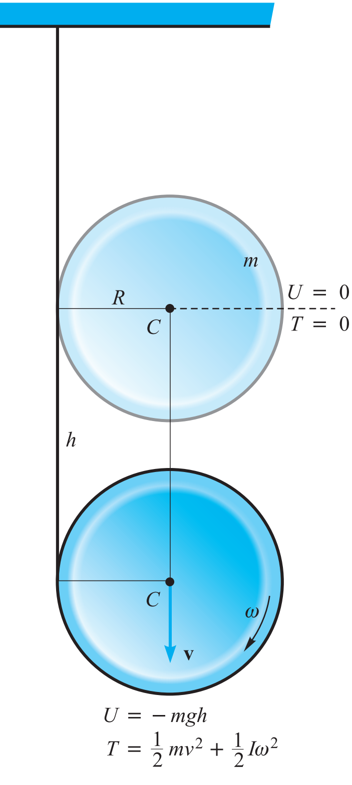


Figura 12.26.

12.11 Movimiento giroscópico

Los movimientos que describe un sólido que gira alrededor de uno de sus ejes principales de inercia, cuando este eje puede, a su vez, girar alrededor de un punto fijo de él, se denominan movimientos giroscópicos. El estudio general de estos movimientos es bastante complicado y aquí estudiaremos, únicamente, un caso sencillo.

Consideremos un disco que gira alrededor de su eje de simetría, normal a él por su centro, con velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$ (Figura 12.27). Este eje de simetría, que supondremos horizontal, lo tomaremos como eje OZ y tiene la libertad de poder girar alrededor de O dentro del plano horizontal.

Las fuerzas exteriores al sistema son únicamente el peso $m\mathbf{g}$ y la reacción en O, $\mathbf{R}$. El momento de estas fuerzas respecto a O es:

$$\mathbf{M}_0 = amg\,\mathbf{i}$$

Si el único movimiento del sistema fuera el definido por $\boldsymbol{\omega}$, el momento cinético sería constante, su derivada nula y no se cumpliría el teorema del momento cinético, ya que el momento de las fuerzas exteriores es distinto de cero. Por tanto, el sistema deberá girar alrededor de OY. Llamemos $\boldsymbol{\Omega}$ al vector que define esta rotación. El momento cinético total del sistema es:

$$\mathbf{L}_O = I_z\boldsymbol{\omega} + I_y\boldsymbol{\Omega}$$

y, por tanto, está contenido en el plano YOZ.

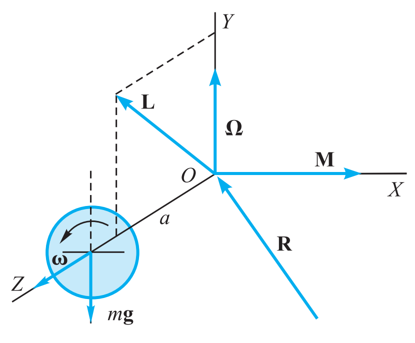


Figura 12.27.

Para verificar el teorema del momento cinético, $d\mathbf{L}_O/dt$ debe tener la dirección del eje OX, es decir, debe ser normal a $\mathbf{L}_O$, de lo que se deduce que el momento cinético es de módulo constante y, por tanto, la rotación definida por $\boldsymbol{\Omega}$ es uniforme. El extremo de $\mathbf{L}_0$ describirá una circunferencia alrededor del eje OY y su velocidad será:

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}_O = I_z \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega} = I_z \omega \Omega \mathbf{i}$$

El teorema del momento cinético se escribe:

$$I_z \omega \Omega = amg$$

con lo que el vector rotación $\boldsymbol{\Omega}$ es:

Precesión

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{amg}{\omega I_z} \mathbf{j}$$

Al movimiento definido por $\boldsymbol{\Omega}$ se le denomina *movimiento de precesión* y, al vector $\boldsymbol{\Omega}$, *precesión*. Resulta, pues, que *la precesión hace girar el eje principal de inercia de giro del sólido hacia el momento de las fuerzas exteriores*. Así, si sobre el sistema estudiado actuase una fuerza exterior en dirección y sentido del eje OX, su momento respecto a O tendría la dirección OY y la precesión trataría de elevar el eje de giro. Si el sentido de la fuerza exterior se invirtiese, su momento respecto a O invertiría el sentido y la precesión haría que el eje de giro descendiera.

EJEMPLO 12.12

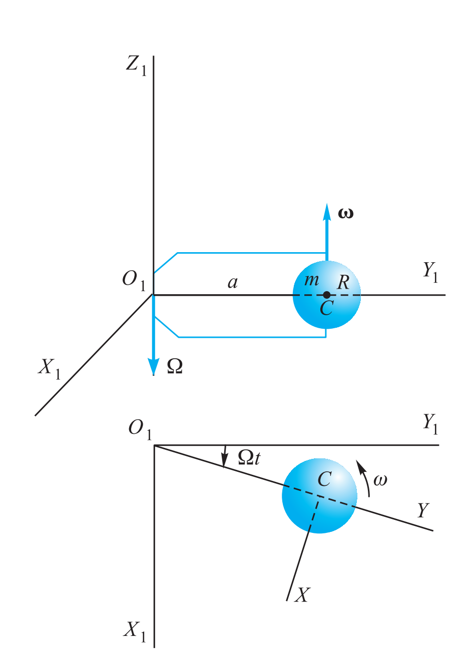


Figura 12.28.

Un motor, que supondremos esférico, homogéneo, de masa m y radio R, está dispuesto sobre un bastidor rígido de masa despreciable. El eje del motor está en posición vertical y, además de poder girar alrededor de él, todo el conjunto puede girar alrededor de otro eje vertical paralelo, a la distancia a, que tomaremos como eje OZ (Figura 12.28). Inicialmente, todo está en reposo y el plano definido por los dos ejes paralelos lo tomaremos como plano fijo Y_1OZ_1. En un cierto instante, se pone en marcha el motor y gira alrededor de su eje con velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$. Determinemos:

1.º La velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ con la que girará todo el conjunto alrededor del eje O_1Z_1.

2.º La energía suministrada por el motor para poner en movimiento todo el conjunto.

Solución:

1.º El momento de las fuerzas exteriores respecto a O_1 es:

$$\mathbf{M}_{O_1} = a\,\mathbf{j} \times (-mg\,\mathbf{k}) = -amg\,\mathbf{i}$$

que no tiene componente sobre el eje O_1Z_1.

Por tanto, la componente sobre ese eje del momento cinético debe ser constante y, puesto que inicialmente era nula, así deberá seguir durante el movimiento.

Calculemos el momento cinético respecto a O_1 por aplicación de la primera [12.10]:

$$\mathbf{L}_{O_1} = \mathbf{L}_C + \mathbf{O_1C} \times \mathbf{p} = I_E\,\boldsymbol{\omega} + a\,\mathbf{j} \times m\,a\,\Omega\,\mathbf{i} = I_E\,\omega\,\mathbf{k} - m\,a^2\,\Omega\,\mathbf{k} =$$

$$= \left(\frac{2}{5}\,mR^2\omega - ma^2\Omega\right)\mathbf{k} = 0$$

Por tanto, debe ser:

$$\boldsymbol{\Omega} = -\frac{2R^2}{5a^2}\,\boldsymbol{\omega}$$

2.º La energía potencial permanece constante, por tanto, toda la energía suministrada se convierte en cinética y su valor es:

$$E = T = T' + \frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}I_E\,\omega^2 + \frac{1}{2}ma^2\Omega^2 =$$

$$= \frac{1}{5}mR^2\omega^2 + \frac{2mR^4}{25a^2}\,\omega^2 = \frac{mR^2\omega^2}{25}\left(5 + \frac{2R^2}{5a^2}\right)$$

La Tierra constituye un enorme giróscopo, siendo su eje imaginario de giro el que pasa por los polos de ella. Las fuerzas exteriores son las que ejercen sobre ella la Luna y el Sol. Cálculos minuciosos han obtenido que el momento de estas fuerzas respecto al centro de la Tierra es normal al eje de la misma y, por tanto, el eje de rotación debe precesar bajo la acción de este momento.

Eclíptica

El plano ecuatorial de la Tierra y el plano de su órbita alrededor del Sol, o eclíptica, forman un ángulo de 23º 27', y la línea de intersección de ambos se denomina *línea de equinocios* (Figura 12.29). Esta línea precesará al igual que lo haga el eje de la Tierra; este fenómeno parece ser que fue descubierto por Hiparco en el siglo II antes de Cristo.

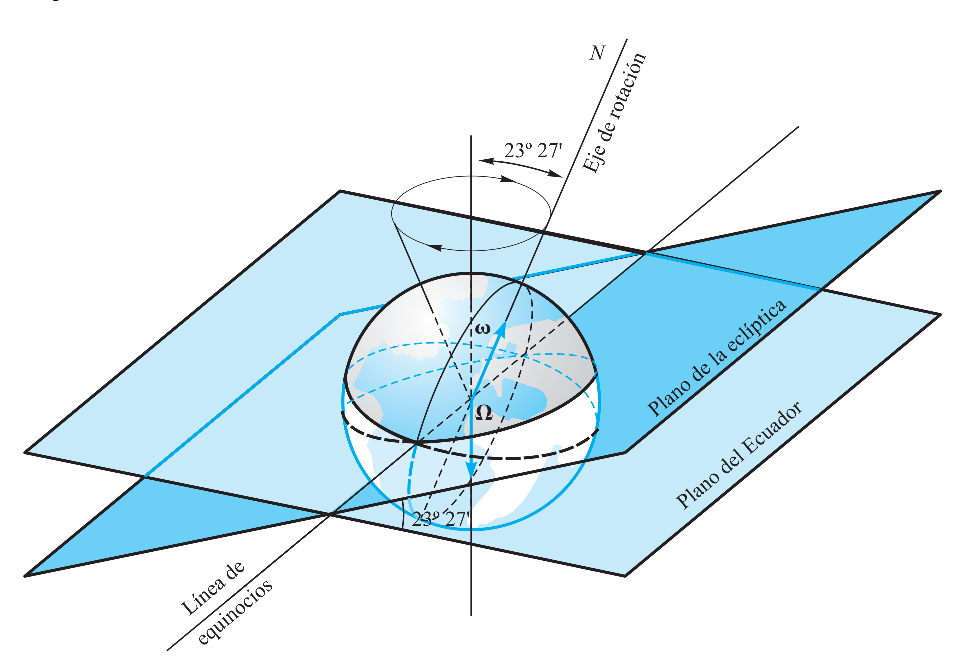


Figura 12.29.

El eje de la Tierra precesa alrededor de la normal a la eclíptica en la dirección este-oeste, con una velocidad angular $\Omega = 7{,}19 \cdot 10^{-11}$ rad/s o 50'',25 por año, o bien con un periodo aproximado de 27 725 años.

Nutación

Un estudio detallado del movimiento indica que el ángulo φ no es constante, sino que oscila entre dos valores extremos. A este movimiento de oscilación se le denomina *nutación*. La amplitud de este movimiento es de unos 9'',2 y su periodo de oscilación es de unos 19 años.



SISTEMAS DE MASA VARIABLE

Consideremos un sistema material que en un instante t tiene masa m y su c.d.m. lleva velocidad **v**, respecto a un sistema de referencia inercial. Su cantidad de movimiento en este instante es $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Si la masa del sistema varía con el tiempo de forma continua, al cabo de un cierto tiempo Δt el sistema tendrá la masa m $+ \Delta m$ y su velocidad será $\mathbf{v}(t + \Delta t) = \mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$. La cantidad de movimiento del sistema en el instante $t + \Delta t$ será:

$$\mathbf{p}(t + \Delta t) = \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p} = (m + \Delta m)(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) - \Delta m\,\mathbf{v}_1$$

en la que $\mathbf{v}_1$ es la velocidad respecto al sistema de referencia inercial de la masa que sale o entra en el sistema, verificando: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_r + \mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$, siendo $\mathbf{v}_r$ la velocidad relativa, respecto al sistema material, con la que sale o entra la masa y con lo cual es

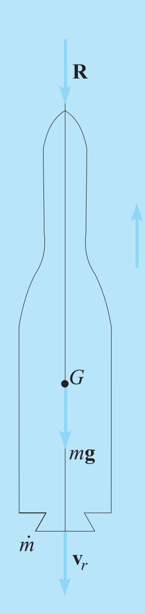
$$\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p} = (m + \Delta m)(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) - \Delta m(\mathbf{v}_r + \mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) = \\ = m\mathbf{v} + m\Delta\mathbf{v} - \Delta m\mathbf{v}_r$$

Teniendo en cuenta el valor de **p** es:

$$\Delta\mathbf{p} = m\Delta\mathbf{v} - \Delta m\mathbf{v}_r$$

la cual, al dividirla por Δt y tomar límites para Δt tendiendo a cero da:

$$\dot{\mathbf{p}} = m\dot{\mathbf{v}} - \dot{m}\mathbf{v}_r$$



y el teorema de la cantidad de movimiento se expresa ahora

$$m\dot{\mathbf{v}} - \dot{m}\mathbf{v}_r = \mathbf{F}$$

Por tanto, la ecuación de la dinámica del c.d.m. se expresa

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \dot{m}\mathbf{v}_r$$

denominándose empuje a la fuerza $\mathbf{E} = \dot{m}\mathbf{v}_r$.

Aplicación. Consideremos un cohete de masa inicial m_0, moviéndose verticalmente dentro de la atmósfera. Las fuerzas exteriores que actúan sobre él son: la fuerza de la gravedad, $m\mathbf{g}$, y la fuerza de rozamiento del aire, **R**. La ecuación del movimiento de su c.d.m es:

$$m\mathbf{a} = \dot{m}\mathbf{v}_r + m\mathbf{g} + \mathbf{R}$$

despreciando **R** frente a los valores de $m\mathbf{g}$ y $\dot{m}\mathbf{v}_r$, y puesto que todos los vectores tienen la misma dirección, la anterior se expresa

$$dv = \left(\frac{\dot{m}}{m}\,v_r - g\right)dt$$

La masa del cohete varía con el tiempo según la ley $m = m_0 - \dot{m}t$, siendo $\dot{m}$ constante, con ello se expresa

$$dv = \left(\frac{\dot{m}v_r}{m_0 - \dot{m}t} - g\right)dt$$

cuya integración da $v = -v_r \ln(m_0 - \dot{m}t) - gt +$ cte. Puesto que en el instante $t = 0$ es $v = 0$, la constante de integración es $0 = -v_r \ln m_0 +$ cte, o cte $= v_r \ln m_0$, con lo cual resulta

$$v = v_r \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \dot{m}t}\right) - gt$$

El tiempo que tarda en agotarse el combustible es $m_{cb} = \dot{m}t_1$, $t_1 = m_{cb}/\dot{m}$ a partir de cuyo momento la masa del cohete es la correspondiente a su estructura, que ya permanecerá constante $m = m_{ch}$.

La velocidad máxima se conseguirá en el instante t_1 y su valor es

$$v_{máx} = v_r \ln\left(\frac{m_0}{m_{ch}}\right) - g\,\frac{m_0}{\dot{m}}$$

Para aumentar esta velocidad hay que aumentar la relación $m_0/m_{ch} = 1 + m_{cb}/m_{ch}$.

Parece muy difícil en la actualidad superar la relación $m_{cb}/m_{ch} = 9$, es decir $m_{cb} = 0{,}9\ m_0$ y $m_{ch} = 0{,}1\ m_0$. También se consigue un aumento en la velocidad máxima aumentando la velocidad de combustión, $\dot{m}$, y aumentando la velocidad relativa de salida de gases, v_r. Estos valores, en la actualidad son del orden de $\dot{m} = 10^4$ kg/s y $v_r = 4 \cdot 10^3$ m/s, con los cuales la velocidad máxima es

$$v_{máx} = 4 \cdot 10^3 \ln 10 - 9{,}8 \times 0{,}9m_0\ 10^{-4} = \\ = 9{,}2 \times 10^3 - 8{,}82\ m_0\ 10^{-4}\ \text{m/s}$$

velocidad siempre inferior a la de escape $v_e \cong 11 \times 10^3$ m/s, lo que indica la imposibilidad, con la tecnología actual, de salir del campo de la gravedad terrestre con cohetes de una sola etapa.

Movimiento oscilatorio o vibratorio

CAPÍTULO 13

13.1 Introducción

Cuando una partícula o cualquier sistema se mueve periódicamente con relación a su posición de equilibrio estable, se dice que oscila o vibra alrededor de esa posición. Este tipo de movimiento es de gran importancia no solamente porque se presenta con gran frecuencia en la naturaleza, los propios seres vivos son un mosaico de vibraciones: el corazón, los pulmones, el diafragma o la laringe, los tímpanos, también los átomos y moléculas que componen la estructura de los cuerpos materiales están en continua vibración; también es importante porque es base de muchas teorías físicas y de importantes aplicaciones técnicas.

Todo movimiento oscilatorio se caracteriza por su periodicidad. El estado del sistema que oscila se repite a intervalos iguales de tiempo, denominándose, a la duración de este intervalo de tiempo, *periodo*.

El movimiento vibratorio más sencillo y al mismo tiempo más importante es el movimiento armónico simple (m.a.s.), en el cual la variable que fija la posición de la partícula o del sistema, respecto a su posición de equilibrio estable, es función armónica del tiempo. La importancia de este tipo de oscilación, además de lo indicado, reside en que cualquier oscilación periódica puede ser descompuesta en una suma algebraica de movimientos oscilatorios simples.

Comenzaremos estudiando el caso ideal de movimiento armónico simple con conservación de la energía, analizando sus parámetros característicos, sus aspectos cinemáticos y dinámicos, y cuáles son los efectos de la superposición de dos m.a.s. de la misma dirección con iguales o distintas frecuencias, así como de la superposición cuando sus direcciones son perpendiculares. A continuación, estudiaremos el movimiento oscilatorio amortiguado, es decir, con disipación de energía, lo cual, puede ajustarse más a muchos fenómenos reales y, finalmente, estudiaremos el movimiento oscilatorio amortiguado y forzado, de gran aplicación, en el cual aparece el importante fenómeno físico de la resonancia.

13.2 Movimiento armónico simple

Supongamos una partícula de masa m, que puede moverse libremente en una dirección que tomaremos como eje de las equis y elijamos el origen de coordenadas en

la posición de equilibrio estable. Por definición, diremos que esta partícula se mueve con movimiento armónico simple cuando su posición esté dada por una expresión del tipo:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \quad [13.1]$$

La constante A se denomina *amplitud* de la oscilación y es el mayor valor posible de la variable x que, de forma genérica, se suele denominar *elongación*. La cantidad $\omega t + \varphi$ se denomina *fase* del movimiento y a su valor φ, correspondiente al instante inicial ($t = 0$), se le denomina *fase inicial*.

Como ya hemos indicado, se denomina *periodo* del movimiento al tiempo mínimo necesario para que la partícula o el sistema realicen un ciclo completo y vuelvan a ocupar la misma posición o estado; lo designaremos mediante la letra P, su magnitud es un tiempo y su unidad el segundo, y deberá verificar:

$$A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = A \operatorname{sen}[\omega(t + P) + \varphi]$$

lo que exige la igualdad de los senos; por tanto, para que se haya realizado un ciclo completo, los arcos deben diferir en 2π:

$$\omega t + \varphi + 2\pi = \omega(t + P) + \varphi$$

de donde resulta:

$$P = \frac{2\pi}{\omega} \quad [13.2]$$

El número de oscilaciones que la partícula realiza en la unidad de tiempo es la inversa del periodo y la denominaremos *frecuencia* del movimiento, su unidad será el s^{-1}, unidad a la que se denomina hercio (Hz):

$$\nu = \frac{1}{P} = \frac{\omega}{2\pi} \quad [13.3]$$

La cantidad ω se denomina *frecuencia angular* o *pulsación* del movimiento, se mide en rad/s y puede expresarse en función del periodo o de la frecuencia:

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = 2\pi\nu \quad [13.4]$$

La oscilación armónica puede expresarse analíticamente de diferente forma, según el origen que se elija. Así, como puede verse en la Figura 13.1, si tomamos como origen el punto A, la expresión es la de un seno; si tomamos como origen el punto B, es la de un coseno; si el origen es el punto C, se expresa como un menos seno, y si el origen es el punto D, la expresión corresponde a la de un menos coseno.

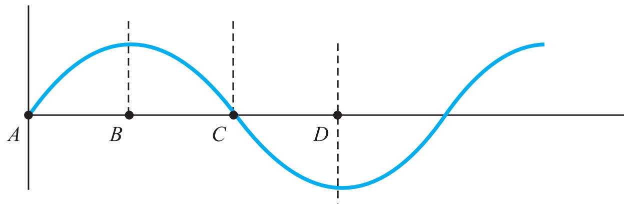


Figura 13.1.

Es interesante comprobar el significado físico de la fase inicial φ, para lo cual vamos a representar dos m.a.s., uno de fase ωt y otro de fase $\omega t + \varphi$:

$$x_1 = A \operatorname{sen} \omega t \quad \text{y} \quad x_2 = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

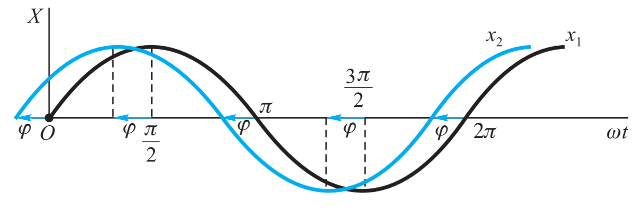


Figura 13.2.

Los ceros de la primera oscilación están en $\omega t = n\pi = 0, \pi, 2\pi, ...$, y los ceros de la segunda en $\omega t + \varphi = n\pi$, es decir, $\omega t = n\pi - \varphi = -\varphi, \pi - \varphi, 2\pi - \varphi, ...$, por tanto, estos están desplazados hacia el origen el valor φ (Figura 13.2). Lo mismo sucede con la posición de los máximos y los mínimos pues, para la primera oscilación están en $\omega t = (2n + 1)\pi/2$, mientras que para la segunda están en $\omega t + \varphi = (2n + 1)\pi/2$. En definitiva, toda la segunda oscilación está desplazada hacia el origen el valor φ, diciéndose que está adelantada respecto de la primera.

13.3 Cinemática del movimiento armónico simple

Obtenemos la velocidad de la partícula que se mueve derivando respecto al tiempo la expresión [13.1]:

$$v = \dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \varphi) \qquad [13.5]$$

y una segunda derivada nos proporciona la aceleración de la partícula:

$$a = \ddot{x} = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x \qquad [13.6]$$

lo que nos indica que en este movimiento la aceleración es proporcional y opuesta al desplazamiento.

En la Figura 13.3 hemos representado en función del tiempo, la posición, la velocidad y la aceleración de una partícula sometida a movimiento armónico simple.

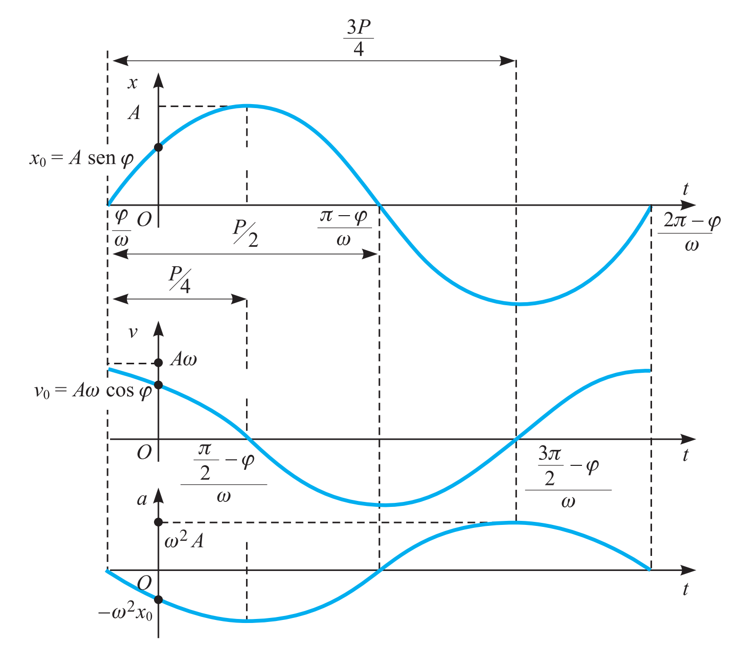


Figura 13.3.

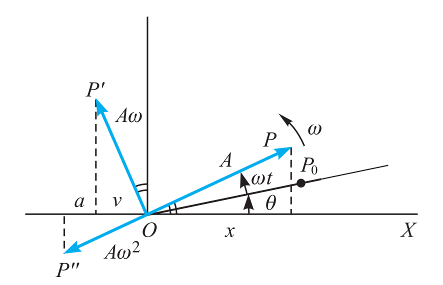


Figura 13.4.

El desplazamiento x de una partícula que se mueve sobre el eje de las x con movimiento armónico simple, coincide con la proyección sobre dicho eje de un vector **OP** de módulo A, igual a la amplitud de la oscilación de la partícula, que gira alrededor de O, en un plano que contiene al eje x, con velocidad angular ω, igual a la frecuencia angular del movimiento de la partícula. Tomemos como origen de arcos el eje OX y supongamos que la posición en el instante inicial es $\mathbf{OP}_0$ formando con OX el ángulo θ, al cabo de un cierto tiempo t, el ángulo que el vector giratorio **OP** forma con OX es $(\omega t + \theta)$ y la proyección de este vector sobre el eje OX es:

$$x = A\cos(\omega t + \theta) \qquad [13.7]$$

que es la misma [13.1], con $\theta = \varphi - \dfrac{\pi}{2}$.

La velocidad y aceleración de la partícula coinciden con la proyección sobre el eje de las equis de sendos vectores $\mathbf{OP}'$ y $\mathbf{OP}''$, cuyos módulos son $A\omega$ y $A\omega^2$, respectivamente, estando $\mathbf{OP}'$ adelantado respecto a **OP** un ángulo $\pi/2$ y $\mathbf{OP}''$, un ángulo π:

$$v = -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \theta) \quad \text{y} \quad a = -A\omega^2\cos(\omega t + \theta) = -\omega^2 x$$

13.4 Estudio por exponenciales complejas

Recordando la igualdad $e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\text{sen}\,\theta$, en la cual j es la unidad imaginaria $j = \sqrt{-1}$, la solución del m.a.s. [13.1] puede escribirse de la forma:

$$x = Ae^{j(\omega t + \varphi)} \qquad [13.8]$$

a condición de considerar únicamente su parte imaginaria. Si la oscilación está expresada en forma de coseno, tal como la [13.7], debemos considerar únicamente su parte real. En cualquier caso, esta expresión puede ponerse de la forma:

$$x = Ae^{j\varphi}e^{j\omega t}$$

y, puesto que φ es constante, así será el complejo:

$$\bar{A} = Ae^{j\varphi}$$

que se denomina amplitud compleja, pudiendo escribirse:

$$x = \bar{A}e^{j\omega t}$$

La derivación respecto al tiempo de la Ecuación [13.8] da:

$$v = A\omega je^{j(\omega t + \varphi)} = Ae^{j\omega t}j\omega = j\omega x$$

y una nueva derivación da:

$$a = j\omega v = (j\omega)^2 x = -\omega^2 x$$

Queda así comprobado que las derivadas sucesivas en las exponenciales complejas se van obteniendo sin más que multiplicar la anterior por $j\omega$.

Al multiplicar un complejo por un número real se multiplica su módulo, o lo que es igual, sus dos componentes, por lo cual el argumento no varía. La multipli-

cación de un complejo por la unidad imaginaria equivale a girar aquél $\pi/2$ rad. en sentido contrario a las agujas del reloj, puesto que su parte real pasa a ser imaginaria y su parte imaginaria pasa, cambiada de signo, a ser real.

Utilizar exponenciales complejas ofrece ventajas de cálculo, que han sido indicadas, y que habrá ocasión de comprobar al estudiar la composición de m.a.s. y otros tipos de movimientos oscilatorios.

13.5 Dinámica del movimiento armónico simple

Veamos, en primer lugar, de qué tipo ha de ser la fuerza, para que actuando sobre una partícula provoque en ésta un movimiento vibratorio armónico simple. Utilicemos la ecuación fundamental de la Dinámica:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

y sustituyamos en ella el valor de la aceleración dado por [13.6], resultando:

$$F = -m\omega^2 x = -kx \qquad [13.9]$$

lo que pone de manifiesto que la fuerza en el movimiento armónico simple es proporcional al desplazamiento y opuesta a él. Por tanto, la fuerza está siempre dirigida hacia el origen, tratando de llevar la partícula a su posición de equilibrio estable, existiendo una atracción de la partícula por parte del origen de coordenadas.

Recíprocamente, si la fuerza es del tipo [13.9], veamos que el movimiento es armónico simple. Para ello, escribiremos la ecuación fundamental de la Dinámica:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

y, llamando a $k/m = \omega^2$, se expresa:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad [13.10]$$

que integrada da como solución, según puede comprobarse, la Ecuación [13.1], lo que pone de manifiesto que el movimiento es armónico simple.

EJEMPLO 13.1

Un muelle de constante k y masa despreciable está colgado por uno de sus extremos y lleva en el otro sujeta una masa m. A partir de la posición estática de equilibrio y siguiendo la vertical descendente y desplacemos la masa una distancia x_0 y estudiemos su movimiento al soltarla con velocidad inicial v_0 de dirección vertical (Figura 13.7).

Solución:

En el equilibrio estático de la masa (Figura 13.5) se verifica:

$$mg - k\delta = 0$$

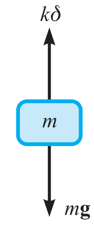


Figura 13.5.

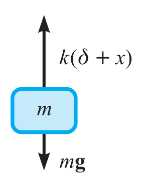


Figura 13.6.

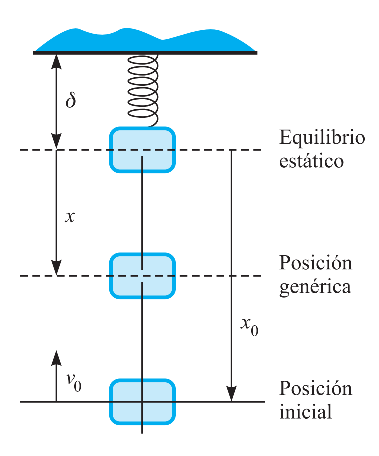


Figura 13.7.

En la posición genérica del movimiento las fuerzas que actúan sobre la masa son: mg y $k(\delta + x)$, según se indica en la Figura 13.6.

La ecuación del movimiento será:

$$m\ddot{x} = mg - k(\delta + x) = mg - k\delta - kx$$

y, utilizando la condición de equilibrio estático, resulta:

$$m\ddot{x} = -kx \quad ; \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

luego es un movimiento armónico simple, cuya solución es:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

siendo la frecuencia angular $\omega = \sqrt{k/m}$ y determinándose las constantes A y φ por las condiciones iniciales, de la siguiente manera. Para $t = 0$ es:

$$x_0 = A \operatorname{sen}\varphi \tag{a}$$

La velocidad está dada por:

$$v = A\sqrt{\frac{k}{m}}\cos(\omega t + \varphi)$$

la cual para $t = 0$, es:

$$v_0 = A\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\varphi \tag{b}$$

Entre ambas ecuaciones, (a) y (b), se despejan A y φ, resultando:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{x_0}{v_0}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{y} \quad A = \sqrt{\frac{m}{k}v_0^2 + x_0^2}$$

El periodo de la oscilación es:

$$P = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Experimentalmente, puede determinarse el periodo contando el número de oscilaciones que hace la masa en un cierto tiempo. Ello nos permitirá determinar la constante k del muelle, ya que es:

$$k = \frac{4\pi^2 m}{P^2}$$

EJEMPLO 13.2

Péndulo simple. Un péndulo simple está formado por un hilo inextensible y de masa despreciable, uno de cuyos extremos está sujeto a un punto fijo, llevando,

en el otro una masa puntual m (Figura 13.8). Si apartamos el péndulo de su posición de equilibrio estable y lo dejamos en libertad, entrará en oscilación bajo la acción de la gravedad, pero su movimiento, según veremos, no es armónico simple. Únicamente para pequeñas oscilaciones puede asemejarse su movimiento a un m.a.s.

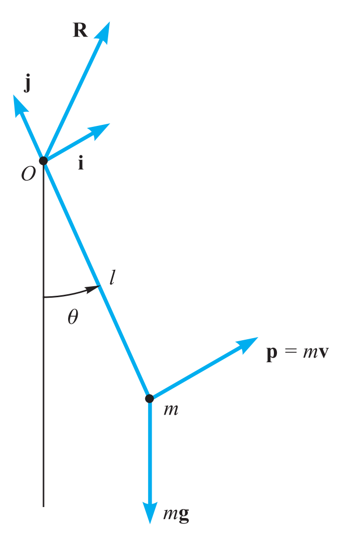


Figura 13.8.

Solución:

La ecuación de movimiento de la masa m puede establecerse por aplicación del teorema del momento cinético:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$$

El momento cinético, respecto a O, es:

$$\mathbf{L} = \mathbf{l} \times \mathbf{p} = -l\,\mathbf{j} \times mv\,\mathbf{i} = lmv\,\mathbf{k}$$

El momento de las fuerzas exteriores respecto a O se expresa:

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{l} \times m\mathbf{g} = -l\,\mathbf{j} \times mg(-\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} - \cos\theta\,\mathbf{j}) = -lmg\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{k}$$

Con todo lo cual, el teorema del momento cinético se escribe:

$$\frac{dv}{dt} = -g\operatorname{sen}\theta$$

o bien:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0$$

que es la ecuación del movimiento del péndulo simple. Únicamente para valores muy pequeños de θ, puede sustituirse el seno por el arco y la ecuación se expresa:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

que es la correspondiente a un m.a.s. de pulsación $\omega = \sqrt{g/l}$, y cuya solución es de la forma:

$$\theta = \theta_0 = \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \varphi\right)$$

en la cual, las constantes θ_0 y φ deben obtenerse de condiciones dadas del movimiento, en general, de sus condiciones iniciales.

EJEMPLO 13.3

Péndulo físico. Un péndulo físico está constituido por un sólido de masa m, que puede girar alrededor de un eje horizontal fijo, paralelo a uno principal de inercia, bajo la acción de la gravedad.

Sea el sólido de la Figura 13.9 de masa m, cuyo c.d.m. está situado en el punto C; y el plano trazado por C normal al eje de rotación corta a éste en el punto O.

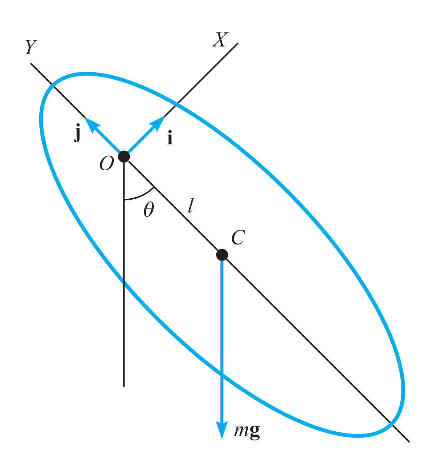


Figura 13.9.

Solución:

La ecuación del movimiento está dada por el teorema del momento cinético:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$$

El momento de las fuerzas exteriores respecto a O es:

$$\mathbf{M}_0 = -y_C\,\mathbf{j} \times \times\, m\mathbf{g} = -l \times mg(-\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} - \cos\theta\,\mathbf{j}) = -l\,mg\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{k}$$

El momento cinético respecto a O es:

$$\mathbf{L} = I_E\boldsymbol{\omega} = I_E\omega\mathbf{k}$$

La ecuación del movimiento es:

$$I_E\,\ddot{\theta}\,\mathbf{k} = -l\,mg\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{k}$$

es decir:

$$\ddot{\theta} + \frac{l\,mg}{I_E}\operatorname{sen}\theta = 0$$

Para pequeños movimientos se expresa:

$$\ddot{\theta} + \frac{l\,mg}{I_E}\,\theta = 0$$

que es la ecuación diferencial de un movimiento armónico simple de pulsación:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{l\,mg}{I_E}}$$

La solución de la oscilación será $\theta = \theta_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi)$, siendo necesario conocer dos condiciones del movimiento para determinar las constantes θ_0 y φ.

13.6 Energía del movimiento armónico simple

La energía cinética de la partícula que realiza un m.a.s., teniendo en cuenta el valor de v dado por [13.5], es:

$$T = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}A^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi) \qquad [13.11]$$

La energía potencial de la cual deriva la fuerza [13.9] es:

$$U = -\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_0^x -kx\,dx = \frac{k}{2}x^2 = \frac{k}{2}A^2\operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi) \qquad [13.12]$$

En la Figura 13.10 se han representado ambas energías.

Teniendo en cuenta que es $k = m\omega^2$, al sumar las energías cinética y potencial resulta:

$$T + U = \frac{k}{2}A^2 = \frac{m}{2}\,\omega^2 A^2 = C^{te} \qquad [13.13]$$

es decir, en cada instante la suma de las energía cinética y potencial de la partícula es una cantidad constante, proporcional al cuadrado de la amplitud y al cuadrado de la frecuencia.

Según se desprende de [13.12], la energía potencial aumenta al aumentar la elongación, siendo la energía potencial máxima para $x = A$, $U_{máx} = 1/2\ kA^2$; en cuyo caso y de acuerdo con [13.13], ha de ser la energía cinética nula, $T = 0$.

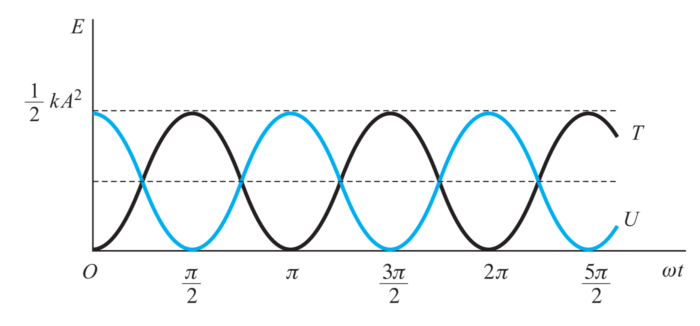


Figura 13.10.

EJEMPLO 13.4

Péndulo simple. Un péndulo simple de longitud l y masa m parte del reposo en una cierta posición inicial, en la cual la masa está situada a la altura h respecto del plano horizontal que pasa por su posición de equilibrio estable (Figura 13.11).

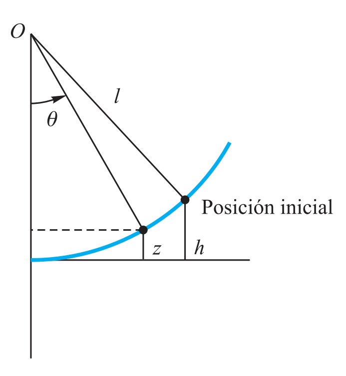


Figura 13.11.

Solución:

La energía cinética inicial es nula, $T_i = 0$, y la energía potencial es $U_i = mgh$. En una posición genérica del movimiento, la masa estará a una altura z sobre el plano horizontal de referencia que pasa por la posición de equilibrio estable, siendo su energía potencial:

$$U = mgz = mgl(1 - \cos\theta)$$

La energía cinética en esa posición es:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

La conservación de la energía mecánica permite escribir:

$$mgh - mgl(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

Lo cual permite obtener la velocidad de la partícula en función de la posición. Si dividimos por m y derivamos respecto a t, resulta:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0$$

que, para pequeños movimientos, es:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

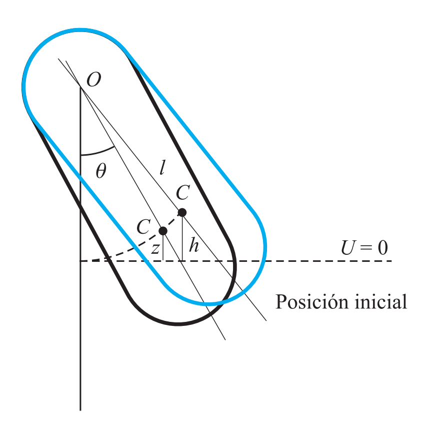


Figura 13.12.

EJEMPLO 13.5

Péndulo físico. Un péndulo físico de masa m y cuya distancia del c.d.m. al eje de oscilación es l, parte del reposo de una posición inicial en la cual C está a una cota h sobre el plano horizontal de referencia que pasa por su posición de equilibrio estable (Figura 13.12).

Solución:

Su energía cinética inicial es nula y su energía potencial será:

$$U_i = mgh$$

En un instante genérico del movimiento, C estará a una cota z sobre su posición de equilibrio estable. La energía potencial será:

$$U = mgz = mgl(1 - \cos\theta)$$

La energía cinética en esa posición es:

$$T = \frac{1}{2} I_E \dot{\theta}^2$$

La conservación de la energía mecánica permite escribir:

$$mgh = mgl(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2} I_E \dot{\theta}^2$$

Derivando respecto al tiempo y dividiendo por I_E, resulta:

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{I_E} \operatorname{sen}\theta = 0$$

que, para pequeños movimientos, es:

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{I_E}\, \theta = 0$$

13.7 Composición de dos movimientos vibratorios armónicos de igual dirección y frecuencia

Sean dos movimientos vibratorios armónicos de igual dirección y frecuencia, que producen a la partícula sendos desplazamientos dados por las expresiones:

$$x_1 = A_1 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_1) \qquad x_2 = A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_2)$$

La superposición de estos movimientos da para la partícula un desplazamiento:

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_1) + A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_2) =$$
$$= (A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2) \operatorname{sen}\omega t + (A_1 \operatorname{sen}\varphi_1 + A_2 \operatorname{sen}\varphi_2) \cos\omega t$$

y haciendo:

$$A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 = A \cos \varphi$$

$$A_1 \operatorname{sen} \varphi_1 + A_2 \operatorname{sen} \varphi_2 = A \operatorname{sen} \varphi \qquad [13.14]$$

resulta:

$$x = A \operatorname{sen} (\omega t + \varphi)$$

Oscilación

lo que pone de manifiesto que el *movimiento resultante para la partícula de la superposición de dos movimientos armónicos de igual frecuencia y dirección, es un movimiento armónico de la misma frecuencia y dirección*.

La amplitud del movimiento resultante, así como su fase inicial, se calculan mediante el sistema [13.14] en función de las amplitudes y fases iniciales de los movimientos primarios, resultando:

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \operatorname{sen} \varphi_1 + A_2 \operatorname{sen} \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \qquad [13.15]$$

Defasaje

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) \qquad [13.16]$$

Amplitud

En la posición $t = 0$, los vectores representativos de las vibraciones ocupan las posiciones que se indican en la Figura 13.13.

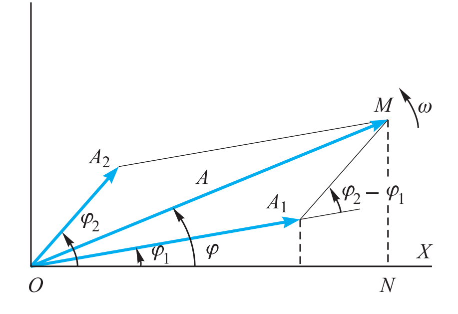


Figura 13.13.

La simple aplicación de un conocido teorema de geometría da la Expresión [13.16]. De forma igualmente sencilla se deduce:

$$\tan \varphi = \frac{MN}{ON} = \frac{A_1 \operatorname{sen} \varphi_1 + A_2 \operatorname{sen} \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

que es la Ecuación [13.15].

En consecuencia, *la composición de dos vibraciones armónicas simples de igual dirección y frecuencia equivale a la suma de los dos vectores que las representan*. Lo que, evidentemente, es generalizable al caso de superposición de n movimientos armónicos simples de la misma dirección y frecuencia. El movimiento resultante será armónico simple, de la misma dirección y frecuencia, y cuyo vector representativo será la suma de los vectores que representan a las vibraciones componentes. Por tanto, la superposición de las n vibraciones armónicas, de la forma:

$$x_i = A_i \operatorname{sen} (\omega t + \varphi_i) \quad ; \quad i = 1, 2, ..., n$$

da:

$$x = \sum_i x_i = \operatorname{sen} \omega t \sum_i A_i \cos \varphi_i + \cos \omega t \sum_i A_i \operatorname{sen} \varphi_i = A \operatorname{sen} (\omega t + \varphi)$$

siendo:

$$\tan \varphi = \frac{\sum_i A_i \operatorname{sen} \varphi_i}{\sum_i A_i \cos \varphi_i}$$

$$A^2 = \sum A_i^2 + \sum_{\substack{i \\ i \neq j}} \sum_j A_i A_j \cos (\varphi_i - \varphi_j) = \sum_i \sum_j A_i A_j \cos (\varphi_i - \varphi_j)$$

Hay algunos casos sencillos, pero importantes, de superposición de dos movimientos armónicos simples. Éstos son:

a) Los dos m.a.s. que se superponen *están en fase*, es decir, tienen la misma fase inicial.

b) Las fases iniciales de los dos m.a.s. que se superponen difieren en π, es decir *están en oposición*.

c) Las fases iniciales de los dos m.a.s. que se superponen difieren en $\pi/2$, es decir, *están en cuadratura*.

a) *Los dos m.a.s. están en fase.*

En este caso, de [13.16] se deduce que la amplitud del m.a.s. resultante es la suma de las amplitudes $A = A_1 + A_2$ y, de la [13.15], que la fase inicial del movimiento resultante coincide con la fase inicial de las vibraciones componentes.

La vibración resultante es:

Oscilación

$$x = (A_1 + A_2)\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi)$$

En la Figura 13.14 se han representado las oscilaciones que se superponen y la oscilación resultante.

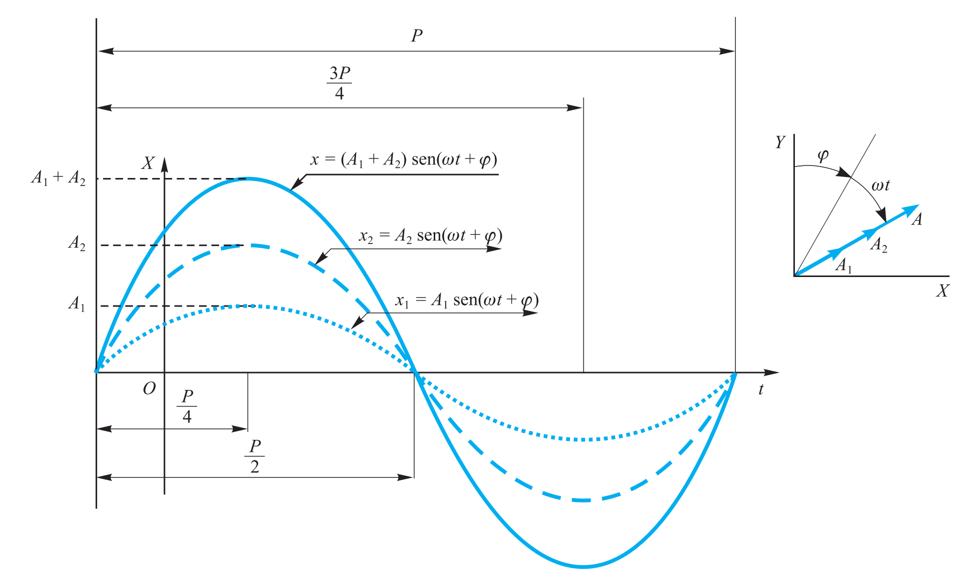


Figura 13.14.

b) *Los dos m.a.s. están en oposición.*

Cuando las fases de los m.a.s. que se superponen difieren en π se dice que están en oposición. De [13.16] se deduce que la amplitud de la vibración resultante es:

$$A = |A_1 - A_2|$$

y de [13.15] se obtiene la fase inicial de la vibración resultante:

$$\tan\varphi = \frac{A_1 \text{sen}\,\varphi_1 - A_2\,\text{sen}\,\varphi_1}{A_1\cos\varphi_1 - A_2\cos\varphi_1} = \text{tg}\,\varphi_1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \varphi_1$$

que coincide con la menor de las fases iniciales de las vibraciones que se superponen.

La vibración resultante es:

Oscilación

$$x = |A_1 - A_2|\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi_1)$$

En la Figura 13.15 se han representado las oscilaciones que se superponen y la oscilación resultante.

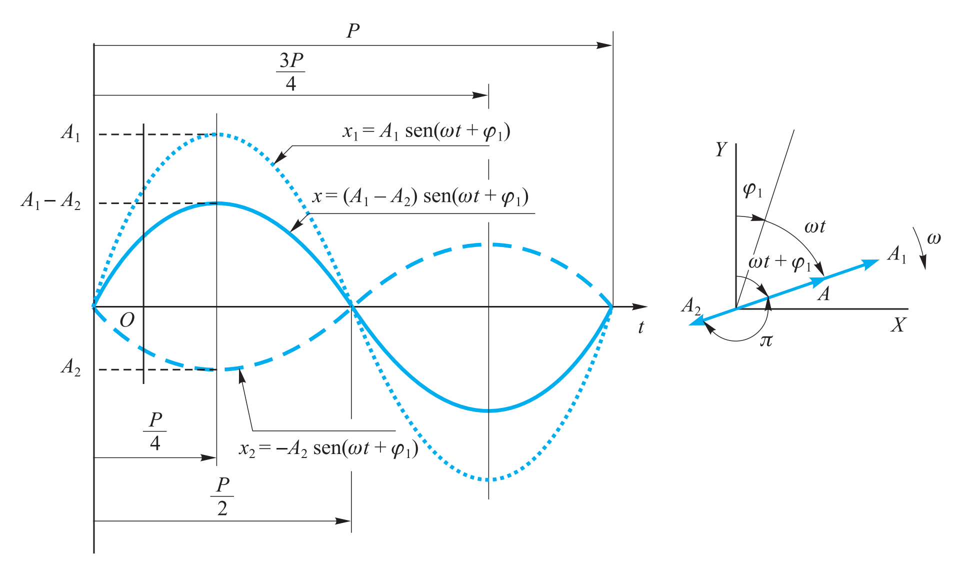


Figura 13.15.

Si, en este caso, las dos vibraciones que se superponen tienen igual amplitud, la vibración resultante es nula.

c) *Los m.a.s. que se superponen están en cuadratura.*

Se dice que dos vibraciones armónicas están en cuadratura cuando sus fases difieren en $\pi/2$, $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$.

La Ecuación [13.16], en este caso, nos da, para la amplitud el valor:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2$$

Amplitud

y de la [13.15] obtenemos el valor de φ:

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \operatorname{sen} \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_1}{A_1 \cos \varphi_1 - A_2 \operatorname{sen} \varphi_1} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 + \dfrac{A_2}{A_1}}{1 - tg\, \varphi_1 \dfrac{A_2}{A_1}}$$

haciendo:

$$\frac{A_2}{A_1} = \tan \phi$$

podemos escribir:

$$\tan \varphi = \tan (\varphi_1 + \phi)$$

resultando:

$$\varphi = \varphi_1 + \phi = \varphi_1 + \operatorname{arctg} \frac{A_2}{A_1}$$

Defasaje

La vibración resultante es:

$$x = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \operatorname{sen} \left(\omega t + \varphi_1 + \operatorname{arctg} \frac{A_2}{A_1} \right)$$

Oscilación

En la Figura 13.16 se han representado las oscilaciones que se superponen y la oscialción resultante.

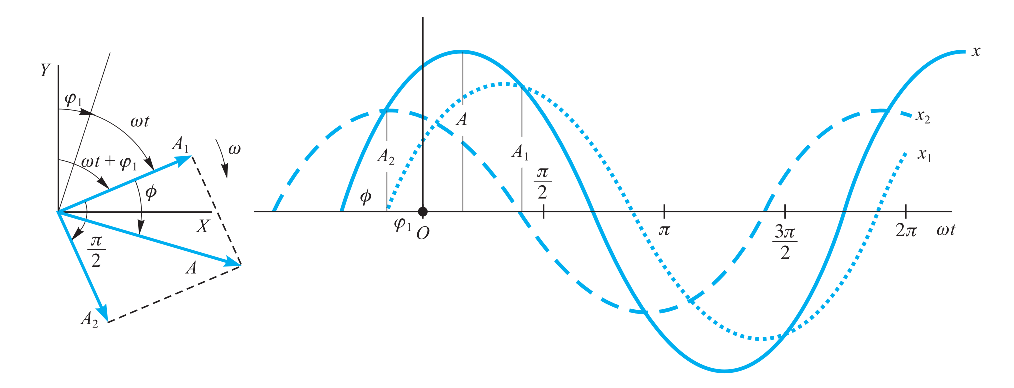


Figura 13.16.

Si, en este caso, es $A_1 = A_2 = a$, la amplitud del movimiento resultante es $A = a\sqrt{2}$ *y su fase inicial*, $\varphi = \varphi_1 + \pi/2$, *con lo cual la vibración resultante es*:

$$x = a\sqrt{2}\,\text{sen}\left(\omega t + \varphi_1 + \frac{\pi}{4}\right)$$

Resolución mediante exponenciales complejas

Utilizando exponenciales complejas, los m.a.s. que se van a superponer se expresan de la forma:

$$x_1 = A_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} = A_1 e^{j\varphi_1} e^{j\omega t} = \bar{A}_1 e^{j\omega t}$$

$$x_2 = A_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)} = A_2 e^{j\varphi_2} e^{j\omega t} = \bar{A}_2 e^{j\omega t}$$

y su suma es:

$$x = x_1 + x_2 = (A_1 e^{j\varphi_1} + A_2 e^{j\varphi_2}) e^{j\omega t} = \bar{A} e^{j\omega t} = A e^{j\varphi} e^{j\omega t} = A e^{j(\omega t + \varphi)}$$

en la que debemos tomar como solución la parte imaginaria:

$$x = A\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi)$$

lo que demuestra que el movimiento resultante es armónico simple, de la misma pulsación ω, y en la que A y φ son el módulo y el argumento, respectivamente, del complejo:

$$\bar{A} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 = A_1 e^{j\varphi} + A_2 e^{j\varphi}$$

La amplitud de la oscilación resultante se obtiene multiplicando $\bar{A}$ por su conjugado complejo $\bar{A}^*$:

$$A^2 = \bar{A}\bar{A}^* = (A_1 e^{j\varphi_1} + A_2 e^{j\varphi_2})(A_1 e^{-j\varphi_1} + A_2 e^{-j\varphi_2}) =$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 [e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{-j(\varphi_1 - \varphi_2)}] =$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

que coincide con la Expresión [13.16].

La fase φ de la oscilación resultante es el argumento del complejo:

$$\bar{A} = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 + j(A_1 \operatorname{sen} \varphi_1 + A_2 \operatorname{sen} \varphi_2)$$

por tanto:

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \operatorname{sen} \varphi_1 + A_2 \operatorname{sen} \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

que coincide con la [13.15].

13.8 Composición de dos movimientos armónicos simples de igual dirección y diferente frecuencia. Modulación

Consideremos en primer lugar el caso más general, en el cual las amplitudes de los dos movimientos armónicos simples son también diferentes.

Sean los desplazamientos provocados por éstos:

$$x_1 = A_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \varphi_1) \quad ; \quad x_2 = A_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \varphi_2)$$

La diferencia de fase entre los dos movimientos armónicos que se superponen, $(\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2 - \varphi_1$, no es ahora constante. Para simplificar el cálculo hagamos:

$$\omega_2 - \omega_1 = 2\omega \quad ; \quad \omega_2 + \omega_1 = 2\Omega \quad ; \quad \varphi_2 - \varphi_1 = 2\varphi$$

y elijamos como origen de tiempos el instante en el cual se verifica $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$. De todo ello resulta:

$$\omega_2 = \Omega + \omega \quad ; \quad \omega_1 = \Omega - \omega \quad ; \quad \varphi_2 = \varphi \quad ; \quad \varphi_1 = -\varphi$$

con lo que podemos escribir:

$$x_1 = A_1 \operatorname{sen}[(\Omega - \omega)t - \varphi] = A_1 \operatorname{sen}[\Omega t - (\omega t + \varphi)]$$

$$x_2 = A_2 \operatorname{sen}[(\Omega + \omega)t + \varphi] = A_2 \operatorname{sen}[\Omega t + (\omega t + \varphi)]$$

y la composición da:

$$\begin{aligned} x = x_1 + x_2 &= A_1 \operatorname{sen} \Omega t \cos(\omega t + \varphi) - A_1 \cos \Omega t \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) + \\ &+ A_2 \operatorname{sen} \Omega t \cos(\omega t + \varphi) + A_2 \cos \Omega t \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = \\ &= (A_1 + A_2) \operatorname{sen} \Omega t \cos(\omega t + \varphi) + (A_2 - A_1) \cos \Omega t \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

que haciendo:

$$(A_1 + A_2) \cos(\omega t + \varphi) = A \cos \phi$$

$$(A_2 - A_1) \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = A \operatorname{sen} \phi$$

resulta:

$$x = A \operatorname{sen}(\Omega t + \phi) \qquad [13.17]$$ Oscilación modulada en amplitud

siendo:

$$\tan \phi = \frac{(A_2 - A_1)}{(A_1 + A_2)} \operatorname{tg}(\omega t + \varphi) \qquad [13.18]$$ Defasaje

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos 2(\omega t + \varphi) \qquad [13.19]$$ Amplitud modulada

El movimiento resultante es oscilatorio pero no armónico simple, puesto que tanto la amplitud como la fase inicial son función del tiempo. La amplitud varía entre $A = A_1 + A_2$ y $A = |A_1 - A_2|$, que corresponden a los valores ± 1 para el coseno en la Ecuación [13.19], diciéndose que la oscilación resultante está *modulada en amplitud*. En la Figura 13.17 se ha representado la oscilación resultante en línea continua, correspondiendo la línea de puntos a la representación de la amplitud A.

La pulsación de la oscilación de la amplitud es $2\omega = \omega_2 - \omega_1$, y su frecuencia será la semidiferencia de las frecuencias de los movimientos que se superponen:

$$\nu = \frac{1}{2}(\nu_2 - \nu_1)$$

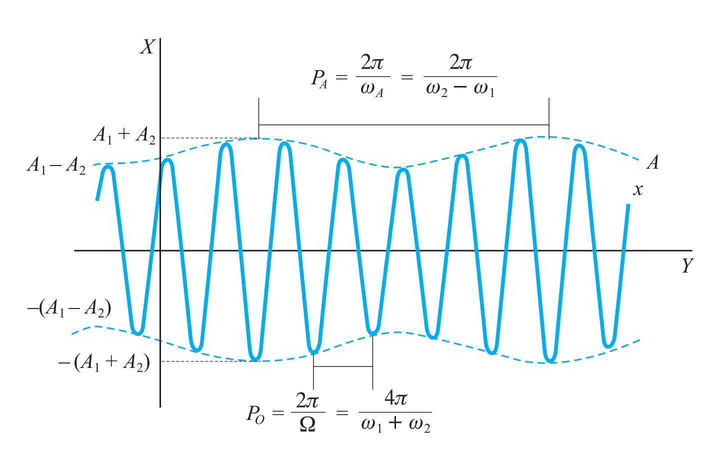


Figura 13.17.

Los periodos de la amplitud y de la oscilación resultante son, respectivamente:

$$P_A = \frac{2\pi}{\omega_A} = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{1}{\nu_A} \quad ; \quad P_0 = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{4\pi}{\omega_2 + \omega_1} = \frac{1}{\nu_0}$$

tanto mayor el primero cuanto menor sea la diferencia entre frecuencias.

Obtención por exponenciales complejas

Utilizando exponenciales complejas, los m.a.s. que se van a superponer se representan de la siguiente forma:

$$x_1 = A_1 e^{j[(\Omega - \omega)t - \varphi]} = A_1 e^{-j(\omega t + \varphi)} e^{j\Omega t}$$
$$x_2 = A_2 e^{j[(\Omega + \omega)t + \varphi]} = A_2 e^{j(\omega t + \varphi)} e^{j\Omega t}$$

y su suma da:

$$x = x_1 + x_2 = [A_1 e^{-j(\omega t + \varphi)} + A_2 e^{j(\omega t + \varphi)}] e^{j\Omega t}$$
$$x = \bar{A}(t) e^{j\Omega t} = A(t) e^{j\varphi(t)} e^{j\Omega t} = A(t) e^{j[\Omega t + \phi(t)]}$$

Oscilación modulada en amplitud

$$x = A(t)\,\text{sen}\,[\Omega t + \phi(t)]$$

siendo $A(t)$ el módulo y $\phi(t)$ el argumento del complejo:

$$\bar{A} = (A_1 + A_2)\cos(\omega t + \varphi) + j(A_2 - A_1)\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi)$$

cuyos valores son:

$$A^2 = \bar{A} \cdot \bar{A}^* = [A_1 e^{-j(\omega t + \varphi)} + A_2 e^{j(\omega t + \varphi)}] \cdot [A_1 e^{j(\omega t + \varphi)} + A_2 e^{-j(\omega t + \varphi)}] =$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos 2(\omega t + \varphi) =$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos 2\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\, t + \varphi_2\right)$$

Amplitud modulada

$$\tan \phi = \frac{(A_2 - A_1)}{(A_1 + A_2)} \operatorname{tg}(\omega t + \varphi) = \frac{A_2 - A_1}{A_1 + A_2} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\, t + \varphi_2\right)$$

Defasaje

que coinciden con las expresiones [13.19 y 13.18], respectivamente. En el caso particular de ser $A_2 = A_1$, la Ecuación [13.18] da:

$$A^2 = 2A_1^2[1 + \cos 2(\omega t + \varphi) = 2A_1^2 \cdot 2\cos 2(\omega t + \varphi)$$

$$A = 2A_1 \cos(\omega t + \varphi)$$

es decir, la amplitud varía de forma armónica simple, siendo la amplitud de ésta doble de la amplitud de los movimientos que se superponen; la pulsación igual a las semidiferencias de las pulsaciones, y la fase inicial igual a la semidiferencia de las fases iniciales de los movimientos que se superponen. Para este caso particular, de la Ecuación [13.18] se deduce que es $\phi = 0$ y, con todo ello, la Ecuación [13.17] del movimiento oscilatorio resultante se escribe:

$$x = 2A_1 \cos(\omega t + \varphi) \cdot \operatorname{sen} \Omega t$$

Pulsaciones

o bien:

$$x = 2A_1 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\, t + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \cdot \operatorname{sen} \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\, t$$

En la Figura 13.18 se ha representado la oscilación resultante en la línea continua, correspondiendo la línea de puntos a la representación de la amplitud A. Este caso particular de modulación se conoce con el nombre de *pulsaciones* y, en él, la amplitud se anula con un periodo P_A mucho mayor que el de la oscilación P_0:

$$P_A = \frac{4\pi}{\omega_2 - \omega_1} > P_0 = \frac{4\pi}{\omega_2 + \omega_1}$$

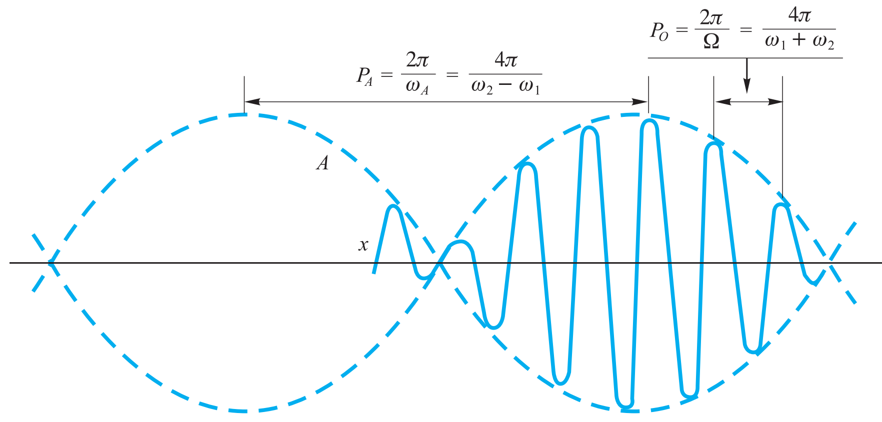


Figura 13.18.

En radiotelefonía, una onda modulada en amplitud puede ser de la forma:

$$x = A[1 + m\cos(\omega t + \varphi)]\,\mathrm{sen}\,\Omega t$$

en la que m es el llamado índice de modulación. Esta onda puede escribirse de la siguiente manera:

$$x = A\,\mathrm{sen}\,\Omega t + B\,\mathrm{sen}\,\Omega t \cdot \cos(\omega t + \varphi) =$$
$$= A\,\mathrm{sen}\,\Omega t + B/2\,\mathrm{sen}\,[(\Omega + \omega)t + \varphi] + B/2\,\mathrm{sen}\,[(\Omega - \omega)t - \varphi]$$

Es decir, se trata de la superposición de tres oscilaciones armónicas simples: una con la frecuencia de la portadora y otras dos, igualmente separadas de aquélla, con frecuencias angulares $\Omega + \omega$ y $\Omega - \omega$.

Frecuencia modulada

Se dice que una vibración es de frecuencia modulada cuando su frecuencia no es constante, sino función periódica del tiempo. Una tal onda es de la forma:

$$x = A\,\mathrm{sen}\,[(a + b\,\mathrm{sen}\,\Omega t)t + \varphi]$$

Se demuestra que este tipo de ondas equivale a la superposición de infinitas ondas armónicas simples, lo que las hace menos sensibles a las perturbaciones que las de amplitud modulada.

13.9 Composición de dos movimientos armónicos simples de direcciones perpendiculares

Eligiendo convenientemente el origen de tiempos, la fase inicial del movimiento sobre el eje de las equis puede anularse, siendo el desplazamiento en esta dirección:

$$x = A\,\mathrm{sen}\,\omega t \qquad [13.20]$$

Considerando, en primer lugar, que los dos movimientos son de igual frecuencia, el movimiento sobre el eje de las ies está dado por la ecuación:

$$y = B\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi) \qquad [13.21]$$

siendo φ la diferencia de fase entre los dos movimientos.

La superposición de ambos movimientos da, para la trayectoria, la ecuación:

$$y = B\frac{x}{A}\cos\varphi + B\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$\left(y - \frac{B}{A}x\cos\varphi\right)^2 = B^2\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)\mathrm{sen}^2\,\varphi$$

$$y^2 + \frac{B^2}{A^2}x^2 - 2\frac{B}{A}xy\cos\varphi = B^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi \qquad [13.22]$$

ecuación que corresponde a una curva de segundo orden, cuya forma depende del valor de φ. Es evidente que esta curva está siempre dentro del rectángulo $x = \pm A$, $y = \pm B$, que es donde están definidas las Ecuaciones [13.20] y [13.21].

Si los movimientos están en fase, $\varphi = 0$; la Ecuación [13.22] se reduce a:

$$y = \frac{B}{A}x$$

lo que nos muestra que el movimiento resultante se realiza sobre la diagonal *PR*, diciéndose que está polarizado linealmente.

Si las oscilaciones que se superponen tienen un desfase igual a π, la Ecuación [13.21] se reduce a:

$$y = -\frac{B}{A}x$$

y el movimiento se realiza sobre la diagonal *SQ*, estando polarizado linealmente.

Si las oscilaciones que se superponen están en cuadratura, $\varphi = \pi/2$, la Ecuación [13.22] se transforma en:

$$y^2 = B^2\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right) \quad \text{o} \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

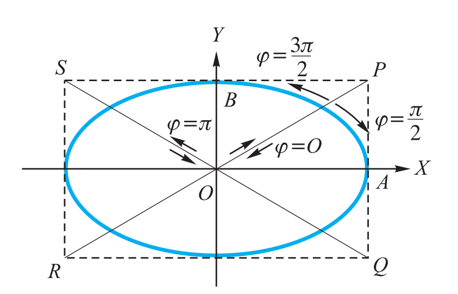


Figura 13.19.

que es la ecuación de una elipse cuyos ejes principales coinciden con las direcciones de los movimientos que se superponen. Para ver el sentido en el cual esta elipse es recorrida, basta hallar la velocidad del movimiento, por ejemplo, sobre el eje *OY*, lo que se hace así:

$$y = B \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = B\cos\omega t$$

$$\frac{dy}{dt} = -B\omega \operatorname{sen}\omega t = -\frac{B}{A}\omega x$$

para valores de x positivos la componente de la velocidad sobre el eje *OY* es negativa, lo que indica que el sentido en el que la elipse es recorrida es el del movimiento de las agujas del reloj. Esta misma elipse es la trayectoria en el caso de ser $\varphi = 3\pi/2$, pero ahora en sentido contrario. En ambos casos, se dice que el movimiento está polarizado elípticamente. Si los dos movimientos son de igual amplitud, $A = B$, esta elipse se transforma en una circunferencia, diciéndose que el movimiento resultante está polarizado circularmente. Para otros valores de φ aparecen trayectorias elípticas, pero los ejes principales de estas elipses ya no coinciden con las direcciones de los movimientos que se componen.

Figuras de Lissajous

Consideremos ahora el caso en el cual las pulsaciones de las dos oscilaciones que se superponen son distintas, siendo:

$$x = A \operatorname{sen}\omega_1 t \quad ; \quad y = B\operatorname{sen}(\omega_2 t + \varphi) \qquad [13.23]$$

La trayectoria resultante, superposición de ambas oscilaciones, depende de φ y de la relación ω_1/ω_2. Por tanto, hay una doble infinidad de trayectorias, denominadas *figuras de Lissajous*.

Si ω_1/ω_2 es un número racional:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{\nu_1}{\nu_2}$$

la curva es cerrada, ya que se repite con intervalos de tiempo $T = n_1T_1 = n_2T_2$ (Figura 13.20). Por tanto, en el tiempo T, el movimiento sobre el eje de las x hace n_1 oscilaciones y el movimiento sobre el eje de las y, n_2. En consecuencia, la curva tendrá n_2 puntos de contacto con $x = A$ y n_1 puntos de contacto con $y = B$.

Analicemos el siguiente caso concreto $x = A\operatorname{sen}\omega t$, $y = B\operatorname{sen}(2\omega t + \pi/2)$. En este caso es:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega}{2\omega} = \frac{1}{2} = \frac{T_2}{T_1} \quad \text{y} \quad T = T_1 = 2T_2$$

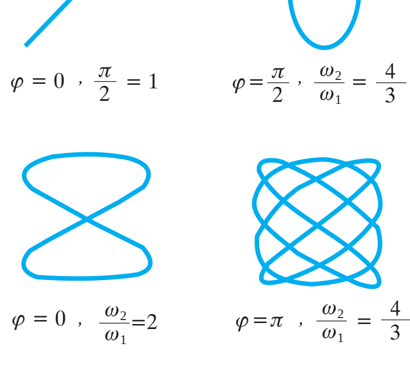


Figura 13.20.

Esta curva tendrá 2 puntos de contacto con $x = A$ y 1 punto de contacto con $y = B$. Para construir la curva se procede de la siguiente manera: se traza una circunferencia de radio A y una segunda circunferencia de radio B, dispuestas como se indica en la Figura 13.21. En la primera, el origen para medir arcos está en el punto A de la vertical O_1A y el mismo para la segunda es el punto B de la vertical O_2B. Se divide la primera en un número doble de partes que la segunda. Se numeran los arcos siguiendo las agujas del reloj, a partir de A, en la primera, y a partir de B, en la segunda, y se unen los puntos correspondientes como se indica en la Figura 13.21. Los puntos de intersección pertenecen a la curva buscada.

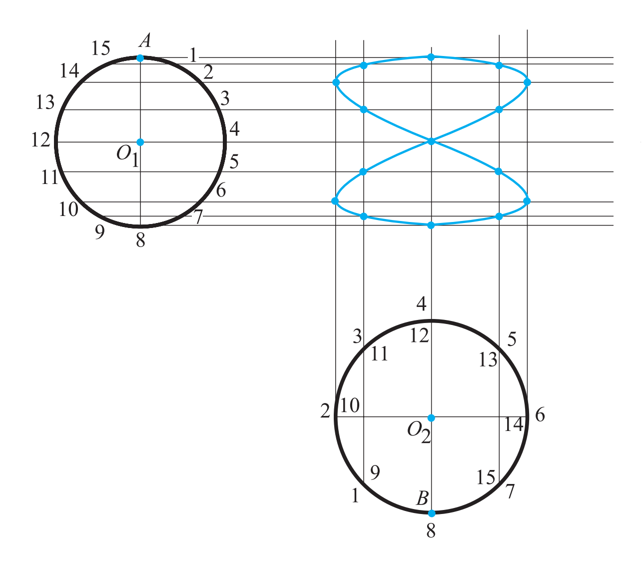


Figura 13.21.

13.10 Oscilaciones libres amortiguadas

Las vibraciones de todo sistema real conllevan, inevitablemente, una disipación de energía. En consecuencia, la amplitud de las vibraciones libres no permanecerá constante, sino que irá disminuyendo a medida que lo hace la energía del sistema.

Las fuerzas disipativas en medios fluidos viscosos, como ya indicamos en el Capítulo 8, son proporcionales a la velocidad y opuestas a ella, es decir, del tipo $\mathbf{f} = -c\mathbf{v}$, denominándose a la constante de proporcionalidad *coeficiente de amortiguamiento*. Para fijar ideas nos vamos a referir al sistema oscilante de la Figura 13.22, en el cual, al ser la masa puntual, se desprecia el empuje de Arquímedes.

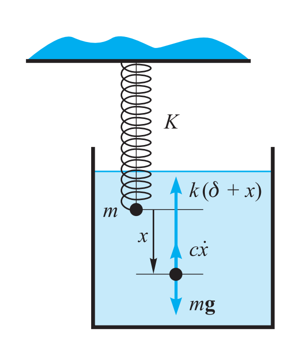


Figura 13.22.

En la posición de equilibrio estable se verifica $k\delta - mg = 0$, siendo δ el alargamiento del muelle en esa posición. Para un desplazamiento x, a partir de la posición de equilibrio, las fuerzas que actúan sobre la partícula se indican en el diagrama y la ecuación de la Dinámica se expresa:

$$m\ddot{x} = mg - c\dot{x} - k(x + \delta) \quad \text{o} \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

en la cual:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad [13.24]$$

es la pulsación de la oscilación libre no amortiguada y $\tau = 2m/c$, el *tiempo de relajación de la amplitud*. En función de los cuales se escribe:

$$\ddot{x} + \frac{2}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad [13.25]$$

ecuación diferencial de segundo orden, de coeficientes constantes y homogénea, cuya solución es del tipo:

$$x = Ae^{zt}$$

Las derivadas de ésta respecto al tiempo son:

$$\dot{x} = Aze^{zt} \quad \text{y} \quad \ddot{x} = Az^2e^{zt}$$

Al llevar los valores de x, $\dot{x}$ y $\ddot{x}$ a la [13.25] y dividir por Ae^{zt}, resulta:

$$z^2 + \frac{2}{\tau}z + \omega_0^2 = 0 \qquad [13.26]$$

Ecuación característica

que es la llamada *ecuación característica*, cuyas raíces son:

$$z_{1,2} = -\frac{1}{\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2} \qquad [13.27]$$

Según la naturaleza de las raíces se presentan tres posibles casos distintos de movimiento:

Caso 1.º *Amortiguamiento crítico*.

Es el que aparece cuando es:

$$\frac{1}{\tau} = \omega_0 \qquad [13.28]$$

Al coeficiente de amortiguamiento se le llama, en este caso, de amortiguamiento crítico y su valor se calcula a partir de [13.28]:

$$\frac{1}{2}\frac{c_c}{m} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{de donde:} \quad c_c = 2\sqrt{mk} \qquad [13.29]$$

En este caso, la raíz de [13.26] es doble y la solución general de la Ecuación [13.25] es de la forma:

$$x = (A + Bt)e^{-t/\tau} \qquad [13.30]$$

movimiento que no es oscilatorio y cuya representación corresponde a la de la Figura 13.23.

Las constantes A y B se determinan de acuerdo a dos condiciones particulares del movimiento.

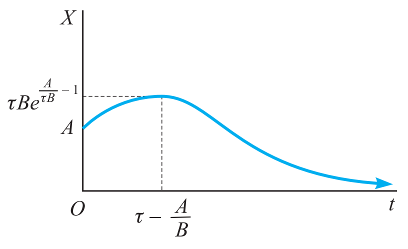


Figura 13.23.

EJEMPLO 13.6

Una masa m está sometida a una fuerza recuperadora, cuya constante de proporcionalidad k es conocida, y a un amortiguamiento crítico. Sabiendo que en el instante inicial, $t = 0$, es abandonada en la posición $x = x_0$ con velocidad $v_0 = 0$, hallemos:

a) La ecuación del movimiento.
b) La velocidad con que se mueve la masa m.
c) Los máximos y mínimos de la posición x.

Solución:

a) Por estar la masa sometida a un amortiguamiento crítico, la solución de la ecuación diferencial de segundo orden que describe el movimiento es de la forma:

$$x = (A + Bt)e^{-t/\tau}$$

siendo A y B constantes, y τ el tiempo de relajación de la amplitud:

$$\tau = \frac{2m}{c_c} = m/\sqrt{km} = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$c_c = 2\sqrt{km}$$

con lo que es:

$$x = (A + Bt)e^{-\sqrt{kt/m}}$$

Las constantes A y B se determinan a partir de las condiciones iniciales indicadas en el enunciado. La primera condición da: $x_0 = A$.

Derivando con respecto al tiempo la expresión de la posición, se tiene la expresión de la velocidad:

$$v = \left[B - \sqrt{\frac{k}{m}}(A + Bt)\right]e^{-\sqrt{kt/m}}$$

Para $t = 0$, resulta:

$$v = B - \sqrt{\frac{k}{m}}A = B - \sqrt{\frac{k}{m}}x_0 = 0$$

de donde:

$$B = \sqrt{\frac{k}{m}}x_0$$

La solución en función de los datos del enunciado es:

$$x = x_0\left(1 + \sqrt{\frac{k}{m}}t\right)e^{-\sqrt{kt/m}}$$

b) Sustituyendo en la expresión de la velocidad, A y B por sus valores, se obtiene:

$$v = -x_0\frac{k}{m}te^{-\sqrt{kt/m}}$$

c) Los máximos y mínimos de x estarán en los puntos en que se anule la velocidad, es decir, en $t = 0$ y $t = \infty$. Para ver cuál es el máximo y cuál el mínimo, hallamos la segunda derivada de x:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -x_0\frac{k}{m}\left(1 - \sqrt{\frac{k}{m}}t\right)e^{-\sqrt{kt/m}}$$

Para $t = 0$, es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = = \frac{x_0k}{m} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{MÁXIMO}$$

Para $t = \infty$, es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \frac{\frac{k}{m}}{e^{-\sqrt{kt/m}}} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{MÍNIMO}$$

Caso 2.º *Amortiguamiento inferior al crítico.*

Se presenta cuando es:

$$\omega_0 > \frac{1}{\tau} \qquad [13.31]$$

o bien:

$$\sqrt{\frac{k}{m}} > \frac{1}{2}\frac{c}{m}$$

de donde:

$$c < 2\sqrt{mk} = c_c$$

El coeficiente de amortiguamientos es, en este caso, inferior al crítico.

Las raíces de [13.26] son números complejos conjugados. Para simplificar, hagamos:

$$\frac{1}{\tau} = a \quad \text{y} \quad b = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}$$

con ello, las raíces son:

$$z_{1,2} = -a \pm jb$$

y la solución general de la Ecuación [13.25], que es de la forma:

$$x = A_1 e^{z_1 t} + A_2 e^{z_2 t}$$

se escribe:

$$\begin{aligned} x &= A_1 e^{-at} e^{jbt} + A_2 e^{-at} e^{-jbt} = e^{-at}(A_1 e^{jbt} + A_2 e^{-jbt}) = \\ &= e^{-at}[A_1(\cos bt + j \operatorname{sen} bt) + A_2(\cos bt - j \operatorname{sen} bt)] = \\ &= e^{-at}[(A_1 + A_2)\cos bt + j(A_1 - A_2)\operatorname{sen} bt] \end{aligned}$$

en la cual A_1 y A_2 deben ser complejos conjugados, ya que el movimiento es real. Haciendo:

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2) &= A \operatorname{sen} \varphi \\ (A_1 - A_2)j &= A \cos \varphi \end{aligned}$$

fórmulas en las cuales A y φ serán ya números reales, la solución se escribe:

$$x = Ae^{-at} \operatorname{sen}(bt + \varphi) = Ae^{-t/\tau} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}\, t + \varphi\right) \qquad [13.32]$$

Oscilación amortiguada libre

que es un movimiento oscilatorio en el cual la amplitud decrece exponencialmente:

$$\mathcal{A} = Ae^{-t/\tau} \qquad [13.33]$$

Amplitud amortiguada

y su pulsación es:

Frecuencia angular

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}} \qquad [13.34]$$

menor que la pulsación de la oscilación libre sin amortiguar, ω_0; por el contrario, el periodo será mayor, es decir, las oscilaciones amortiguadas serán más lentas, y tanto más cuanto menor sea τ.

Tiempo de relajación de la amplitud

El *tiempo de relajación* de cualquier variable es *el tiempo que tarda en llegar a valer* 1/e *de su valor inicial*. Podemos ahora ver que efectivamente, τ es el tiempo de relajación de la amplitud. El valor de ésta en el instante inicial es A, veamos qué valor debe tomar t para que A valga A/e, ese tiempo será el de relajación de la amplitud:

$$Ae^{-t/\tau} = Ae^{-1} \quad \text{de donde} \quad t/\tau = 1 \quad \text{y} \quad t = \tau$$

La oscilación está contenida entre las exponenciales:

$$x = \pm Ae^{-t/\tau}$$

Los ceros de la función están en los puntos:

$$\omega t + \varphi = n\pi, \quad \omega t = n\pi - \varphi = -\varphi, \pi - \varphi, 2\pi - \varphi, \ldots$$

Los máximos se encuentran en los puntos:

$$\omega t + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad \omega t = (2n + 1/2)\pi - \varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi, \frac{5\pi}{2} - \varphi, \ldots$$

Los mínimos estarán en los puntos:

$$\omega t + \varphi = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, \omega t = \left(2n + \frac{3}{2}\right)\pi - \varphi = \frac{3\pi}{2} - \varphi, \frac{7\pi}{2} - \varphi, \ldots$$

La ecuación de la oscilación se ha representado en la Figura 13.24.

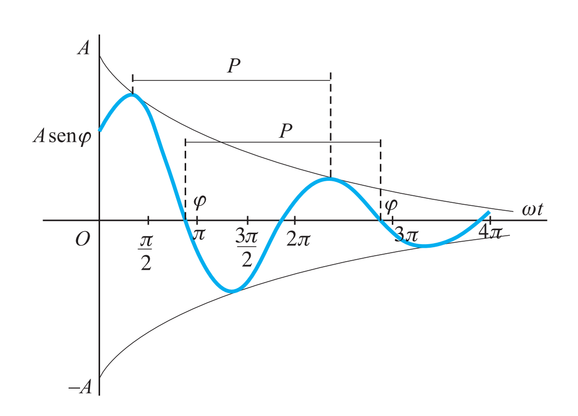


Figura 13.24.

Cálculo de las constantes de integración

Las constantes que aparecen en la ecuación del movimiento deben determinarse particularizando ésta para dos situaciones dadas. En general, suelen darse las condiciones iniciales del movimiento, es decir, la posición x_0 y la velocidad v_0, en el, instante $t = 0$. En este caso, las constantes se calculan así:

Para $t = 0$, la solución [13.32] da $x_0 = A \operatorname{sen} \varphi$ [1]

Derivando la solución respecto al tiempo, se obtiene:

$$\dot{x} = -aAe^{-at} \operatorname{sen}(bt + \varphi) + bAe^{-at} \cos(bt + \varphi)$$

que, particularizada para $t = 0$, es:

$$v_0 = -aA \operatorname{sen} \varphi + bA \cos \varphi$$

y, teniendo en cuenta la [1], se expresa:

$$v_0 = -ax_0 + bA \cos \varphi$$

de donde:

$$\frac{v_0 + ax_0}{b} = A \cos \varphi \qquad [2]$$

Dividiendo [1] entre [2], se obtiene φ:

$$\tan\varphi = \frac{bx_0}{ax_0 + v_0}$$

Elevando al cuadrado la [1] y la [2], y sumando, se obtiene A:

$$A^2 = x_0^2 + \frac{(ax_0 + v_0)^2}{b^2}$$

Factor de calidad

Se define el *factor de calidad Q* del sistema oscilante como *el semiproducto del tiempo de relajación de la amplitud por la pulsación de la oscilación libre no amortiguada:*

$$Q = \frac{1}{2}\tau\omega_0 \qquad [13.35]$$

que también puede expresarse de la forma:

$$Q = \frac{m}{c}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2}\frac{c_c}{c}$$

Por tanto, será siempre mayor que 1/2, puesto que c es inferior, en este caso, al coeficiente de amortiguamiento crítico.

La pulsación de la oscilación libre amortiguada puede expresarse en función del factor de calidad:

$$\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{\tau^2\omega_0^2}} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \qquad [13.36]$$

y los periodos estarán relacionados mediante la expresión:

$$P = P_0\frac{2Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

Decremento logarítmico

Se define el *decremento logarítmico*, d, de una oscilación amortiguada, como el *logaritmo neperiano del cociente de dos amplitudes separadas por un periodo:*

$$d = \ln\frac{A_n}{A_{n+1}} = \ln\frac{e^{-at_1}}{e^{-a(t_1+P)}} = aP = \frac{2\pi}{\tau\omega} \qquad [13.37]$$

El decremento logarítmico puede expresarse en función del factor de calidad del sistema:

$$d = \frac{2\pi}{\tau\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\tau^2\omega_0^2 - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \qquad [13.38]$$

un factor de calidad grande indica una disminución lenta en la amplitud de la oscilación, y viceversa.

Por otra parte, el coeficiente de amortiguamiento del sistema puede expresarse en función del decremento logarítmico, para ello elevemos al cuadrado la última expresión:

$$4Q^2 - 1 = \frac{4\pi^2}{d^2} \quad \text{o} \quad 2Q = \frac{\sqrt{4\pi^2 + d^2}}{d} = \omega_0 \tau$$

que puede escribirse, teniendo en cuenta la [13.35]:

$$\frac{\sqrt{4\pi^2 + d^2}}{d} = \frac{2m}{c}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\sqrt{km}}{c}$$

de donde:

$$c = 2d\sqrt{\frac{km}{4\pi^2 + d^2}} \qquad [13.39]$$

EJEMPLO 13.7

Se ha determinado experimentalmente el cociente entre la amplitud del pico duodécimo y el vigésimo, siendo este valor 54,6. Calculemos el decremento logarítmico y el factor de calidad del sistema.

Solución:

La razón de amplitudes es:

$$\frac{A_{12}}{A_{20}} = 54{,}6 = \frac{e^{-at_{12}}}{e^{-a(t_{12}+8P)}} = e^{8aP}$$

tomando logaritmos neperianos, $4 = 8aP$ y, con ello, el decremento logarítmico, según [13.37], es:

$$d = aP = 0{,}5$$

Conocido d, de la Expresión [13.38] podemos despejar el valor de Q:

$$Q = \sqrt{4\pi^2 + 0{,}25}$$

EJEMPLO 13.8

Una masa de 1 kg cuelga del extremo de un muelle ideal de constante elástica $k = 100\ N/m$. Determinemos:

1.º El valor de la pulsación de la oscilación libre no amortiguada.

2.º El factor de calidad del sistema, sabiendo que después de 30 ciclos la amplitud de la oscilación se ha reducido a $1/e$ del valor inicial.

3.º El coeficiente de amortiguamiento.

Solución:

1.º La pulsación de la oscilación libre sin amortiguar es:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{100} = 10 \text{ rad/s}$$

2.º La condición del enunciado es $A(30P) = Ae^{-1}$; utilizando la Expresión [13.33] escribimos:

$$Ae^{-30P/\tau} = Ae^{-1}$$

De donde:

$$30P/\tau = 1 \quad \text{o} \quad 60\pi/\tau\omega = 1 = \frac{60\pi}{\tau\sqrt{\omega_0^2 - \dfrac{1}{\tau^2}}} = \frac{60\pi}{\sqrt{\tau^2\omega_0^2 - 1}} = \frac{60\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

Que permite despejar:

$$Q = \frac{1}{2}\sqrt{3\,600\pi^2 + 1} = 94{,}25$$

3.º El factor de calidad se expresa:

$$Q = \frac{1}{2}\tau\omega_0 = \frac{m\omega_0}{c} = \frac{10}{c}$$

de donde:

$$c = \frac{10}{Q} = \frac{20}{\sqrt{3\,600\pi^2 + 1}} = 0{,}106 \text{ kg/s}$$

Caso 3.º *Amortiguamiento superior al crítico.*

Este caso se presenta cuando las dos raíces de la Ecuación característica [13.27] son reales, es decir:

$$\frac{1}{\tau} > \omega_0$$

o bien:

$$\frac{1}{2}\frac{c}{m} > \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{de donde:} \quad c > 2\sqrt{km} = c_c$$

es decir, el amortiguamiento es superior al crítico.

La solución general de la Ecuación [13.25] es ahora de la forma:

$$x = A_1 e^{z1t} + A_2 e^{z2t}$$

Puesto que z_1 y z_2 son reales, la solución es una exponencial real y el movimiento no es oscilante, la forma dependerá del valor de las constantes A_1 y A_2, que deben determinarse mediante dos condiciones particulares del movimiento. En cualquier caso, el movimiento acaba anulándose en el transcurso del tiempo (Figura 13.25).

Figura 13.25.

13.11 Oscilaciones forzadas con amortiguamiento

Un sistema oscilante se dice que está forzado cuando sobre él actúa constantemente una fuerza exterior periódica. Esta fuerza puede ser de diversos tipos, pero únicamente estudiaremos el caso muy importante en el cual la fuerza es senoidal:

$$F = F_0 \operatorname{sen} \Omega t$$

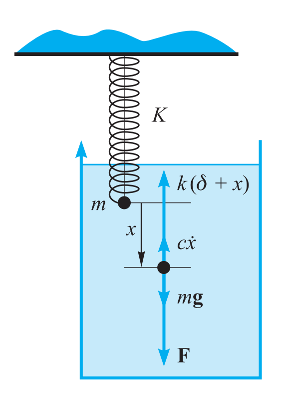


Figura 13.26.

Si, además, el sistema presenta amortiguamiento de tipo viscoso, existe una fuerza recuperadora elástica y, tomando como origen de espacios la posición de equilibrio estable, la ecuación del movimiento se escribe:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \operatorname{sen} \Omega t$$

o bien:

$$\ddot{x} + \frac{2}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \operatorname{sen} \Omega t \qquad [13.40]$$

que es una ecuación diferencial de segundo orden, de coeficientes constantes y completa y, aunque ha sido obtenida razonando dentro del campo de la Mecánica, su Expresión [13.40] es válida en cualquier campo de la Física, ya que los parámetros que aparecen en ella, tiempo de relajación y pulsación de la oscilación libre no amortiguada, son independientes de la magnitud que define la oscilación.

La solución general será la superposición de la solución general de la correspondiente ecuación homogénea y de una solución particular de la completa. La solución general de la homogénea ya ha sido calculada, es la Ecuación [13.32]. Busquemos ahora una solución particular de la completa y, para ello, ensayemos la solución:

$$x = X_0 e^{j(\Omega t + \phi)} = X_0 e^{j\phi} e^{j\Omega t} = \bar{X}_0 e^{j\Omega t}$$

Las derivadas primera y segunda de ella son:

$$\dot{x} = j\Omega \bar{X}_0 e^{j\Omega t} \quad \text{y} \quad \ddot{x} = -\Omega^2 \bar{X}_0 e^{j\Omega t}$$

Llevando a la ecuación diferencial de la oscilación los valores de x, $\dot{x}$ y $\ddot{x}$, resulta:

$$\left(-\Omega^2 + j\frac{2\Omega}{\tau} + \omega_0^2\right)\bar{X}_0 e^{j\Omega t} = \frac{F_0}{m} e^{j\Omega t}$$

de donde:

$$\bar{X}_0 = \frac{\dfrac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \Omega^2 + j\dfrac{2\Omega}{\tau}} = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \Omega^2 - j\dfrac{2\Omega}{\tau}}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \dfrac{4\Omega^2}{\tau^2}}$$

El complejo conjugado es:

$$\bar{X}_0^* = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \Omega^2 + j\dfrac{2\Omega}{\tau}}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \dfrac{4\Omega^2}{\tau^2}}$$

La amplitud de la solución particular es el módulo del complejo X_0, que se obtiene de la forma:

$$X_0 = (\bar{X}_0 \cdot \bar{X}_0^*)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \dfrac{4\Omega^2}{\tau^2}}} \qquad [13.41]$$

La fase inicial o defasaje de ésta respecto a la fuerza periódica exterior es:

$$\tan \varphi = -\frac{\dfrac{2\Omega}{\tau}}{\omega_0^2 - \Omega^2} \qquad [13.42]$$

Defasaje en régimen permanente

La solución particular de la completa es, por tanto:

$$x = X_0 \operatorname{sen}(\Omega t + \varphi) \qquad [13.43]$$

Solución en régimen permanente

estando X_0 y φ dados por las expresiones [13.41] y [13.42], respectivamente. En consecuencia, la solución general se expresa:

$$x = Ae^{-t/\tau} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}\, t + \alpha\right) + X_0 \operatorname{sen}(\Omega t + \varphi) \qquad [13.44]$$

Solución general

La solución de la homogénea desaparece con el tiempo, por lo que se denomina transitoria. En el movimiento acaba imponiéndose la solución particular de la completa, por lo cual se la denomina permanente. El sistema oscilante acaba vibrando con la misma frecuencia de la fuerza exterior excitadora. La solución general se ha representado en la Figura 13.27.

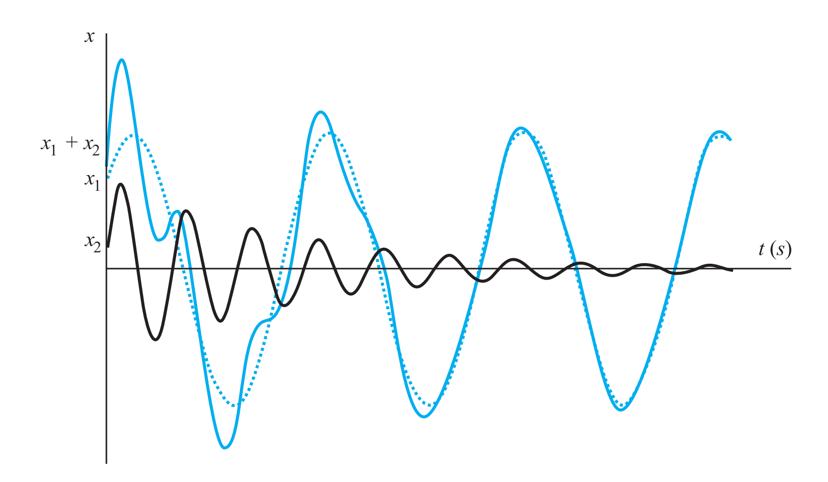


Figura 13.27.

En función del factor de calidad Q, es:

$$X_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\dfrac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \dfrac{1}{Q^2}\left(\dfrac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{A_0}{\sqrt{\left[1 - \left(\dfrac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \dfrac{1}{Q^2}\left(\dfrac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}} \qquad [13.45]$$

$$\tan \varphi = -\frac{\dfrac{1}{Q}\dfrac{\Omega}{\omega_0}}{1 - \left(\dfrac{\Omega}{\omega_0}\right)^2} \qquad [13.46]$$

siendo:

$$A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$$

Estudio de X_0/A_0 como función de Ω/ω_0

Vamos a estudiar la función X_0/A_0 tomando como variable Ω/ω_0, para los distintos valores del factor de calidad Q:

$$\frac{X_0}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \frac{1}{Q^2}\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}} \qquad [13.47]$$

que es una familia de curvas de parámetro Q y en la que es muy importante resaltar que la amplitud X_0 depende de Ω y que ha sido representada en la Figura 13.28.

El corte con el eje de ordenadas se obtiene haciendo $\Omega/\omega_0 = 0$, lo cual da $X_0/A_0 = 1$, por tanto, éste es un punto fijo independiente del valor de Q y pasarán por él todas las curvas de la familia.

El corte con el eje de abscisas se produce únicamente en el punto del infinito de su dirección positiva, pues cuando $\Omega/\omega_0 \to \infty$, también $X_0/A_0 \to 0$.

Los máximos y mínimos estarán en los puntos que verifiquen:

$$\frac{d\left(\frac{X_0}{A_0}\right)}{d\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)} = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{\Delta}}\left\{2\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]\left(-2\frac{\Omega}{\omega_0}\right) + \frac{2}{Q^2}\frac{\Omega}{\omega_0}\right\}}{\Delta} = 0$$

Evidentemente, $\Omega/\omega_0 = 0$ es uno de los puntos de máximo o mínimo, y el valor de este máximo o mínimo, según se ha visto, es la unidad. Los demás deben verificar:

$$2\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 - 2 + \frac{1}{Q^2} = 0$$

es decir:

$$\frac{\Omega_{\text{máx}}}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < 1 \qquad [13.48]$$

De esta ecuación se deducen tres consecuencias:

a) Los máximos sólo existirán si la Expresión [13.48] tiene valores reales, es decir, si es:

Posición de los máximos

$$Q \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) Los máximos se presentan siempre para valores de Ω/ω_0 menores que la unidad.

c) Al disminuir Q disminuye la abscisa del máximo. Al aumentar Q aumenta la abscisa del máximo, tendiendo a 1 al tender Q a infinito.

El valor del máximo se obtiene llevando a la [13.47] el valor de la [13.48], resultando:

Valor del máximo

$$\frac{X_{0\,\text{máx}}}{A_0} = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} > Q \qquad [13.49]$$

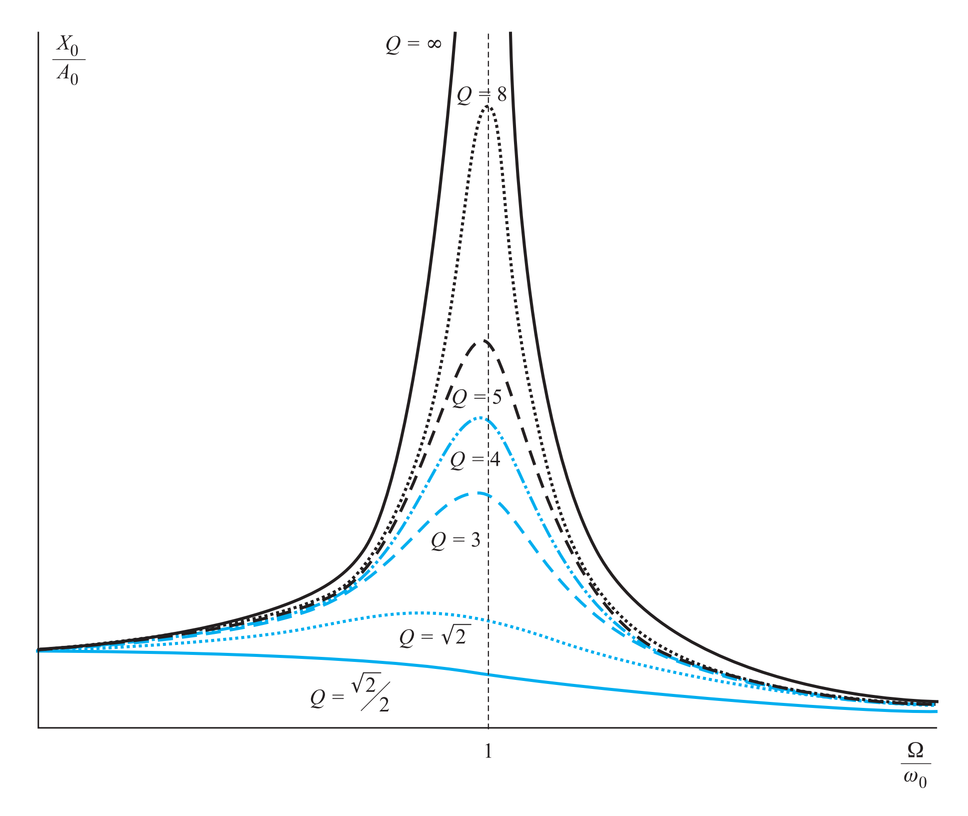


Figura 13.28.

Eliminando Q entre las ecuaciones [13.48] y [13.49], se obtiene la función:

$$\left(\frac{X_0}{A_0}\right)_{\text{máx}} = f\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)_{\text{máx}}$$

sobre la cual están situados todos los máximos, función que ha sido representada por trazos discontinuos en la Figura 13.28. Su ecuación se obtiene elevando al cuadrado la [13.48], despejando de ella Q^2:

$$Q^2 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 - \left(\dfrac{\Omega}{\omega_0}\right)^2_{\text{máx}}}$$

y llevando ese valor a la [13.49] previamente elevada al cuadrado, obteniéndose:

$$\left(\frac{X_0}{A_0}\right)^2_{\text{máx}} = \frac{1}{1 - \left(\dfrac{\Omega}{\omega_0}\right)^4_{\text{máx}}} \qquad [13.50]$$

Conociendo el factor de calidad del sistema, podemos representar su respuesta en función de la frecuencia de la fuerza excitadora, pues conocemos cuatro puntos de la curva, que son:

$$(0,\ 1) \quad ; \quad (1,\ Q) \quad ; \quad (\infty,\ 0) \quad \text{y} \quad \left(\frac{\Omega_{\text{máx}}}{\omega_0},\ \frac{X_{0\,\text{máx}}}{A_0}\right)$$

lo cual ha sido realizado en la Figura 13.29.

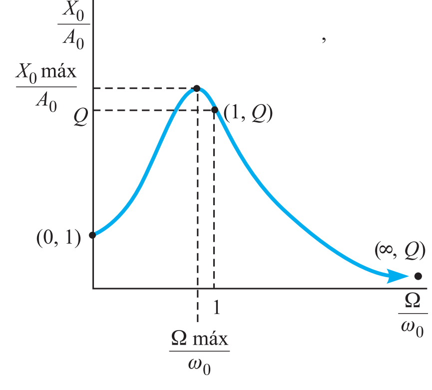


Figura 13.29.

Resonancia

Cuando $\Omega/\omega_0 \to 1$, $X_0/A_0 \to Q$, y si Q es grande, también lo será X_0, situación que se conoce con el nombre de *resonancia*. Hay que hacer notar que el fenómeno de la resonancia del sistema exige como condición necesaria que sea $\Omega \cong \omega_0$, pero ello no es condición suficiente, pues hace falta, además, que Q sea muy grande. Puesto que es:

$$X_0 = QA_0 = \frac{F_0}{k}\sqrt{\frac{km}{c}} = \frac{F_o}{c}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

la amplitud X_0 puede llegar a ser lo suficientemente grande para que el sistema se deteriore, siempre que sea:

$$c << \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{1}{\omega_0}$$

Altura de pico en la zona de resonancia

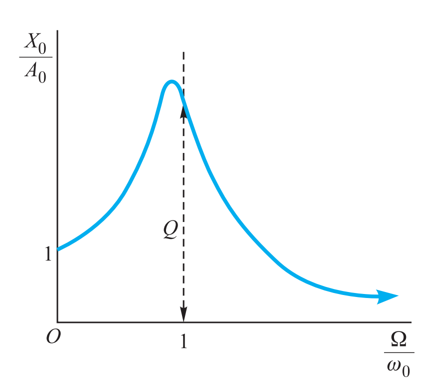
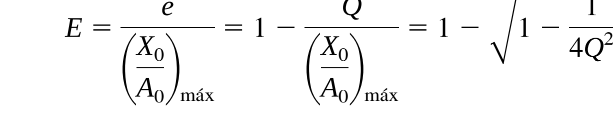


Figura 13.30.

La altura del pico o máxima respuesta está dada por la Ecuación [13.49]. Por otra parte, para $\Omega/\omega_0 = 1$, resulta $X_0/A_0 = Q$ (Figura 13.30). Si tomamos el factor de calidad como valor del máximo, cometemos el error absoluto:

$$e = \left(\frac{X_0}{A_0}\right)_{\text{máx}} - Q$$

y el error relativo:



$$E = \frac{e}{\left(\frac{X_0}{A_0}\right)_{\text{máx}}} = 1 - \frac{Q}{\left(\frac{X_0}{A_0}\right)_{\text{máx}}} = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Por tanto, cuanto mayor sea Q menor será el error cometido al tomar a Q como valor del máximo y, cuando Q tiende a infinito, el error tiende a cero. Es decir, el factor de calidad mide la altura del pico con mayor precisión cuanto mayor sea él.

Ancho de banda

Para medir el ancho de banda del pico en la zona de resonancia, se conviene en cortar la curva de respuesta del sistema, $X_0 = X_0(\Omega)$, por la recta:

$$X_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} X_0(\Omega = \omega_0) = A_0 \frac{Q}{\sqrt{2}}$$

Los valores de Ω correspondientes a los puntos de corte son los que verifican:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} A_0 Q = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \frac{4\Omega^2}{\tau^2}}}$$

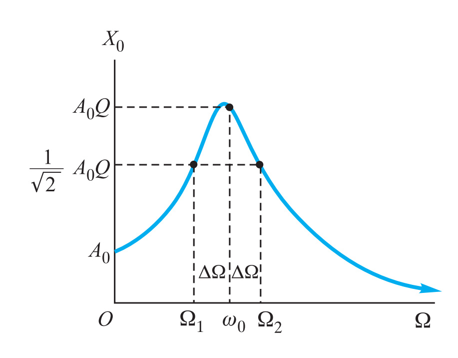


Figura 13.31.

Admitiendo que las soluciones son de la forma $\Omega_{1,2} = \omega_0 \pm \Delta\Omega$ (Figura 13.31), realizaremos las siguientes simplificaciones:

$$\omega_0^2 - \Omega_0^2 = (\omega_0 + \Omega)(\omega_0 - \Omega) = (2\omega_0 + \Delta\Omega)\Delta\Omega \cong 2\omega_0\Delta\Omega$$

y

$$\frac{4\Omega^2}{\tau^2} = \frac{\omega_0^2}{Q^2}(\omega_0 \pm \Delta\Omega)^2 \cong \frac{\omega_0^4}{Q^2}$$

Con todo ello, resulta:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} A_0 Q = \frac{\dfrac{F_0}{m}}{\sqrt{4\omega_0^2 \Delta\Omega^2 + 4\dfrac{\omega_0^2}{\tau^2}}} = \frac{F_0}{m\omega_0} \frac{1}{\sqrt{4\Delta\Omega^2 + \dfrac{4}{\tau^2}}} = \frac{A_0\omega_0}{\sqrt{4\Delta\Omega^2 + \dfrac{\omega_0^2}{Q^2}}}$$

o

$$\sqrt{4\Delta\Omega^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2}} = \frac{\omega_0\sqrt{2}}{Q}$$

de donde:

$$2\Delta\Omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{2}{\tau} = \frac{c}{m}$$

Ancho de banda

siendo $2\Delta\Omega$ el ancho de banda del pico en la zona de resonancia. La banda de frecuencias de respuesta es:

$$\omega_0 = \left(1 - \frac{1}{2Q}\right) < \Omega < \omega_0\left(1 + \frac{1}{2Q}\right)$$

en consecuencia, el ancho de banda disminuye al aumentar el valor del factor de calidad del sistema. El valor de éste nos indica la agudeza del pico de respuesta, pues además de disminuir su anchura, también al aumentar Q aumenta el valor de la altura del pico, según se ha expresado en la Ecuación [13.49].

Estudio del defasaje en función de Ω/ω_0

En la Ecuación [13.46] se observa que, para $\Omega/\omega_0 = 0$, $\tan\phi = 0$ y, por tanto, $\phi = 0$, para cualquier valor de Q. Asimismo, para $\Omega/\omega_0 = 1$, la tangente se hace infinita y $\phi = \pi/2$, para todo valor de Q. Cuando:

$$\frac{\Omega}{\omega_0} \to \infty \quad \tan\phi \to 0 \quad \text{y} \quad \phi \to \pi$$

Las curvas $\phi(\Omega/\omega_0)$, para los distintos valores de Q, se han representado en la Figura 13.32, debiéndose hacer notar que los valores representados son los de retraso de la vibración forzada respecto de la fuerza excitadora.

Potencia absorbida

La potencia instantánea absorbida por un sistema oscilante amortiguado, sometido a una excitación exterior, es el producto de la fuerza excitadora por la velocidad. En nuestro caso: $F = F_0 \operatorname{sen} \Omega t$ y $v = X_0\Omega \cos(\Omega t + \phi)$, la potencia instantánea absorbida se expresa:

$$P = Fv = F_0 X_0 \Omega \operatorname{sen} \Omega t \cos(\Omega t + \phi) = \frac{1}{2} \mathrm{F}_0 \mathrm{X}_0 \Omega[\operatorname{sen}(2\Omega t + \phi) - \operatorname{sen}\phi]$$

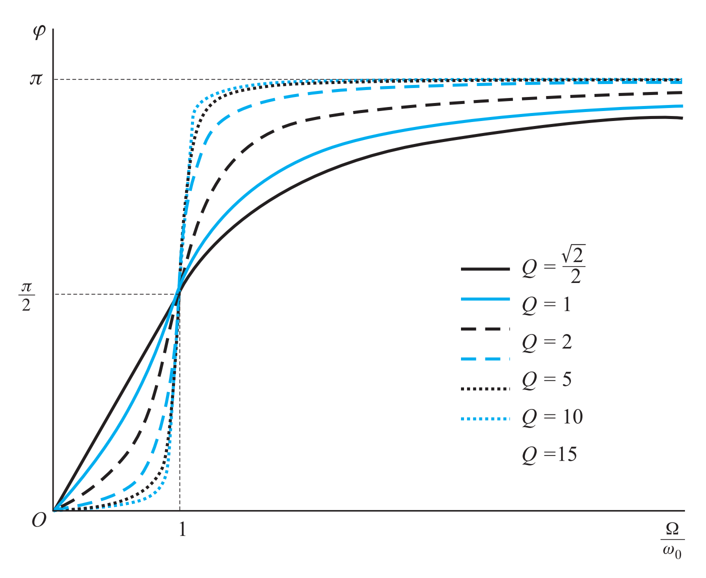


Figura 13.32.

El cálculo de la potencia media absorbida a lo largo de un periodo se hace de la forma siguiente:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P\,dt = \frac{1}{2}F_0 X_0 \Omega \left[\frac{\cos(2\Omega t + \phi)}{2\Omega} - t\,\mathrm{sen}\,\phi\right]_0^T = -\frac{1}{2}F_0 X_0 \Omega\,\mathrm{sen}\,\phi$$

El signo menos aparece por ser potencia consumida.

Sustituyendo X_0 por el valor dado por la [13.45] y poniendo sen ϕ en función de la tangente, cuyo valor está dado por la [13.46], resulta:

$$\langle P \rangle = \frac{F_0^2\omega_0}{2kQ}\cdot\frac{\left(\dfrac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}{\left[1-\left(\dfrac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \dfrac{1}{Q^2}\left(\dfrac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}$$

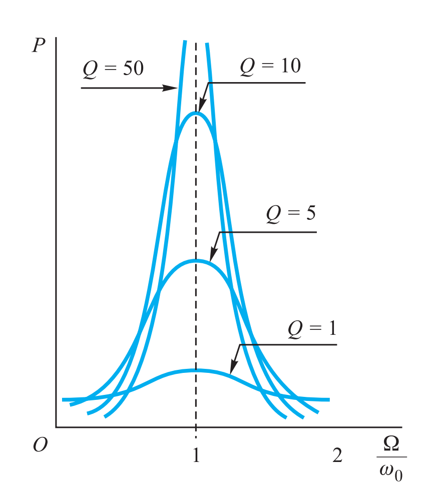


Figura 13.33.

En la Figura 13.33 se ha representado la potencia media absorbida en un periodo en función de Ω/ω_0, para diferentes valores de Q.

EJEMPLO 13.9 Sismógrafo

Un sismógrafo ha sido esquematizado en la Figura 13.34, su masa deslizante es m, la constante elástica del muelle es k y presenta un amortiguamiento viscoso de coeficiente c. Si la estructura se somete a una oscilación armónica $y = y_0\,\mathrm{sen}\,\Omega t$ respecto de un sistema de referencia inercial, veamos cuál es la ecuación del movimiento de la masa m del sismógrafo, respecto a un sistema de referencia ligado a éste.

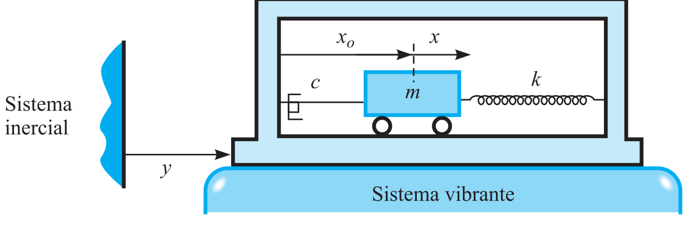


Figura 13.34.

Solución:

Si a partir de la posición de equilibrio, en la cual se supone al muelle en su estado natural, la masa sufre un desplazamiento x, las fuerzas que actúan sobre ésta son $-kx$ y $-c\dot{x}$. Por tanto, la ecuación del movimiento es:

$$m \frac{d^2}{dt^2}(y + x_0 + x) = -kx - c\dot{x}$$

o bien:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{y} = +m\,y_0\,\Omega^2 \operatorname{sen} \Omega t$$

$$\ddot{x} + \frac{2}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = y_0\,\Omega^2 \operatorname{sen} \Omega t$$

ecuación completamente análoga a la [13.40], siendo:

$$y_0\Omega^2 = \frac{F_0}{m}$$

La solución permanente será:

$$x = X_0 \operatorname{sen}(\Omega t + \varphi)$$

en la que:

$$X_0 = \frac{y_0\Omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \dfrac{4\Omega^2}{\tau^2}}} \quad \text{y} \quad \tan\varphi = \frac{-\dfrac{2\Omega}{\tau}}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Analicemos tres casos particularmente importantes:

1.º Si es Ω muy pequeño frente a ω_0, la amplitud de la vibración es:

$$X_0 \simeq \frac{y_0\Omega^2}{\omega_0^2}$$

y el defasaje:

$$\tan\varphi \simeq 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi \simeq 0$$

El desplazamiento será:

$$x \simeq \frac{y_0\Omega^2}{\omega_0^2} \operatorname{sen} \Omega t$$

Puesto que la aceleración de la fuerza excitadora es $\ddot{y} = y_0\Omega^2 \operatorname{sen} \Omega t$, resulta que el desplazamiento es proporcional a la aceleración sufrida y el instrumento puede emplearse como acelerómetro.

2.º Si es $\Omega \cong \omega_0$, la amplitud de la oscilación es:

$$X_0 = \frac{1}{2}\,y_0\,\Omega\,\tau$$

y el defasaje:

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

La solución de la vibración resulta

$$x = -\frac{1}{2} y_0 \Omega \tau \cos \Omega t$$

Puesto que la velocidad del desplazamiento del soporte es:

$$\dot{y} = y_0 \Omega \cos \Omega t$$

resulta:

$$x = -y\tau = -\frac{m}{c}\dot{y}$$

El desplazamiento relativo de la masa es proporcional a la velocidad y el instrumento es un medidor de velocidades.

3.º Si es $\omega_0 << \Omega$, la amplitud de la vibración es:

$$X_0 \simeq y_0$$

y el defasaje $\varphi = 0$.

El desplazamiento es:

$$x \simeq y_0 \operatorname{sen} \Omega t \simeq y$$

proporcional al desplazamiento de la estructura y el instrumento es un medidor de desplazamientos.

Elasticidad

CAPÍTULO 14

14.1 Cuerpos elásticos e inelásticos. Límite de elasticidad

El sólido rígido que hemos venido considerando no tiene existencia real. Todo sólido sobre el cual actúen fuerzas exteriores sufre una deformación, que depende de la naturaleza del sólido y de las fuerzas que sobre él actúen.

En un sólido no deformado su estructura molecular y atómica está en equilibrio, siendo constante el potencial de las fuerzas interatómicas por serlo la distancia que separa los diferentes átomos. Si sobre el sólido actúan fuerzas exteriores produciendo en él una deformación, variará la distancia interatómica y, con ello, el potencial interno, dando nacimiento a fuerzas internas que denominaremos *fuerzas elásticas* y que se oponen a la deformación, llegando a una nueva posición de equilibrio.

Si al suprimir las fuerzas exteriores el sólido deformado recobra su forma primitiva se dice que se ha comportado como *elástico*, pero si en él quedan deformaciones permanentes o residuales, se dice que se ha comportado como *inelástico* o *plástico*. No podemos hablar de cuerpos sino de comportamientos elásticos o plásticos, ya que la elasticidad no es propiedad intrínseca del cuerpo, pues depende de las fuerzas que sobre él actúan. Lo que sí es importantísimo indicar para cada cuerpo es su *límite elástico*, es decir, el valor máximo de las fuerzas exteriores que puede soportar comportándose como elástico y sobrepasado el cual se producen en el cuerpo deformaciones permanentes.

Límite elástico

Una de las hipótesis de la teoría de la elasticidad establece que una parte cualquiera del sólido ejerce acciones, únicamente, sobre las partes contiguas a través de las superficies de separación. Esta hipótesis deja de ser válida cuando la deformación produce campos eléctricos o magnéticos macroscópicos, como sucede en los cuerpos piezo-eléctricos y magneto-elásticos.

14.2 Tipos de esfuerzo en el interior de un sólido

Consideremos un sólido *A* que está deformado y en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas exteriores. Fragmentemos idealmente este sólido mediante una

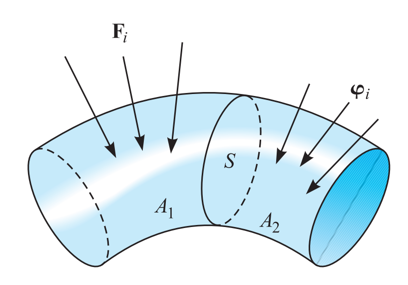


Figura 14.1.

superficie S (Figura 14.1). Ambos fragmentos seguirán en equilibrio si en cada uno de ellos consideramos, además de las fuerzas exteriores que sobre él actúan, las tensiones que a través de la superficie S ejercía el otro sobre él, todas las cuales son las causantes de las deformaciones. En consecuencia, el sistema de tensiones y el de fuerzas están en equilibrio, ya que aquél produce las deformaciones a las que éste se opone.

Consideremos el fragmento A_1, que está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas exteriores $\mathbf{F}_i$ y de las tensiones $\mathbf{f}_i$ (Figura 14.2), verificándose las condiciones de la Estática:

$$\sum_i \mathbf{F}_i + \sum_i \mathbf{f}_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_i \mathbf{M}_0(\mathbf{F}_i) + \sum_i \mathbf{M}_0(\mathbf{f}_i) = 0$$

o bien:

$$\mathbf{R} + \mathbf{r} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{M}_0 + \mathbf{m}_0 = 0$$

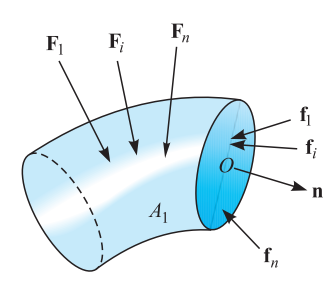


Figura 14.2.

siendo $\mathbf{R}$ y $\mathbf{M}_0$ la resultante y el momento resultante, en el centro O de la sección, de las fuerzas exteriores situadas a la izquierda de esa sección, y $\mathbf{r}$ y $\mathbf{m}_0$ la resultante y el momento resultante en O de las tensiones en la sección. Por tanto, se cumple que *la resultante de las tensiones en una sección es igual y opuesta a la resultante de las fuerzas exteriores situadas a la izquierda de esa sección*:

$$\mathbf{r} = -\mathbf{R} \qquad [14.1]$$

y *el momento resultante en O de las tensiones que actúan en la sección, es igual y opuesto al momento resultante de las fuerzas exteriores situadas a la izquierda de la sección respecto al mismo punto*:

$$\mathbf{m}_0 = -\mathbf{M}_0 \qquad [14.2]$$

En consecuencia, conocido el sistema de fuerzas exteriores, queda determinado el sistema de tensiones en cada sección.

En función de las características de éste, se definen los diferentes tipos de esfuerzo, pudiendo presentarse los siguientes casos:

$$r \neq 0,\ m = 0 \begin{cases} r_n \neq 0,\ r_s = 0 \begin{cases} r_n = kn & \text{TRACCIÓN} \\ r_n = -kn & \text{COMPRESIÓN} \end{cases} \\ r_n = 0,\ r_s \neq 0 \quad \text{ESFUERZO CORTANTE O CIZALLADURA} \\ r_n \neq 0,\ r_s \neq 0 \quad \text{CASO COMPUESTO DE LOS ANTERIORES} \end{cases}$$

$$r = 0,\ m \neq 0 \begin{cases} m_n = 0,\ m_s \neq 0 & \text{FLEXIÓN} \\ m_n \neq 0,\ m_s = 0 & \text{TORSIÓN} \\ m_n \neq 0,\ m_s \neq 0 & \text{CASO COMPUESTO DE LOS ANTERIORES} \end{cases}$$

$r \neq 0,\ m \neq 0$ ESFUERZOS COMPUESTOS DE LOS ANTERIORES

$r = 0,\ m = 0$ NO HAY ESFUERZOS INTERNOS. EL SISTEMA DE FUERZAS EXTERIORES ES NULO. NO HAY DEFORMACIÓN

Si llamamos $\mathbf{R}'$ y $\mathbf{M}'$ a la resultante y al momento resultante en O de las fuerzas exteriores a la derecha de la sección considerada, el equilibrio del sólido A da:

$$\mathbf{R} + \mathbf{R}' = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}'_0 = 0$$

y, por tanto [14.1] y [14.2] pueden escribirse respectivamente:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}' \quad \text{y} \quad \mathbf{m}_0 = \mathbf{M}'_0$$

que nos dicen que *la resultante de las tensiones en la sección S es igual a la resultante de las fuerzas exteriores que actúan a la derecha de esa sección*, y que *el momento resultante en O de las tensiones en esa sección es igual al momento resultante en O de las fuerzas exteriores situadas a la derecha de la sección.*

14.3 Tracción

Consideremos una varilla delgada de sección S, homogénea y de longitud l. Si fijamos uno de sus extremos y, en el otro, hacemos actuar una fuerza de dirección el eje de la varilla y sentido indicado en la Figura 14.3, cualquier sección de la misma normal a su eje estará sometida a tracción. En efecto, fragmentando la varilla por una sección normal a su eje longitudinal y teniendo en cuenta el equilibrio de la parte en la que actúa la fuerza exterior **F,** resulta ser:

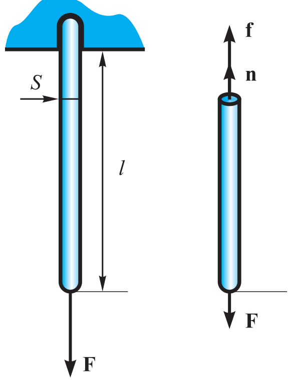


Figura 14.3.

$$\mathbf{f} = -\mathbf{F} = -F\mathbf{n}$$

En este caso, la deformación que la fuerza **F** produce en la varilla es un alargamiento de la misma y, dentro de su límite elástico, se verificará la ley de Hooke:

$$\Delta l = kF$$

Se comprueba experimentalmente que este alargamiento es también directamente proporcional a la longitud inicial de la varilla e inversamente proporcional a su sección, pudiendo escribirse:

$$\Delta l = k' \frac{F \cdot l}{S}$$

Asimismo, utilizando diferentes materiales se comprueba que la constante k' es característica para cada material, denominándose a su inversa *módulo de elasticidad* o *módulo de Young* del material considerado, resultando:

Módulo de elasticidad

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot S} \qquad [14.3]$$

Por tanto, el módulo de elasticidad es la fuerza por unidad de sección que hay que aplicar a la varilla en la dirección y sentido indicados, para producir en ella un alargamiento igual a la longitud inicial de la misma. En el sistema internacional de uniades se expresa en N/m^2.

La Ecuación [14.3] se expresa, generalmente, de la forma:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E}\frac{F}{S}$$

siendo $\Delta l/l = e$ *el alargamiento unitario* o específico y $F/S = \sigma$, *la tensión* a que está sometida la acción S, escribiéndose:

Alargamiento unitario
Tensión.

$$\sigma = E \cdot e \qquad [14.4]$$

Esta relación es válida dentro de la zona de comportamiento elástico del material, cuyo límite superior σ_e es el *límite elástico* y sobrepasado el cual los

Límite elástico

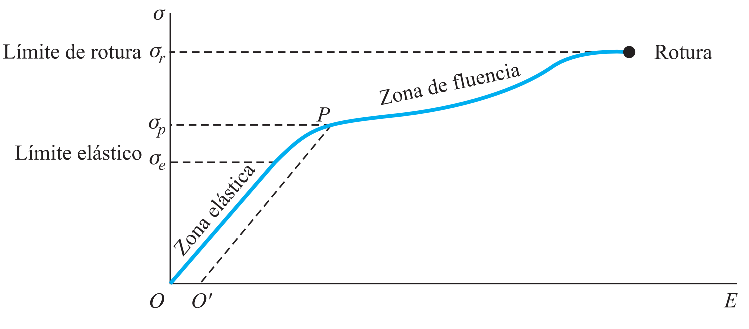


Figura 14.4.

alargamientos aumentan más de lo establecido por [14.4]. Existe una zona denominada de fluencia en la cual, para pequeños aumentos de la tensión, hay unos alargamientos tan desproporcionados que da la sensación de que el material fuera a romperse, lo que así sucede en muchos materiales, pero no en otros, como los aceros, en los cuales aparece una reactivación o recuperación, y vuelven a soportar aumento de tensión sin grandes alargamientos. Si aumentando la tensión llegamos al valor σ_r, denominado *límite de rotura*, el acero se romperá indefectiblemente, pero antes de hacerlo se seguirá estirando aun cuando hayamos suprimido toda acción sobre él. La rotura se produce siempre que se rebase el límite de rotura, pero no en el instante de rebasarlo.

Límite de rotura

Toda tensión σ comprendida entre el límite elástico y el de rotura del material producirá en éste deformaciones permanentes, es decir, al suprimir la tensión, el material se recupera siguiendo la línea PO' y no la PO, resultando el alargamiento permanente OO'.

Si una tensión inferior al límite elástico actúa durante un tiempo muy grande, no produce deformación permanente, pero sí da lugar al fenómeno llamado *histeresis elástica*, que consiste en que el material no recupera inmediatamente su forma, sino al cabo de un cierto tiempo.

Fenómenos análogos a los descritos suceden cuando la fuerza **F** tiene sentido contrario al indicado en la Figura 14.3; en este caso, la varilla estará sometida a compresión y las deformaciones serán acortamientos. El módulo de elasticidad para la tracción y para la compresión coincide en muchos materiales, pero en otros no. En la Tabla 14.1 se indican los valores del módulo de elasticidad y de las tensiones de rotura a tracción y a compresión para algunos materiales.

Tabla 14.1. Módulo de elasticidad y tensiones de rotura

Material	**Módulo E (N/m^2) · 10^9**	**Tensión de rotura σ_r (N/m^2) · 10^6**	
		A tracción	**A compresión**
Diamante	1 150		
Acero	210	500-1 500	500-1 500
Hierro	100	60-250	500
Aluminio	75	100	100
Vidrio	60	30-150	—
Granito	50	—	170
Hormigón	15-30	2	20
Madera (pino)	10	40	35
Tungsteno	390		
Cobre	110		
Bronce	90		
Plomo	15		

EJEMPLO 14.1

Una varilla de acero, de longitud 1,2 m y sección de 150 cm^2, está en posición vertical fija, por uno de sus extremos al techo y lleva colgado del otro una masa de 2 100 kg. Tomando como módulo de elasticidad del acero $E = 2 \times 10^{11}$ N/m^2, calculemos:

1.º La tensión en la sección transversal de la varilla.

2.º El alargamiento que sufre la varilla.

Solución:

1.º La tensión en la sección es $\sigma = F/S = 2\,100 \times 9{,}8/150 = 137{,}2$ N/cm^2.

2.º El alargamiento unitario es $e = \sigma/E = 137{,}2 \times 10^6/2 \times 10^{11} = 6{,}86 \times 10^{-4}$ m. El alargamiento total es $\Delta l = e \cdot l = 6{,}86 \times 10^{-4} \times 1{,}2 = 8{,}232 \times 10^{-4}$ m $= 0{,}823$ mm.

14.4 Contracción lateral. Coeficiente de Poisson

Se comprende intuitivamente, y puede comprobarse experimentalmente, que al mismo tiempo que la varilla se alarga se estrecha. Una dimensión trasversal cualquiera, por ejemplo, el diámetro d si la varilla es cilíndrica, sufrirá un estrechamiento Δd; defínese el *coeficiente de Poisson* η como la relación entre el estrechamiento unitario y el alargamiento unitario:

$$\eta = -\frac{\dfrac{\Delta d}{d}}{\dfrac{\Delta l}{l}} \qquad [14.5]$$

siendo, por tanto, un coeficiente adimensional.

Teniendo en cuenta que la razón entre las áreas de dos superficies semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza, es:

$$\frac{S'}{S} = \frac{d'^2}{d^2} = \frac{(d + \Delta d)^2}{d^2} = \left(1 + \frac{\Delta d}{d}\right)^2 \cong 1 + \frac{\Delta d}{d}$$

y de aquí que sea:

$$\frac{\Delta S}{S} = 2\frac{\Delta d}{d} = -2\eta\frac{\Delta l}{l}$$

El volumen antes de la deformación es $V = S \cdot l$ y después de la misma:

$$V' = S' \cdot l' = (S + \Delta S)(l + dl) \cong Sl + l\Delta S + S\Delta l$$

y la variación de volumen:

$$\Delta V = V' - V = l\Delta S + S\Delta l$$

pudiendo escribirse:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta l}{l} - 2\eta\frac{\Delta l}{l} = (1 - 2\eta)\frac{\Delta l}{l} \qquad [14.6]$$

Determinando experimentalmente las variaciones unitarias de volumen y longitud, puede determinarse el coeficiente de Poisson. Los valores hallados para éste tienen siempre valores inferiores a 0,5, lo que nos indica que el volumen aumenta con la tracción pues, en [14.6], ΔV será positivo siempre que sea $\eta < 0{,}5$.

14.5 Compresión uniforme. Coeficiente de compresibilidad

Supongamos un cuerpo sometido a una presión uniformemente distribuida sobre su superficie, lo que puede lograrse sumergiendo el cuerpo en un líquido, pues, según veremos en hidrostática, la acción del líquido es una presión normal al elemento de superficie sobre el que actúa; a su valor, aunque depende de la profundidad, lo supondremos constante para cuerpos de pequeñas dimensiones. El cuerpo, debido a esta presión uniforme, disminuirá su volumen conservando su forma. La variación unitaria de volumen por unidad de variación de presión se denomina *coeficiente de compresibilidad*:

$$\lambda = -\frac{\dfrac{\Delta V}{V}}{\Delta p} \qquad [14.7]$$

el signo negativo es debido a que un aumento de presión lleva siempre consigo una disminución de volumen. La inversa del coeficiente de compresibilidad se llama *módulo de compresibilidad*:

$$\kappa = \frac{1}{\lambda} = -\frac{\Delta p}{\dfrac{\Delta V}{V}} \qquad [14.8]$$

sus unidades son las de la presión y, en el *SI*, se expresa en *Pa*.

Supongamos que el cuerpo sumergido es un cubo homogéneo de arista l, las fuerzas ejercidas por el líquido sobre cada par de caras opuestas produce una variación unitaria de volumen dada por [16.6]; como en el cubo hay tres pares de caras opuestas, la variación unitaria total de volumen será el triple, es decir:

$$\frac{\Delta V}{V} = 3(1 - 2\eta)\,\frac{\Delta l}{l}$$

Teniendo en cuenta [14.3]:

$$\frac{\Delta V}{V} = -3(1 - 2\eta)\,\frac{F}{ES} = -3(1 - 2\eta)\,\frac{\Delta p}{E}$$

El signo menos se debe a que ahora Δl es un acortamiento. Finalmente, teniendo en cuenta la [14.8], se escribe:

$$\kappa = \frac{E}{3(1 - 2\eta)} \qquad [14.9]$$

expresión que relaciona el módulo de elasticidad con el módulo de compresibilidad y el coeficiente de Poisson.

14.6 Flexión plana

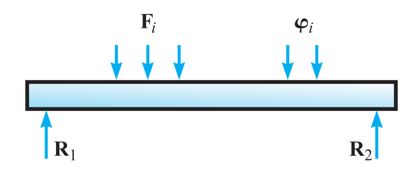


Figura 14.5.

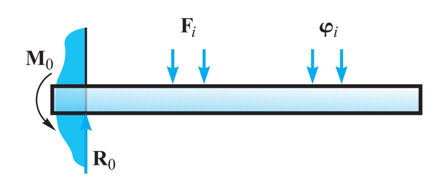


Figura 14.6.

Consideremos una viga con plano de simetría longitudinal, sometida a cargas normales a su eje y contenidas en el plano de simetría. Para fijar ideas, supongamos, una viga prismática regular situada horizontalmente sobre dos apoyos y sometida a cargas verticales contenidas en el plano vertical de simetría de la viga.

Podemos considerar la viga como libre, teniendo en cuenta, además de las fuerzas exteriores que sobre ella actúan, las reacciones en los puntos de apoyo. Las dos condiciones de equilibrio nos permiten determinar estas reacciones, diciéndose que el problema es estáticamente determinado o isostático. Los únicos casos isostáticos posibles son los doblemente apoyados (Figura 14.5), y los empotrados por un extremo y libres por el otro, al que se denomina viga en voladizo o ménsula (Figura 14.6), siendo en este caso las incógnitas la reacción en el empotramiento $\mathbf{R}_0$ y el momento de empotramiento $\mathbf{M}_0$.

Las vigas bajo la acción de las fuerzas exteriores se deforman según se indica en las Figura 14.7. Suponiendo que las vigas están formadas por fibras paralelas a su eje de simetría longitudinal, en el caso de las vigas doblemente apoyadas, las fibras situadas por encima de él se acortan, están sometidas a compresión, y las situadas por debajo se alargan, están sometidas a tracción; en el caso de la viga empotrada y en voladizo sucede lo contrario, las fibras superiores se alargan, están sometidas a tracción, y las inferiores se acortan, están sometidas a compresión. En todo caso, siempre existe una fibra cuya longitud no varía, denominándose a ésta *fibra neutra*. Los alargamientos o acortamientos aumentan a medida que la fibra está más distante de la fibra neutra.

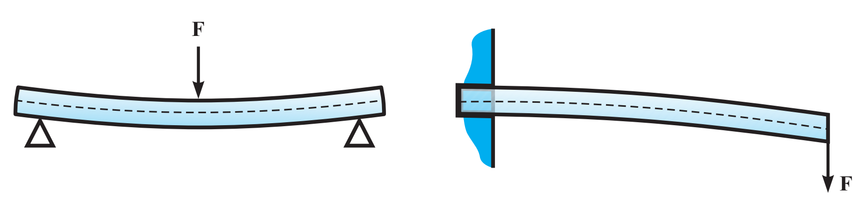


Figura 14.7.

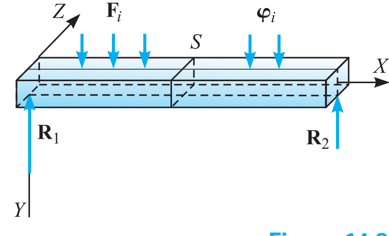


Figura 14.8.

Analicemos el estado de tensiones que aparecen por acción de las fuerzas exteriores. Consideremos, en primer lugar, la viga doblemente apoyada y sea S una sección normal al eje de la viga. Aislemos el fragmento de la viga situado a la izquierda de esta sección y hallemos el momento de las fuerzas exteriores respecto al centro de la sección S:

$$\mathbf{M} = \left[\sum (x_i - x)F_i + xR_i\right]\mathbf{k} \qquad [14.10]$$

Este momento está contenido en la sección y, por tanto, la viga está sometida a flexión, siendo el momento de las tensiones o momento flector $\mathbf{m} = -\mathbf{M}$. La resultante de las tensiones de la sección S es:

$$\mathbf{r} = -\mathbf{R} = \left(R_1 - \sum F_i\right)\mathbf{j} \qquad [14.11]$$

por tanto, la sección está sometida a esfuerzo cortante.

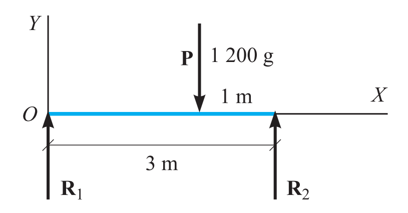


Figura 14.9.

EJEMPLO 14.2 Viga apoyada en sus extremos con carga puntual

Una viga uniforme de peso despreciable y longitud 3 m, está apoyada en sus dos extremos sobre columnas metálicas. La viga va cargada con un peso de 1 200 kg, situado como se indica en la Figura 14.9. Calculemos:

1.º Las reacciones en los apoyos.

2.º El esfuerzo cortante y el momento flector en cada una de las secciones de la viga.

3.º La representación de los resultados anteriores.

Solución:

1.º Las condiciones de la Estática son:

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad , \quad \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{P} = 0 \quad , \quad R_1 + R_2 = 1\,200 \times 9{,}8 = 11\,760 \text{ N}$$

$$\text{y} \quad \sum \mathbf{M} = 0 \quad , \quad \mathbf{M}_0 = 2\mathbf{i} \times (-11\,760\,\mathbf{j}) + 3\mathbf{i} \times R_2\,\mathbf{j} = 0$$

de donde:

$$R_2 = 7\,840 \text{ N} \quad \text{o} \quad \mathbf{R}_2 = 7\,840\,\mathbf{j}$$

y, de la primera, se obtiene $\mathbf{R}_1 = 3\,920\,\mathbf{j}$.

2.º Consideremos la sección de abscisa x, y sean $\mathbf{r}$ y $\mathbf{m}_0$ la resultante y el momento resultante, respectivamente, de las tensiones en ella. De acuerdo con [14.1] y [14.2], es:

Para $x < 2$:

$$\mathbf{r} = -\mathbf{R}_1 = -3\,920\,\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{m}_0 = -(-x\,\mathbf{i} \times R_1\,\mathbf{j}) = 3\,920\,x\,\mathbf{k}$$

Para $x > 2$:

$$\mathbf{r} = -3\,920\,\mathbf{j} + 11\,760\,\mathbf{j} = 7\,840\,\mathbf{j}$$

y

$$\mathbf{m}_0 = x\,R_1\,\mathbf{k} - [-(x-2)\mathbf{i} \times (-11\,760\,\mathbf{j})] = (23\,520 - 7\,840\,x)\mathbf{k}$$

3.º En la Figura 14.10 se ha representado los esfuerzos cortantes y los momentos flectores para cada sección de la viga.

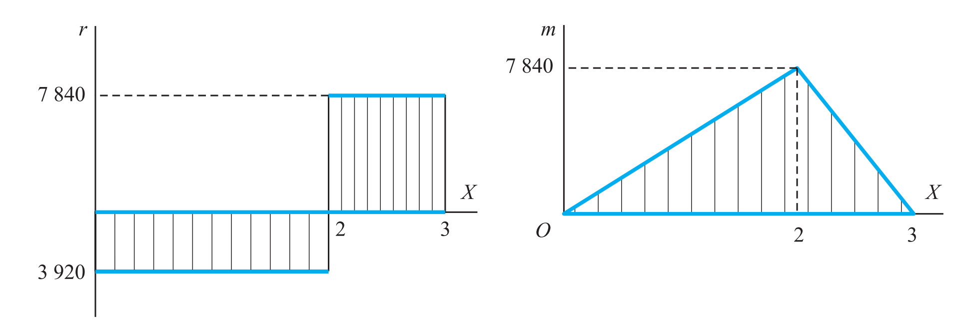


Figura 14.10.

EJEMPLO 14.3 Viga apoyada en sus extremos con carga continua uniforme

Consideremos una viga homogénea de longitud 3 m, que lleva una carga uniforme de $q = 5\,000$ N/m, incluyendo su propio peso (Figura 14.11). Calculemos:

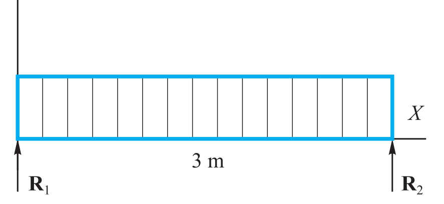


Figura 14.11.

1.º Las reacciones en los apoyos.

2.º El esfuerzo cortante y el momento flector en cada una de las secciones de la viga.

3.º La representación de los resultados anteriores.

Solución:

1.º La carga total es $Q = 5\,000$ N/m · 3 m = 15 000 N. La ecuación de la Estática es $R_1 + R_2 = 15\,000$. La simetría de la carga permite establecer $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = 7\,500\,\mathbf{j}$ N.

2.º En una sección de abscisa x, el esfuerzo cortante es:

$$\mathbf{r} = -(\mathbf{R}_1 - qx\,\mathbf{j}) = -(7\,500 - 5\,000x)\mathbf{j} = 5\,000(x - 1{,}5)\mathbf{j}$$

En una sección de abscisa x el momento flector, es:

$$\mathbf{m} = -[-x\,\mathbf{i} \times R_1\,\mathbf{j} + (-x/2\,\mathbf{i} \times -qx\,\mathbf{j})] = 2\,500(3x - x^2)\mathbf{k}$$

3.º En la Figura 14.12 se ha representado los resultados anteriores:

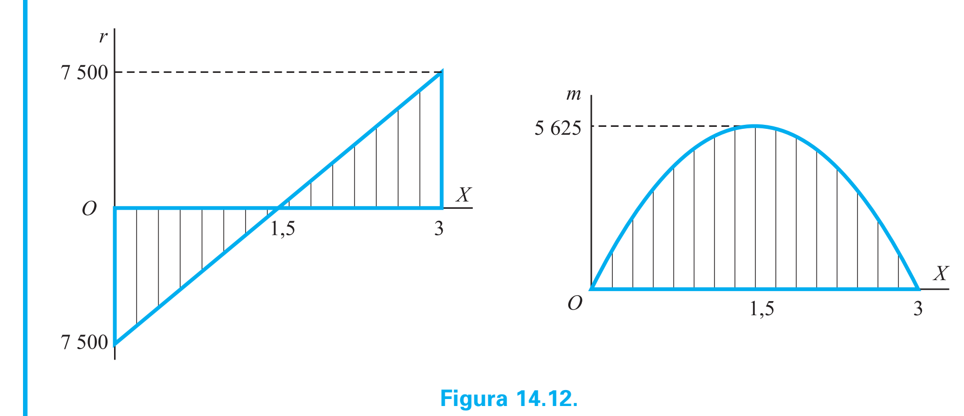


Figura 14.12.

Analicemos ahora la viga empotrada por un extremo y en voladizo. Fragmentemos ésta mediante una sección S normal al eje de la viga y consideremos el equilibrio del fragmento de la derecha, donde no está el empotramiento (Figura 14.13). Se verificará:

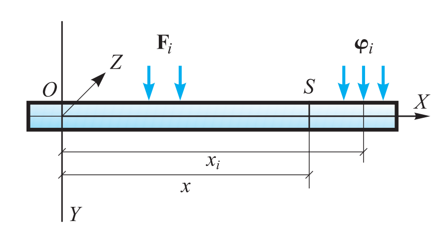


Figura 14.13.

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}' = \sum_i \boldsymbol{\varphi}_i = \sum_i \varphi_i \quad \text{y} \quad \mathbf{m} = \mathbf{M}' = \sum_i (x_i - x)\varphi_i \mathbf{k} \qquad [14.12]$$

estando la sección sometida a un momento flector $\mathbf{m}$ y un esfuerzo cortante $\mathbf{r}$.

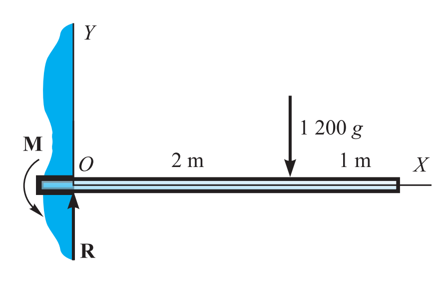


Figura 14.14.

EJEMPLO 14.4 Viga empotrada en un extremo con carga puntual

Consideremos una viga homogénea, empotrada por uno de sus extremos, con una longitud de 3 m en voladizo y con una carga de 1 200 kg situada como se indica en la Figura 14.14. Calculemos:

1.º La reacción y el momento en el empotramiento.

2.º El esfuerzo cortante y el momento flector en una sección cualquiera de la viga.

3.º La representación de los resultados.

Solución:

1.º El peso total, despreciando el de la propia viga, es:

$$\mathbf{P} = -1\,200 \times 9{,}8\,\mathbf{j} = -11\,760\,\mathbf{j}$$

Las condiciones de la Estática dan:

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad , \quad \mathbf{R} - 11\,760\,\mathbf{j} = 0 \quad , \quad \mathbf{R} = 11\,760\,\mathbf{j}$$

y

$$\sum \mathbf{M} = 0 \quad , \quad \mathbf{M} + 2\,\mathbf{i} \times (-11\,760\,\mathbf{j}) = 0 \quad , \quad \mathbf{M} = 23\,520\,\mathbf{k}$$

2.º El esfuerzo cortante en una sección de abscisa x es:

Para $x < 2$:

$$\mathbf{r} = -\mathbf{R} = -11\,760\,\mathbf{j}$$

Para $x > 2$:

$$\mathbf{r} = -\mathbf{R} + 11\,760\,\mathbf{j} = 0$$

El momento flector en una sección de abscisa x, es:

Para $x < 2$:

$$\mathbf{m} = (2 - x)\mathbf{i} \times (-11\,760\,\mathbf{j}) = (11\,760x - 23\,520)\mathbf{k}$$

Para $x > 2$:

$$\mathbf{m} = 0$$

3.º En la Figura 14.15 se ha representado los resultados

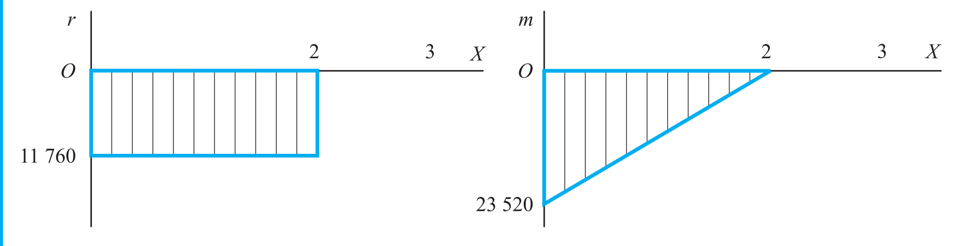


Figura 14.15.

Debemos hacer notar que el momento en el empotramiento es igual y opuesto al momento flector de la sección de la viga que coincide con el comienzo del empotramiento ($x = 0$).

EJEMPLO 14.5 Viga empotrada en un extremo con carga uniforme

Consideremos una viga homogénea, empotrada por uno de sus extremos y con una longitud de 3 m en voladizo. La viga soporta una carga uniforme de $q = 5\,000$ N/m, incluyendo su propio peso (Figura 14.16). Calculemos:

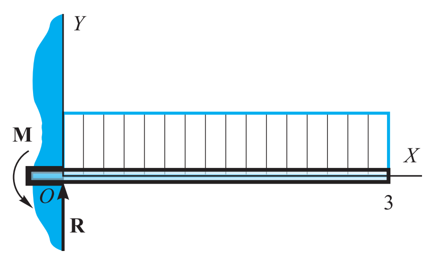


Figura 14.16.

1.º La reacción y el momento en el empotramiento.

2.º El esfuerzo cortante y el momento flector en cada sección de la viga.

3.º La representación de los resultados anteriores.

Solución:

1.º El peso total es:

$$\mathbf{P} = -q \cdot l\,\mathbf{j} = -5\,000 \cdot 3\,\mathbf{j} = -15\,000\,\mathbf{j}\,N$$

Las condiciones de la Estática dan:

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad , \quad \mathbf{R} + \mathbf{P} = 0 \quad , \quad \mathbf{R} = -\mathbf{P} = 15\,000\,\mathbf{j}$$

y $\sum \mathbf{M} = 0$, $\mathbf{M} + \frac{3}{2}\mathbf{i} \times \mathbf{P} = 0$ de donde: $\mathbf{M} = 22\,500\,\mathbf{k}$.

2.º El esfuerzo cortante en una sección de abscisa x es:

$$\mathbf{r} = -(\mathbf{R} - qx\,\mathbf{j}) = (qx - R)\mathbf{j} = 5\,000(x - 3)\mathbf{j}$$

El momento flector en una sección cualquiera de abscisa x lo calculamos por aplicación de la [14.12]:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2}(3 - x)\mathbf{i} \times (-(3 - x)5\,000)\mathbf{j} = -2\,500(3 - x)^2\,\mathbf{k}$$

3.º En la Figura 14.17 se ha representado los resultados

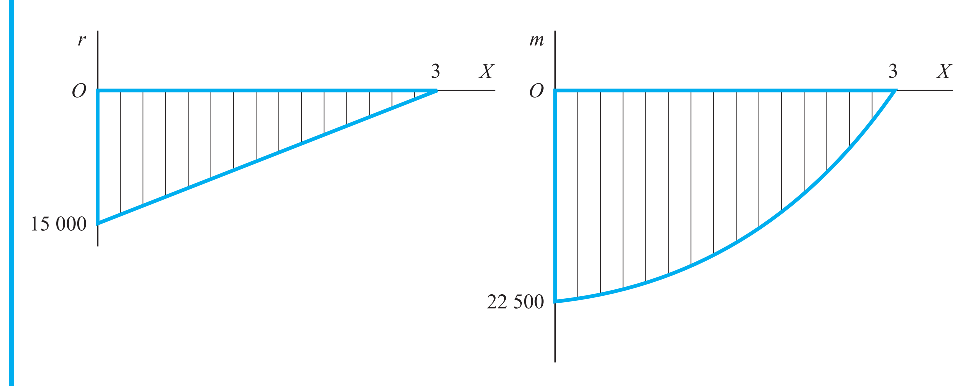


Figura 14.17.

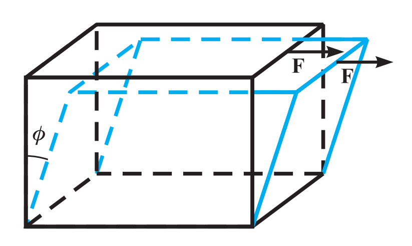


Figura 14.18.

14.7 Módulo de rigidez

Consideremos un sólido en forma de cubo de arista l, una de cuyas caras supondremos fija y en la cara opuesta, supondremos que actúa una fuerza F uniformemente distribuida y contenida en ella. Si la cara fija es horizontal, cualquier sección horizontal del cubo está sometida a esfuerzo cortante igual a F y la deformación se produce como si el cubo estuviese formado por láminas horizontales que resbalan unas sobre otras. La tensión que produce esta deformación es $F/S = \tau$, siendo S el área de una sección horizontal del cubo. Pues bien, entre esta tensión y la deformación ϕ existe la relación:

$$\tau = G \cdot \phi \qquad [14.13]$$

denominándose al coeficiente G, *módulo de elasticidad transversal o de rigidez*; expresión que es completamente análoga a la [14.4].

De las cuatro constantes elásticas que hemos estudiado: E, módulo de elasticidad o de Young; κ, módulo de compresibilidad; η, coeficiente de Poisson; y G, módulo de elasticidad transversal o de rigidez, solamente dos son independientes; por tanto, existen dos relaciones que las ligan: una, ya ha sido deducida, la [14.9], y otra, cuya deducción cae fuera de nuestros objetivos, que es:

$$E = 2G(1 + \eta) \qquad [14.14]$$

En la Tabla 14.2 indicamos los valores de G y κ para algunos materiales.

Tabla 14.2. Módulos de elasticidad transversal y de compresibilidad

Material	$G \cdot 10^9$ Pa	$\kappa \cdot 10^9$ Pa
Acero	82	169
Aluminio	26	74
Cobre	48	138
Plata	30	104
Platino	60	230
Vidrio	30	40

14.8 Torsión

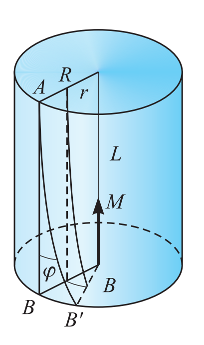


Figura 14.19.

Consideremos un sólido homogéneo con forma de cilindro circular recto de radio R y longitud L, uno de cuyos extremos suponemos fijo y, actuando sobre el otro extremo, suponemos un sistema de fuerzas cuyo momento $\mathbf{M}$ tiene la dirección del eje del cilindro (Figura 14.19).

Cualquier sección normal al citado eje está sometida a unas fuerzas elásticas cuyo momento es M, normal a ella y, por tanto, está sometida a torsión. Cada una de estas secciones rectas gira en su plano alrededor del eje del cilindro y sin deformarse, resbalando sobre la contigua; por tanto, aparecen esfuerzos cortantes producidos por la torsión. Una generatriz AB, debido a la deformación, pasa a ocupar la posición AB', siendo el arco BB':

$$BB' = R\theta = \varphi L \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{R}{L}\theta$$

La Ecuación [14.13] se escribe:

$$\tau_m = G\frac{R}{L}\theta \qquad [14.15]$$

La deformación aumenta con la distancia al eje, igualmente sucederá con la tensión que actúa, siendo ésta, a una distancia r del eje:

$$\tau = G \frac{r}{L} \theta \qquad [14.16]$$

en la que para $r = 0$, es $\tau = 0$ y para $r = R$, obtenemos [14.15]. La fuerza que actúa a través de una corona circular de radios r y $r + dr$ es:

$$df = \tau \cdot 2\pi r\, dr = \frac{Gr}{L} \theta \cdot 2\pi r\, dr = \frac{\tau_m}{R} 2\pi r^2\, dr$$

El momento de esta fuerza respecto al eje del cilindro es:

$$dm = r \cdot df = \frac{\tau_m}{R} 2\pi r^3\, dr$$

y el momento total de las tensiones respecto al citado eje es:

$$m = 2\pi \frac{\tau_m}{R} \int_0^R r^3\, dr = \frac{\tau_m}{R} \frac{\pi R^4}{2} \qquad [14.17]$$

El factor $\pi R^4/2 = I$ es el momento de inercia de la sección circular respecto al eje del cilindro, supuesta la densidad unidad, pudiendo escribirse, puesto que el sólido está en equilibrio:

$$M = \frac{\tau_m}{R} I \qquad [14.18]$$

o, teniendo en cuenta [14.15]:

$$M = \frac{GI}{L} \theta = G \frac{\pi R^4}{2L} \theta \qquad [14.19]$$

expresión que permite calcular G en función de M y θ, o bien, conocido G, hallar el valor de θ para cada M.

BALANZA DE TORSIÓN

Durante el siglo XVIII la Física tenía planteadas dos cuestiones: la forma de la Tierra y su estructura interna. La primera se trató de resolver midiendo el arco de meridiano en diferentes lugares y la segunda determinando la densidad media de la Tierra en diferentes situaciones. Uno de los primeros intentos de esclarecer esta última cuestión se debe a Bourger que, utilizando un péndulo, estableció la relación entre la densidad media de una montaña, en su caso el Chimborazo, y la densidad media de la Tierra; ésta debía ser unas cuatro veces la densidad media de la montaña.

El astrónomo y profesor de geología en Cambridge, John Michell (1724-1793), ideó en 1750, la balanza de torsión, capaz de detectar momentos de fuerzas extraordinariamente pequeños y diseñó una experiencia, en 1768, para determinar la densidad media terrestre, midiendo la atracción que se ejercen pequeñas masas.

En esencia la balanza de torsión está formada por dos pequeñas masas m_1, situadas en los extremos de una barra de masa despreciable, la cual está suspendida, en posición horizontal, mediante un hijo de módulo de torsión conocido o previamente calculado. Al ejercerse sobre las citadas masas sendas fuerzas iguales y opuestas, aparece un momento $\mathbf{M}$, que retuerce el hilo, $M = dF$, siendo d la distancia entre las masas y F el módulo de las fuerzas que actúan sobre ellas. A esta deformación se opone el hilo con el momento de sus fuerzas elásticas, $\mathbf{M}_t$, que es proporcional al ángulo girado, θ, $M_t = -k\theta$. En el equilibrio se verificará

$$\mathbf{M} + \mathbf{M}_t = 0 \qquad \text{o} \qquad dF = k\theta$$

Con lo cual, conocidos k y d, y midiendo θ, puede determinarse el valor de la fuerza F.

El propio Michell utilizó su balanza para determinar las fuerzas que se ejercen los polos magnéticos de los imanes y se considera que fue el primero en establecer que esa fuerza era inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. Este mismo tipo de balanza, al parecer ideada de forma independiente, aparece descrita en una memoria presentada por Coulomb (1736-1806), en 1777, a la Academia de Ciencias de París y fue usada por éste para determinar las acciones que se ejercen las partículas cargadas, estableciendo, en 1785, la ley que lleva su nombre.

A la muerte de Michell, sin haber podido realizar las experiencias por él diseñadas para determinar la densidad media terrestre, la balanza llegó, no en muy buenas condiciones, a manos de su amigo y compañero en la Royal Society, Henry Cavendish (1731-1810). Éste decidió construir una nueva y modificar el diseño buscando mayor precisión, para lo cual encerró el dispositivo móvil en una vitrina que evitara las perturbaciones del aire, las diferencias de temperaturas y los fenómenos de electrización, llegando incluso a determinar el efecto de atracción de la masa de la vitrina sobre las esferas móviles. Para ejercer el par de fuerzas exteriores colocó, frente a las masas de la balanza, dos grandes masas, m_2, las cuales podían cambiar a posiciones simétricas, indicadas en la figura con líneas de puntos, mediante una polea. Para la medida del ángulo girado colocó un espejo, en un extremo de la barra móvil y midió la desviación del haz de luz incidente sobre él. En diseños posteriores el espejo se sitúa en el centro de la barra móvil. Cavendish comenzó sus mediciones el 5 de agosto de 1797 y las concluyó el 30 de mayo de 1798, realizando 29 determinaciones, que aparecen en su trabajo *On the metod of computing the density of the earth*. Como media de sus medidas se obtiene, para la densidad media de la Tierra, el valor 5,448 g/cm^3, pero por error Cavendish dio el valor 5,48. En ningún momento aparece en sus trabajos referencias a la determinación de la constante G de la gravitación universal.

La ley de la gravitación universal establecida por Newton, en 1665, no se vio completada con el cálculo de su constante de proporcionalidad hasta casi dos siglos después. Parece ser que la expresión completa aparece por primera vez en 1873, en el trabajo *Determination nouvelle de la constante de l'attraction et de la densité moyenne de la Terre*, realizado por Cornu y Baille y presentado a la Academia de Ciencias de París, en el cual se indica: *a partir de ahora la balanza de torsión podrá realizar medidas absolutas*.

De la expresión de la fuerza de atracción gravitacional

$$F = G\frac{Mm}{R^2} = mg$$

se deduce $g = GM/R^2$, y la densidad media de la Tierra, ρ, se relaciona con la constante de la gravitación universal

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{gR^2}{GV} = \frac{3gR^2}{G4\pi R^2} = \frac{3g}{4\pi GR}$$

y

$$G = \frac{3g}{4\pi R\rho}$$

Con el valor de ρ dado por Cavendish se obtiene

$$G = 6{,}6979 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$$

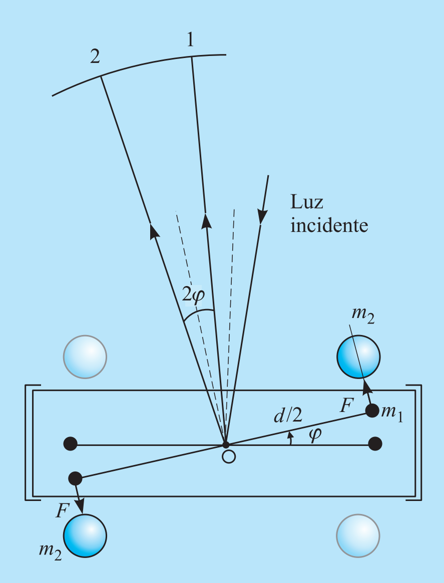
La balanza de torsión fue muy mejorada por el húngaro Lorand Eötvös (1848-1919), que utilizó masas de platino e hilo de platino-iridio, realizando en 1888 determinaciones de la gravedad de gran precisión y diseñando un método dinámico para la determinación de G, haciendo oscilar la balanza entre dos paredes de plomo en dos direcciones perpendiculares: una paralela a las paredes y otra perpendicular a ellas. Eötvös y sus discípulos siguieron perfeccionando su balanza y llegaron a poder establecer, en 1908, que la diferencia entre la masa inerte y la gravitacional era inferior a 1/20 000 000.

La última medida de G ha sido realizada en abril de 2000 por el grupo EötWash, de la Universidad de Washington, habiendo obtenido el valor

$$G = 6{,}67390 \times 10^{-11}\ N \cdot \mathrm{m^2 \cdot kg^2}$$

La última recomendación de CODATA da para G el valor

$$G = 6{,}67259 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$$



Fluidos en equilibrio

CAPÍTULO 15

15.1 Nociones generales. Fluidos perfectos

Fluido es todo medio material continuo que en reposo sólo admite tensiones normales. Debido a las propiedades comunes que poseen, bajo la denominación de fluidos se engloba las sustancias líquidas y gaseosas.

En las sustancias líquidas, las moléculas se mantienen unidas por fuerzas de cohesión, formando agrupaciones que se mueven las unas respecto a las otras, 1o que las da el carácter de fluidez. En consecuencia, no tienen forma propia y su estructura les permite adaptarse a la forma del recipiente que las contiene. No obstante, las fuerzas de cohesión son suficientemente grandes como para mantener una separación media constante entre las diferentes agrupaciones moleculares, lo que hace que los líquidos tengan volumen propio. Por otra parte, si mediante una presión exterior tratamos de aproximar las moléculas entre sí, aparecen en el interior del líquido fuerzas enormemente grandes que se oponen a ello, de aquí que la compresibilidad de los líquidos sea muy baja.

En las sustancias gaseosas las moléculas tienen entidad propia, estando animadas de un movimiento desordenado que las hace chocar entre sí y con las paredes del recipiente que las contiene. Esta agitación interna las lleva a ocupar todo el espacio de que dispongan, de aquí que los gases no tengan volumen ni forma propios. Los gases son fácilmente compresibles.

Diremos que un *fluido* es *perfecto* cuando, tanto en reposo como en movimiento, los esfuerzos interiores son únicamente presiones y éstas son perpendiculares al elemento de superficie sobre el que actúan.

Los fluidos en los cuales, estando en movimiento, existen, entre dos cualesquiera de sus partes contiguas, esfuerzos tangenciales o cortantes, se denominan *fluidos viscosos*.

15.2 Concepto de presión. Equilibrio de fluidos en el campo de la gravedad

Por definición, el valor de la presión en un punto es el cociente entre el valor de la fuerza elemental $d\mathbf{F}$, que se ejerce sobre el elemento de superficie dS en ese punto, y el valor de esta superficie:

$$\mathbf{p} = \frac{d\mathbf{F}}{dS}$$

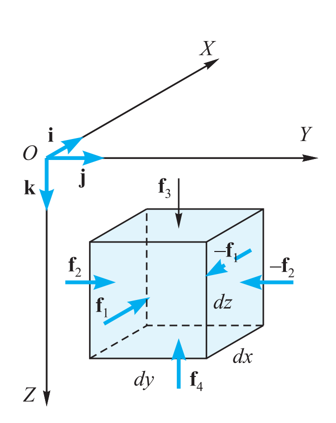


Figura 15.1.

Las dimensiones de la presión son $ML^{-1}T^{-2}$ y su unidad en el S.I. el $N \cdot m^{-2}$, llamado *pascal*. En el sistema C.G.S. la unidad es la $dina \cdot cm^{-2}$, llamada *bar*. La equivalencia entre ambas es 1 pascal = 10 bares. Frecuentemente, se usa el milibar, que equivale a 10^{-3} bares.

Un fluido estará en reposo cuando lo esté cada uno de los elementos que lo componen. Consideremos el equilibrio de un elemento de volumen dv, suficientemente pequeño como para que en todo él se pueda considerar constante la densidad y lo suficientemente grande como para que no sea necesario considerar su estructura molecular. Sea éste un paralelepípedo recto rectángulo de aristas dx, dy, dz, orientado como se indica en la Figura 15.1.

Las fuerzas que actúan sobre las caras verticales son, por simetría, iguales y opuestas dos a dos, anulándose. La fuerza $\mathbf{f}_3$ que actúa sobre la cara horizontal superior es:

$$\mathbf{f}_3 = p\, dS\, \mathbf{k}$$

siendo p la presión sobre la citada cara. La presión en la cara horizontal inferior es $p + dp$ y la fuerza $\mathbf{f}_4 = -(p + dp)\, dS\, \mathbf{k}$. Además, debemos tener en cuenta el peso propio del elemento de volumen:

$$\rho g\, dv\, \mathbf{k}$$

siendo ρ la densidad del fluido.

La suma de estas fuerzas debe ser nula para que el equilibrio subsista, verificándose:

$$p\, dS - (p + dp)\, dS + \rho g\, dv = 0$$

y, puesto que es $dv = dS\, dz$, al dividir por dS, resulta:

$$dp = \rho g\, dz \qquad [15.1]$$

que es la ecuación fundamental de la Estática de fluidos en el campo gravitatorio.

Para poder integrar esta ecuación es necesario conocer la densidad en función de z o de p. En el caso de los líquidos, debido a su baja compresibilidad, ρ es prácticamente constante y la integración da:

$$p = \rho g z + C \qquad [15.2]$$

Para el cálculo de la constante de integración, tomemos el origen de coordenadas en la superficie libre del líquido y, si la presión en esta es p_0, al particularizar para ellas la Ecuación [15.2], resulta $C = p_0$, con lo cual:

$$p = p_0 + \rho g z \qquad [15.3]$$

expresión que nos dice que *la presión p en un punto de profundidad z es igual a la presión p_0 que se ejerce sobre la superficie libre del líquido más el producto del peso específico por la profundidad*. Por tanto, todos los puntos de igual profundidad tienen igual presión, aumentando ésta linealmente con la profundidad. Los puntos de igual presión pertenecen a planos horizontales.

EJEMPLO 15.1

Calculemos la presión a diferentes profundidades en el mar, tomando para el agua del mar la densidad constante $\rho = 1{,}03 \times 10^3$ kg/m^3 y para la presión atmosférica, $p_0 = 1{,}01 \times 10^5$ Pa.

Solución:

La presión en función de la profundidad es:

$$P = 1{,}01 \times 10^5 + 1{,}03 \times 10^3 \times 9{,}8 \times z = (1{,}01 + 0{,}101z)10^5 \text{ Pa}$$

Para $z = 2$ m, $p_2 = 1{,}212 \times 10^5$ Pa $= 1{,}2$ atm.
Para $z = 10$ m, $p_{10} = 2{,}02 \times 10^5$ Pa $= 2$ atm.
Para $z = 20$ m, $p_{20} = 3{,}02 \times 10^5$ Pa $= 3$ atm.
Para $z = 100$ m, $p_{100} = 11{,}11 \times 10^5$ Pa $= 10{,}97$ atm.

EJEMPLO 15.2 Manómetro

El manómetro es un dispositivo para medir la presión de un gas en el interior de un recipiente, para lo cual se conecta al recipiente un tubo en forma de *U* lleno de un líquido, que usualmente es mercurio (Figura 15.2).

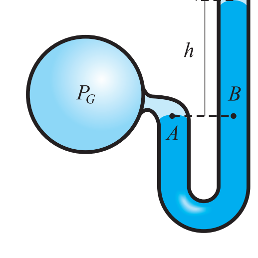


Figura 15.2.

Solución:

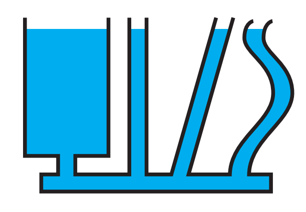
La presión del gas es la que existe en el punto *A* y es la misma que la existente en el punto *B* del mismo plano horizontal:

$$p_G = p_B = p_0 + \rho gh = 1{,}01 \times 10^5 + 13{,}6 \times 10^3 \times 9{,}8 \cdot h =$$
$$= (1{,}01 + 1{,}323h) \times 10^5 \text{ Pa} = 1 + 1{,}308\,h \text{ atm}$$

De forma que la presión del gas está medida por la diferencia de alturas *h* entre las dos superficies libres del mercurio, debiendo coincidir el punto *A* con el orificio del recipiente.

15.3 Vasos comunicantes

Hemos visto cómo, en un líquido sometido únicamente al campo gravitatorio, los puntos de igual presión pertenecen a planos horizontales. De aquí que la superficie libre, lugar de los puntos en los cuales la presión es la atmosférica, sea un plano horizontal.


Figura 15.3.

Así, si la vasija que contiene el líquido está formada por diferentes conductos (Figura 15.3), la superficie libre del líquido estará formada por diferentes elementos, pero todos ellos deben pertenecer a un mismo plano horizontal, lo que constituye el principio de los vasos comunicantes.

Si dos vasos comunicantes contienen distintos líquidos no miscibles (Figura 15.4), dado que la presión en *A* y en *B* ha de ser la misma, deberá verificarse:

$$p_0 + \rho gz = p_0 + \rho_1 gz_1 \quad \text{o} \quad \frac{z}{z_1} = \frac{\rho_1}{\rho}$$

lo que indica que *las alturas alcanzadas en cada rama, medidas a partir de la superficie de separación, son inversamente proporcionales a las densidades de los respectivos líquidos.*

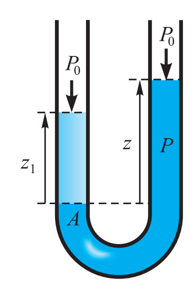


Figura 15.4.

15.4 Principio de Pascal

La Ecuación [15.3] demuestra que si la presión en la superficie libre del líquido varía en una cierta cantidad, la presión en cualquier punto varía la misma cantidad, lo que constituye el principio de Pascal, que puede enunciarse así: *la presión ejercida en un punto de un líquido en equilibrio se transmite íntegramente en todas direcciones*. Hemos conservado el nombre de principio por tradición, pero en realidad se trata de un teorema, cuya demostración es la ya indicada.

15.5 Prensa hidráulica

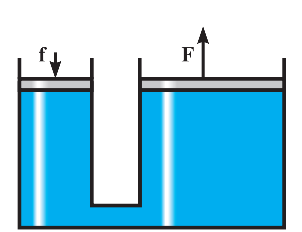


Figura 15.5.

Es una de las aplicaciones más inmediatas del principio de Pascal. En esencia está formada por dos cilindros intercomunicados, uno de ellos de sección pequeña s y otro de mayor sección S, llenos de un líquido. Sobre la superficie libre del líquido existen sendos pistones, el conjunto está en equilibrio (Figura 15.5). Si sobre el pistón de menor sección hacemos actuar una fuerza f, la presión en la superficie del líquido en contacto con los pistones es:

$$p = \frac{f}{s}$$

y, por tanto, la fuerza sobre el pistón de mayor sección es:

$$F = \frac{f}{s} S = \frac{S}{s} f$$

luego la fuerza obtenida F es igual al producto de la fuerza aplicada f por la relación de las secciones S/s. Si la relación entre las secciones es grande, con la aplicación de una fuerza pequeña, f, obtendremos grandes fuerzas, F. De aquí que a la relación $F/f = S/s$ se le denomine *ganancia mecánica*.

Es interesante ver que el trabajo realizado por las fuerzas aplicadas al pistón menor es igual que el realizado por la fuerza que ejerce el pistón mayor. Si los desplazamientos son D y d, respectivamente, el trabajo realizado por la fuerza aplicada al pistón menor es $W_1 = fD$ y el realizado por la ejercida por el pistón mayor, $W_2 = Fd$. Debido a la prácticamente incompresibilidad del líquido, generalmente un aceite, el volumen permanece constante y, por ello, debe ser $sD = Sd$ teniendo en cuenta la expresión de la ganancia mecánica $fD = Fd = W$, ambos trabajos son iguales.



15.6 Fuerzas sobre superficies planas sumergidas. Centro de presiones

Sobre cada elemento diferencial de superficie, dA, situado a una profundidad z, actúa normalmente y dirigido contra él una fuerza dF que es:

$$d\mathbf{F} = -p\,d\mathbf{A} = -(p_0 + \rho g z)\,d\mathbf{A} \qquad [15.4]$$

La fuerza total sobre la superficie es:

$$\mathbf{F} = \int_A -(p_0 + \rho g z)\,d\mathbf{A}$$

Si la superficie es plana, se puede escribir:

$$\mathbf{F} = -p_0\mathbf{A} - \rho g \int z\, d\mathbf{A}$$

y puesto que es:

$$Az_C = \int z\, dA$$

resulta:

$$\mathbf{F} = -p_0\mathbf{A} - \rho g \mathbf{A} z_C = -(p_0 + \rho g z_C)\mathbf{A} = -p_C\mathbf{A} \qquad [15.5]$$

lo que nos indica que *la fuerza ejercida por un líquido, sobre una superficie plana en él sumergida, es igual a la que ejercería sobre una superficie plana de igual área, situada paralelamente a la superficie libre del líquido a la profundidad a que está el centro de masas de la primera supuesta homogénea.*

El sistema de vectores [15.4], cuya dirección es normal a la superficie en el punto de actuación y sentido contra ella, por ser la superficie plana, constituye un sistema de vectores paralelos que será equivalente a su resultante aplicada en el centro del sistema, el cual se denomina *centro de presiones* y verificará todo lo establecido para el centro de sistemas de vectores paralelos.

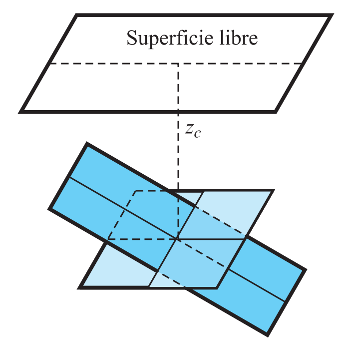


Figura 15.6.

EJEMPLO 15.3 Muro de contención de líquidos

Calculemos para un muro de contención de líquidos, el empuje total que el líquido ejerce sobre el muro y su punto de aplicación o centro de presiones (Figura 15.7).

Solución:

La presión debida al líquido es:

$$p = \rho g z$$

y la fuerza sobre un elemento de superficie de muro es:

$$d\mathbf{F} = -\rho g z\, dA\mathbf{i}$$

Tomando como elemento de área un rectángulo de base la longitud l del muro y la altura dz, la fuerza total del líquido sobre el muro es:

$$\mathbf{F} = -l \int_0^h \rho g z\, dz\, \mathbf{i} = -\frac{1}{2}\rho g l h^2\, \mathbf{i}$$

cuyo módulo, puede comprobarse fácilmente, es igual al área del diagrama de presiones. El cálculo también puede realizarse aplicando [15.5].

El centro de presiones, de acuerdo con la definición de centro de sistemas de vectores paralelos, verificará:

$$F \cdot z_{cp} = \int_A z \cdot \rho g z\, dA = \rho g l \int_0^h z^2\, dz = \frac{1}{3}\rho g l h^3$$

de lo que resulta que el centro de presiones está situado a una profundidad de dos tercios con respecto a la total:

$$z_{cp} = \frac{2}{3}h$$

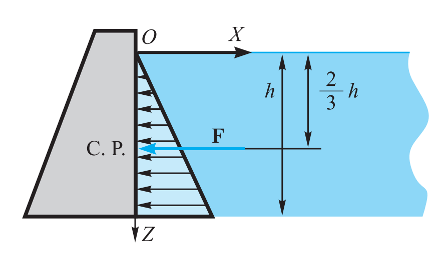
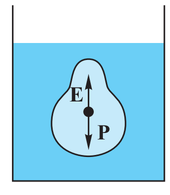


Figura 15.7.

15.7 Principio de Arquímedes

El principio de Arquímedes establece que *todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje vertical y hacia arriba igual al peso del fluido que desaloja*. Por tradición, hemos conservado el nombre de principio, pero realmente se trata de un teorema demostrable a partir de los principios fundamentales de la Mecánica. En efecto, consideremos un fluido en equilibrio y aislemos mediante una superficie cerrada imaginaria una porción de él. Ésta seguirá en equilibrio si consideramos, además de su propio peso, las acciones (presiones) que el resto del fluido ejerce sobre la superficie que lo limita (Figura 15.8). Por tanto, la resultante de las presiones sobre la superficie imaginaria que limita la porción considerada, **E,** es igual y opuesta al peso del fluido encerrado, **P.** Si, un cuerpo sólido, cuya forma es igual a la de la superficie imaginaria considerada, lo sumergimos en la misma posición de ésta, las presiones que sobre la superficie del sólido ejerce el fluido son las mismas que ejercía sobre la superficie imaginaria y, por tanto, su resultante es igual al peso del fluido desalojado, pero dirigida hacia arriba.

Del principio de Arquímedes se deduce que, en fluidos homogéneos en densidad, *el empuje es el mismo cualquiera que sea la posición del cuerpo sumergido, puesto que siempre es igual al peso del fluido desalojado*.



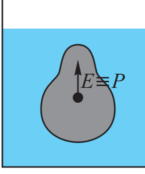


Figura 15.8.



EJEMPLO 15.4

El rey Hieron de Siracusa planteó a Arquímedes la posibilidad de saber si la corona que le había fabricado un orfebre era realmente de oro.

Solución:

La masa de la corona resultó ser de 12,4 kg y, al ser sumergida en agua, su masa se redujo a 11,3 kg, debido, obviamente, al empuje ascendente recibido del agua, debiendo verificarse el principio de Arquímedes:

$$12{,}4\ g = 11{,}3\ g + \rho g V$$

de donde se obtiene el volumen de la corona:

$$V = (12{,}4 - 11{,}3) \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 = 1{,}1 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3$$

y con ello, la densidad del material que la compone, $12{,}4 = \rho_m V$:

$$\rho_m = 11{,}27 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$$

La corona resultó no ser de oro, cuya densidad es de $19{,}3 \times 10^3$ kg/m^3 o, al menos, no ser toda ella de oro. Al parecer el orfebre fue ejecutado, pero Arquímedes pudo publicar sus trabajos en su famoso tratado *Sobre los cuerpos flotantes*.

EJEMPLO 15.5

Una balsa de forma cuadrada, de dimensiones l, d y altura h, tiene una masa de 250 kg. Analicemos cuántas personas de masa 75 kg pueden subirse a ella sin que se hunda, si suponemos el mar en calma y la densidad de su agua $\rho = 1{,}03 \times 10^5$ kg/m^3. Hallar la aplicación a $l = 1{,}20$ m, $d = 0{,}80$ m y $h = 0{,}60$ m.

Solución:

Si la parte sumergida tiene una profundidad z, la condición de equilibrio es:

$$(250 + n75)g = l\,dz\rho g$$

de donde:

$$n = (l \cdot d \cdot z\ \rho - 250)/75$$

Para los datos del enunciado es:

$$n = (206\ l \cdot d \cdot z - 50)/15$$

como máximo, puede ser $n \leqslant (206\ l \cdot d \cdot h - 50)/15$.

Para los valores de la aplicación es $n \leqslant (206 \times 1{,}2 \times 0{,}8 \times 0{,}6 - 50)/15 \leqslant 4{,}58$. Por tanto, sólo pueden subirse sin que la barca se hunda 4 personas como las indicadas, suponiendo que la barca se mantiene siempre horizontal.

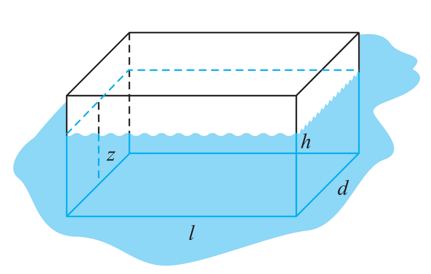


Figura 15.9.

15.8 Equilibrio de los cuerpos sumergidos

Sumerjamos un cuerpo homogéneo, de volumen V y densidad ρ, en un fluido de densidad ρ_0. Debido a la homogeneidad del cuerpo sumergido, coinciden el c.d.g. de éste, G, y el del fluido desalojado, C, que se denomina *centro de empuje o de carena*, coincidiendo las líneas de acción del peso del cuerpo y del empuje, que será la vertical que pasa por $G \equiv C$. El módulo del peso es:

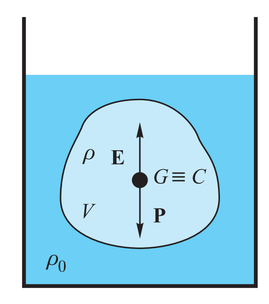


Figura 15.10.

$$P = \rho g V$$

y el del empuje:

$$E = \rho_o g V$$

pudiendo presentarse tres casos:

1.º Si $\rho > \rho_0$, $P > E$ y el cuerpo cae al fondo.

2.º. Si $\rho = \rho_0$, $P = E$ y el cuerpo queda dentro del fluido en equilibrio indiferente (Figura 15.10).

Si el cuerpo sumergido es menos compresible que el fluido, la posición de equilibrio será estable pues, al apartarlo de ella, por ejemplo, hacia abajo, aumenta su densidad al disminuir su volumen, pero aumenta más la densidad del fluido aumentando E y volviendo el cuerpo hacia la posición de equilibrio. Análogamente sucede cuando el desplazamiento a partir de la posición de equilibrio se realiza hacia arriba.

Si el cuerpo sumergido es más compresible que el líquido, su posición de equilibrio es inestable, puesto que si le sacamos de ella, por ejemplo, hacia abajo, V disminuye y ρ aumenta más que ρ_0, disminuyendo E frente a P y cayendo al fondo. Por el contrario, si lo desplazamos de su posición de equilibrio hacia arriba, V aumenta y ρ disminuye más que ρ_0, aumentando E frente a P y subiendo el cuerpo a la superficie.

3.º Si $\rho < \rho_0$, $P < E$ y el cuerpo flotará (Figura 15.11) dejando sumergido un volumen V_1, que verificará:

$$\rho_0 g V_1 = P \quad ; \quad V_1 = \frac{P}{\rho_0 g} = \frac{\rho}{\rho_0} V$$

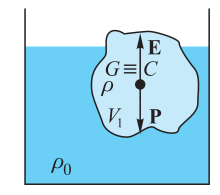
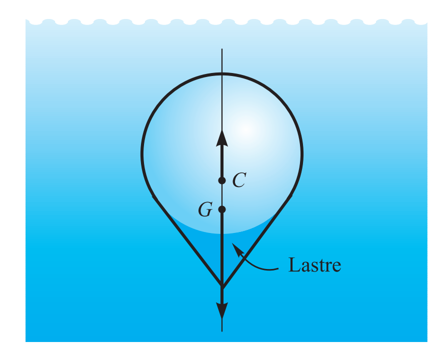
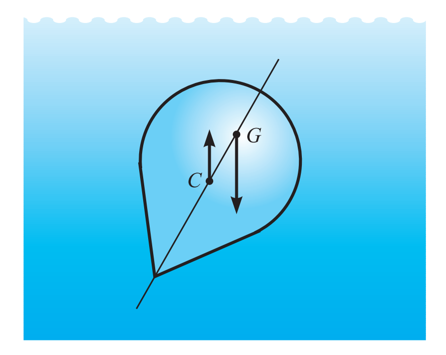


Figura 15.11.



Equilibrio estable



Equilibrio inestable

Figura 15.12.

Si el cuerpo sumergido no es homogéneo, el centro de gravedad y el de empuje no coinciden (Figura 15.12). La posición de equilibrio será aquélla en la cual ambos centros estén en la misma vertical. Al sacar el cuerpo de su posición de equilibrio, aparece un par de fuerzas que tratará de volverlo a su posición de equilibrio si el centro de empuje está por encima del de gravedad (equilibrio estable) y que tratará de volcarlo en caso contrario (equilibrio inestable).

EJEMPLO 15.6 Hidrómetro

Un hidrómetro está formado por un tubo recto de sección constante, cuyo diámetro llamaremos d. En su parte inferior lleva una masa m y se usa para la determinación de densidades de líquidos en función de la longitud de tubo que se introduce en éste cuando flota.

1.º Para calibrarlo se introduce en agua destilada, $\rho_0 = 10^3$ kg/m^3. ¿A qué profundidad llegará?

2.º Hallar la relación entre la densidad del líquido y la longitud de hidrómetro sumergida.

3.º Aplicación al caso: $d = 1{,}6$ cm, $m = 50$ g.

Solución:

1.º El peso del hidrómetro es neutralizado, en la posición de equilibrio, por el empuje que recibe del agua:

$$mg = V_0\,\rho_0\,g \quad , \quad m = \frac{1}{4}\,\pi d^2 z_0\,\rho_0 \quad , \quad z_0 = 4m/\pi d^2 \rho_0$$

2.º Al introducirlo en otro líquido de densidad ρ, el equilibrio hidrostático es:

$$m = \rho_0 V_0 = \rho V$$

Puesto que la sección es constante, debe ser $\rho_0 z_0 = \rho z = 4m/\pi d^2$.

La longitud introducida es inversamente proporcional a la densidad del líquido, y ésta queda determinada en función de aquélla y la constante del hidrómetro $C = 4m/\pi d^2$, $\rho = C/z$.

3.º Aplicación: $z_0 = 4m/\pi d^2 \rho_0 = 4 \times 50 \times 10^{-3}/\pi \times 1{,}6^2 \times 10^{-4} \cdot 10^3 =$
$= 248{,}68$ mm.

La relación entre densidad y longitud sumergida es $\rho = 248{,}68/z$, en la que z debe expresarse en metros y ρ se obtiene en kg/m^3.

15.9 Equilibrio de los cuerpos flotantes

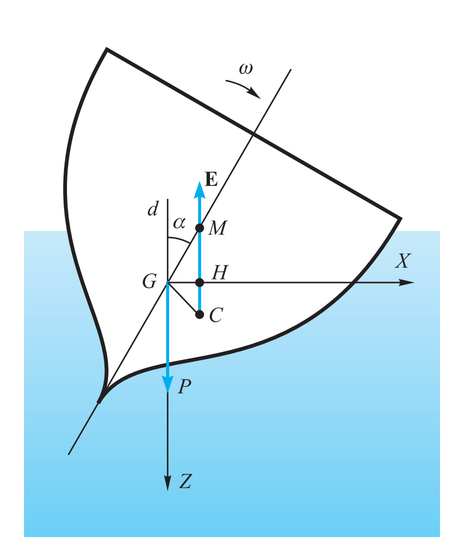


Figura 15.13.

La condición de equilibrio estable, que hemos visto para los cuerpos sumergidos, no es condición necesaria para la estabilidad de los cuerpos flotantes, es decir, puede existir equilibrio estable en un cuerpo flotante aun cuando su centro de gravedad esté situado por encima de su centro de empuje. Supongamos que esto sucede y saquemos el cuerpo de su posición de equilibrio, el centro de empuje variará de posición al variar la forma de la parte sumergida, pero no variará el empuje, que siempre ha de ser igual y opuesto al peso, lo que lleva consigo que el volumen desalojado siempre sea el mismo. En definitiva, aparece un par de fuerzas que se opone a que el cuerpo se aparte de su primitiva posición de equilibrio, si el punto de corte M, llamado *metacentro*, de la línea de acción de E con el eje del cuerpo está por encima de G, el equilibrio es estable. Pero este mismo par de fuerzas

tratará de volcarlo, si M está por debajo de G, equilibrio inestable. El equilibrio es indiferente cuando M coincide con G. La distancia del metacentro M al centro de gravedad G, d, se denomina *distancia metacéntrica*.

Distancia metacéntrica

En el caso de equilibrio estable, la inercia del cuerpo y el par que se opone a su movimiento hacen que se produzca una oscilación alrededor de la posición de equilibrio estable. La ecuación de este movimiento se obtiene por aplicación del teorema del momento cinético.

El momento de las fuerzas exteriores es:

$$\mathbf{M}_G = \mathbf{GC} \times \mathbf{E} = \mathbf{GH} \times \mathbf{E} = d \operatorname{sen} \alpha \, \mathbf{i} \times (-mg \, \mathbf{k}) = mgd \operatorname{sen} \alpha \, \mathbf{j}$$

siendo mg el peso del cuerpo y para pequeñas oscilaciones:

$$\mathbf{M}_G = mgd\alpha \, \mathbf{j}$$

que resulta ser proporcional a la distancia metacéntrica, siendo, por tanto, mayor la estabilidad cuanto mayor sea ésta.

El momento cinético es:

$$\mathbf{L}_G = I\boldsymbol{\omega} = -I\omega \, \mathbf{j} = -I \frac{d\alpha}{dt} \mathbf{j}$$

Ecuación en la cual I es el momento de inercia respecto al eje longitudinal que pasa por G, y sólo si es principal de inercia o paralelo a uno principal de inercia es rigurosamente cierta la expresión de $\mathbf{L}$.

El teorema del momento cinético se escribe:

$$I \frac{d^2\alpha}{dt} + mgd\alpha = 0$$

que es la ecuación de un movimiento armónico simple de pulsación:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \quad \text{y periodo:} \quad P = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Luego, para un mayor periodo de oscilación, debe aumentarse I y disminuirse d.

15.10 Atmósfera. Presión atmosférica

La atmósfera es la envoltura gaseosa que rodea la Tierra y se mantiene unida a ésta por la atracción gravitacional. Su composición química se conserva prácticamente homogénea hasta alturas de unos 80 km, debido al constante movimiento que provocan en el aire los gradientes térmicos y la rotación de la Tierra alrededor de su eje. Para el aire seco y puro, su composición media en tantos por ciento en volumen es:

Elemento	**Volumen %**
Nitrógeno	78,084
Oxígeno	20,9476
Argón	0,934
CO_2	0,0314
Neón	0,001818
Helio	0,000524
Metano	0,0002
SO_2	0,0001
Hidrógeno	0,00005
Kripton, Xenón, Ozono	0,0002

A partir de los 80 km los gases se encuentran estratificados, encontrándose el nitrógeno entre los 80 y los 100 km, el oxígeno, de 100 a 130 km, el helio, de 130 a 150 km y, por encima, el hidrógeno, hasta unos 200 km.

La atmósfera contiene, además, vapor de agua en cantidad variable, desde un 0,1 % en el aire frío y seco, hasta un 4 % en el aire caliente y húmedo, disminuyendo en cualquier caso con la altitud.

El contenido de CO_2 también es variable estacionalmente, disminuyendo en la primavera y el verano debido a la actividad fotosintética de las plantas verdes, para aumentar en invierno. Pero esta oscilación se superpone a una tendencia creciente debida a la actividad del hombre, que ha provocado un aumento constante de su contenido atmosférico durante el último siglo.

La atmósfera es fundamental para que pueda darse la vida sobre la Tierra y sin ella no sería posible, no solamente porque nos facilita oxígeno para la respiración y CO_2, para la función clorofílica, sino también por ser un sistema protector frente a meteoritos y a la radiación solar.

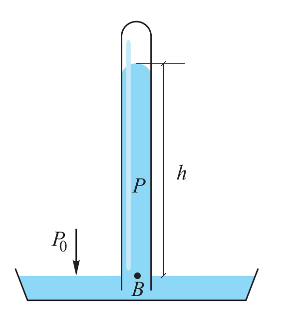


Figura 15.14.

La presión que la atmósfera ejerce sobre la superficie terrestre se denomina *presión atmosférica* y su determinación puede hacerse mediante un barómetro, cuya configuración más sencilla es un tubo de sección constante, cerrado por uno de sus extremos, en el que se ha colocado un líquido, generalmente mercurio. Se tapará el extremo abierto y, una vez introducido en una cubeta con el mismo líquido, se destapará. El líquido descenderá por el tubo, dejando un vacío en la parte superior y alcanzando una altura sobre su nivel en la cubeta, de forma que equilibre la presión atmosférica. Esta experiencia fue realizada por primera vez por Torricelli (1608-1647). La presión atmosférica, que se ejerce sobre la superficie del líquido en la cubeta, es igual a la que existe en el punto B de la base del líquido en el tubo, verificándose:

$$P_0 = \rho g h$$

Por tanto, conociendo la densidad del líquido utilizado a la temperatura que se realiza la medida, la aceleración de la gravedad en el lugar de la determinación, y midiendo h, podemos calcular el valor de la presión atmosférica. A nivel del mar la altura h es, aproximadamente, de 76 cm. La Conferencia Internacional de Pesas y Medidas, en 1972, definió la *atmósfera normal o atmósfera física* como la presión que sobre su base ejerce una columna de mercurio, de 76 cm de altura y densidad $\rho = 13{,}5951$ g/cm^3, bajo una aceleración de la gravedad $g_0 = 980{,}665$ cm/s^2. Su valor en pascales es:

Atmósfera física

$$1 \text{ atmósfera física} = 0{,}76 \cdot g \cdot 13{,}5951 \times 10^3 = \\ = 1{,}033 \cdot g \cdot 10^4 \text{ pascales} = 1{,}013 \times 10^5 \text{ pascales}$$

Atmósfera técnica

En la práctica, se utiliza frecuentemente como unidad de presión la *atmósfera técnica*, que es igual a la presión de un kp/cm^2; su equivalencia en pascales es:

$$1 \text{ atmósfera técnica} = 1 \text{ kp/cm}^2 = gN/\text{cm}^2 = g \cdot 10^4 \text{ pascales}$$

y, en consecuencia:

$$1 \text{ atmósfera física} = 1{,}033 \text{ atmósferas técnicas}$$

A la presión ejercida sobre su base por una columna de mercurio de 1 mm de altura, de las características y en las condiciones antes citadas, se denomina *torr* (en honor a Torricelli) o simplemente milímetro de mercurio (mmHg). Puesto que 760 mmHg son $1{,}013 \times 10^5$ Pa, será 1 mmHg = 133,29 Pa. En el apéndice se ha incluido una tabla de conversión entre las diferentes unidades para medir presiones.

Variación de la presión atmosférica con la altitud

Debido a la compresibilidad de los gases, la densidad atmosférica será variable con la presión y, por tanto, con la altitud. Para la integración de la Ecuación [15.1] no podemos ahora suponer la densidad constante, y admitiremos que ésta y la presión son directamente proporcionales:

$$\frac{P}{\rho} = \frac{P_0}{\rho_0}$$

siendo P_0 la presión a nivel del mar ($z = 0$) y ρ_0, la densidad del aire a esa presión. Con ello, la [15.1] se escribe:

$$dP = -\frac{\rho_0}{P_0} Pg\, dz$$

en la que hemos incluido el signo menos porque la presión disminuye con la altura. La fórmula anterior puede escribirse de la forma:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\rho_0}{P_0} g\, dz$$

cuya integración es inmediata:

$$\ln P = \frac{\rho_0}{P_0} gz + C$$

Puesto que para $z = 0$, $P = P_0$, la constante de integración es $C = \ln P_0$ y, con ello:

$$\ln \frac{P}{P_0} = -\frac{\rho_0}{P_0} \qquad \text{y} \qquad P = P_0 e^{-\frac{\rho_0}{P_0} gz} \qquad [15.6]$$

Para $\rho_0 = 1{,}28$ kg/m^3, $g = 9{,}8$ ms^{-2} y $P_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Pa es:

$$P = 1{,}013 \times 10^5 e^{-1{,}24 \times 10^{-4} z} \text{ Pa} \qquad [15.7]$$

EJEMPLO 15.7

Calculemos:

1.º La altura a la que hay que ascender para que la presión se reduzca a la mitad de la correspondiente a nivel del mar.

2.º El valor de la presión en la cima del Everest.

Solución:

1.º Aplicando la [15.7]:

$$\frac{1}{2} = e^{-1{,}24 \cdot 10^{-4} z_1}$$

y tomando neperianos: $-\ln 2 = -1{,}24 \cdot 10^{-4} z_1$, de donde, $z_1 = 5\,590$ m.

2.º Para la altura del Everest, $z = 8\,848$ m, la [15.7] da:

$$P = 1{,}013 \cdot 10^5 e^{-1{,}24 \cdot 10^{-4} 8\,848} = 1{,}013 \times e^{-1{,}97152} = 0{,}338 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 0{,}338 \text{ atm}$$

ARQUÍMEDES

Nació en el año 287 a.C. en Siracusa (Sicilia), que en aquella época pertenecía a Grecia. Parece ser que perteneció a una familia de alta clase social, hijo del astrónomo Phidias y amigo, e incluso posiblemente familiar, del Rey Hieron II, lo que hizo posible que llevara a cabo sus estudios en Alejandría, donde coincidió con Eratóstenes.

Fue el mejor matemático y físico de su época, y su ingente obra sigue teniendo plena vigencia en la actualidad. Plutarco le atribuye una inteligencia sobrehumana.

Obtuvo aproximaciones del número π, inscribiendo y circunscribiendo polígonos regulares en circunferencias, llegando a polígonos regulares de 96 lados y a la acotación de π: $310/71 < \pi < 31/7$. Sus cálculos de áreas de figuras planas y de longitudes de arcos pueden considerarse precursores del cálculo infinitesimal de Newton y Leibniz. Introdujo la idea de centro de gravedad y calculó su posición para diversos cuerpos. Demostró gran cantidad de teoremas de geometría; aquí, únicamente citaremos dos: *el volumen de una esfera es* 2/3 *del volumen del cilindro circunscrito*, lo que constituyo su teorema preferido, y *el volumen de un cono*, *el de una semiesfera y el de un cilindro*, *todos de la misma altura*, *están en la relación 1:2:3.*

Se le considera autor de más de cuarenta inventos mecánicos. Ideó, entre otras máquinas, la catapulta, la polea compuesta, la rueda dentada, el tornillo de Arquímedes o *tornillo sinfín* y la palanca, atribuyéndosele la célebre frase: «Dadme un punto de apoyo y moveré la Tierra».

Enunció su famoso principio de Arquímedes, como resultado de sus trabajos para determinar, por encargo del rey Hieron II de Siracusa, si la corona de éste era o no de oro, y cuando se le ocurrió la idea, parece ser que profirió el famoso grito *eureka* que, en griego significa «lo encontré».

Entre sus obras se encuentran: *Sobre la esfera y el cilindro*; *Sobre los conos y las esferas*; *Sobre la medida de un círculo*; *Sobre las espirales*, donde establece la ecuación de su famosa espiral; *Sobre el equilibrio de los planos*, donde establece la ley de la palanca y los c.d.g. de varios cuerpos; *Sobre la cuadratura de la parábola*; *Sobre los cuerpos flotantes*, en el cual establece su famoso principio y *Sobre el método de los teoremas mecánicos*, conocido simplemente por *El Método*, que es la obra más estudiada de Arquímedes y que en mejor estado ha llegado a nosotros. Su manuscrito original fue vendido en subasta y adquirido por un coleccionista americano por 2,2 millones de dólares.

Lamentablemente, en la conquista de Alejandría por los árabes ardió su famosa biblioteca y se perdió gran parte de la obra de Arquímedes. La parte que no sucumbió al fuego fue traducida al latín en la Edad Media y su influencia en el desarrollo científico de la humanidad ha sido enorme, baste decir que Galileo cita a Arquímedes unas cien veces y se refiere a él con expresiones como *diviníssimus Arquímedes* o *superhumanus Arquímedes*.

Puso todos sus conocimientos al servicio de la defensa de Siracusa frente a las legiones romanas mandadas por Marcelo y logró mantener la ciudad durante tres años. Las tropas invasoras le sorprendieron en el patio de su casa resolviendo propiedades de círculos que había pintado en el suelo. Aunque parece ser que Marcelo ordenó que se le apresara vivo, Arquímedes recibió a estas tropas con la famosa frase: «No toquéis mis círculos», negándose a ser apresado, por lo que un soldado lo mató. Marcelo mandó construir una tumba para Arquímedes sobre la que grabó los símbolos de su teorema preferido, una esfera inscrita en un cilindro, lo que posibilitó su descubrimiento por Cicerón en el año 75 a.C. Arquímedes murió en su misma ciudad natal el año 212 a.C.

Tensión superficial. Fenómenos capilares

CAPÍTULO 16

16.1 Fuerzas intermoleculares

Las moléculas ejercen unas sobre otras fuerzas que reciben el nombre de fuerzas intermoleculares. Las atracciones gravitatorias entre moléculas son despreciables frente a las acciones de origen eléctrico, siendo estas acciones distintas según la naturaleza de las moléculas en cuanto a la distribución de cargas dentro de ellas. Una molécula en la cual el centro de acción de sus cargas eléctricas positivas no coincide con el de sus cargas negativas se dice que es polar. Por el contrario, si ambos centros de acción coinciden, la molécula se dice no polar o apolar.

Dos moléculas polares próximas se ejercen entre sí fuerzas que son resultantes de las ejercidas entre las cargas positivas y negativas de una con las de la otra. Si las dos moléculas son apolares, las fuerzas que se ejercen tienen su origen en las fluctuaciones de las posiciones de las cargas dentro de ellas, que originan dipolos instantáneos. Finalmente, en el caso de ser una molécula polar y la otra no polar, debido al campo eléctrico creado por la primera, se polariza la segunda e interactuará de forma análoga a como lo hacen dos moléculas polares.

Las fuerzas intermoleculares que se ejercen entre dos moléculas próximas en función de la distancia que las separa, son de la forma indicada en la Figura 16.1. Para $r > ro$ es $F(r) < 0$ y las moléculas se atraen explicándose así la cohesión de sólidos y líquidos, siendo la magnitud de estas fuerzas proporcional a $1/r^7$ y denominándose a estas fuerzas de Van der Waals. Cuando r es grande, la fuerza de atracción es prácticamente nula, como sucede en los gases a baja presión. Para $r = r_0$, la fuerza intermolecular se anula y para $r < r_0$, las fuerzas son repulsivas, $F(r) > 0$, lo que permite a sólidos y líquidos soportar elevadas presiones.

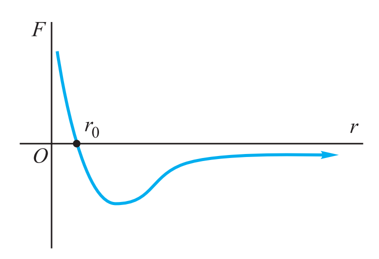


Figura 16.1.

En los sólidos, la distancia media de separación entre sus moléculas es $r = r_0$. Para el entorno de esta posición la curva $F = F(r)$ puede sustituirse por una recta, lo que nos indica que las fuerzas que aparecen cuando se modifica la posición relativa intermolecular son proporcionales a los desplazamientos relativos (ley de Hooke).

A las fuerzas de atracción entre moléculas de un mismo cuerpo se les denomina *fuerzas de cohesión* y, a las fuerzas de atracción entre moléculas de cuerpos distintos, *fuerzas de adherencia*.

Las moléculas tienen un cierto radio de acción, y se puede admitir que las fuerzas de cohesión son despreciables para distancias superiores a él.

16.2 Tensión superficial

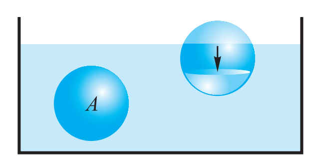


Figura 16.2.

La separación intermolecular en los líquidos es menor que el radio de acción de sus moléculas, lo que da lugar a la existencia de fuerzas de cohesión. Una molécula *A*, situada en el interior de la masa líquida (Figura 16.2), se encontrará sometida a fuerzas atractivas por parte de las moléculas contenidas en la esfera de centro *A* y radio el de acción molecular. Todas estas fuerzas, por razón de simetría, se anularán y la molécula quedará en equilibrio.

Si las moléculas están situadas a una distancia de la superficie libre del líquido inferior al radio de acción molecular, hay un casquete de su esfera de acción que queda fuera del líquido y, en consecuencia, la acción de las moléculas de líquido situadas en el casquete simétrico del anterior no está equilibrada, resultando que estas moléculas son atraídas hacia el interior de la masa líquida. Para aumentar la superficie libre del líquido, llevando a ella moléculas del interior, es necesario realizar un trabajo aumentando la energía del sistema. El aumento de energía del sistema será proporcional al número de moléculas llevadas a la superficie del mismo, es decir, al aumento de esta superficie.

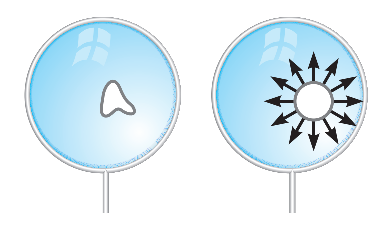


Figura 16.3.

Por tanto, la superficie libre del líquido posee una cierta energía potencial proporcional a su área, y dado que los sistemas tienden a ocupar el estado de mínima energía potencial, el líquido adoptará una forma tal que la superficie sea mínima. Esto puede comprobarse introduciendo un arillo de alambre en una solución jabonosa, al sacarlo se habrá formado una película de solución jabonosa limitada por el arillo. Si sobre ella se coloca un hilo que forme una curva cerrada cualquiera, al eliminar la solución jabonosa del interior del hilo, éste adopta forma circular debido a que la membrana jabonosa debe presentar superficie mínima (Figura 16.3).

Esta sencilla experiencia pone también de manifiesto que, sobre cada elemento, del hilo, la membrana ejerce una fuerza normal a él; a esta fuerza por unidad de longitud y de superficie de membrana se le denomina *tensión superficial*. Su ecuación de dimensiones será MT^{-2} y su unidad, en el S.I., es el $\mathrm{N \cdot m^{-1}}$.

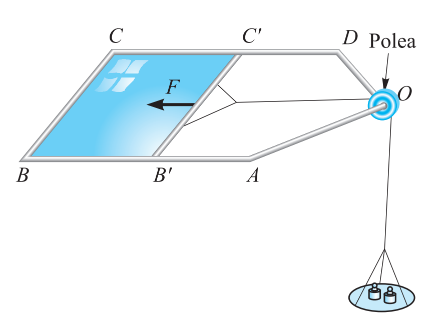


Figura 16.4.

La medida de la tensión superficial puede realizarse de la siguiente manera: un bastidor *ABCD* lleva móvil sin rozamiento, el lateral $B'C'$; se sumerge en una solución jabonosa y se elimina la película de jabón de la parte $AB'C'D$, quedando únicamente película de jabón en $B'BCC'$, que tratará de llevar el lateral $B'C'$ sobre *BC*, ejerciendo sobre él la fuerza:

$$F = 2\sigma l$$

en la que σ es la tensión superficial, l la longitud *BC*, y el factor 2 se debe a que la película tiene dos superficies activas. Si sujetamos el lateral $B'C'$ con un hilo que pase por una minúscula polea sin rozamiento y del cual cuelgue un platillo, colocando pesas en éste, podremos equilibrar a la fuerza *F* y conseguir que el lateral $B'C'$ quede en equilibrio. El peso del platillo más el de las pesas colocadas en él deberá ser igual a *F*, quedando así determinada σ:

$$\sigma = \frac{F}{2l} \qquad [16.1]$$

Si damos al lateral $B'C'$ un desplazamiento elemental dx, la fuerza *F* realizará el trabajo:

$$dW = 2\sigma l\, dx = \sigma\, dA$$

siendo $dA = 2l\,dx$ la variación de la superficie libre en el citado desplazamiento. Esto nos permite expresar la *tensión superficial* de la forma:

$$\sigma = \frac{dW}{dA} \qquad [16.2]$$

Es decir, *la tensión superficial es la energía necesaria para variar la superficie libre del líquido en la unidad de superficie*. Por tanto, su unidad podrá también ser el $J \cdot m^{-2}$.

Tabla 16.1. Tensión superficial de algunas sustancias a 20 ºC

Sustancia	σ N/m
Agua	0,0728
Alcohol etílico	0,0223
Benceno	0,0289
Glicerina	0,0631
Mercurio	0,465
Oxígeno	0,016

La tensión superficial disminuye de forma continua al ir aumentando la temperatura, lo que se explica por la disminución de la cohesión al aumentar la temperatura.

EJEMPLO 16.1

Un insecto apoya cuatro de sus patas sobre la superficie del agua, de forma que reparte su peso igualmente entre ellas. Admitiendo que el extremo de apoyo de la pata es esférico, de radio $R = 0{,}5$ mm (Figura 16.5), calculemos:

1.º El peso máximo del insecto para que no se hunda.

2.º La deformación de la superficie del agua si el peso del insecto es de 0,6 gramos.

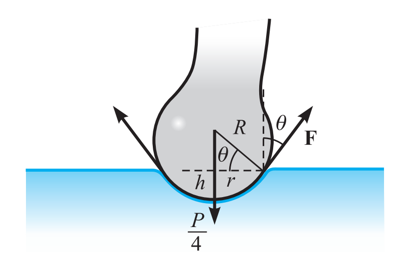


Figura 16.5.

Solución:

1.º Si el peso del insecto es p, cada pata debe soportar $p/4$. La fuerza de sustentación debe estar suministrada por la tensión superficial del agua, verificándose:

$$\frac{p}{4} = 2\pi r\sigma \cos\theta = 2\pi R\sigma \cos^2\theta$$

El valor máximo del peso es para $\cos\theta = 1$, lo que da:

$$p_{\text{máx}} = 8\pi R\sigma = 8\pi\, 0{,}5 \times 10^{-3}\, 0{,}072 = 0{,}905 \times 10^{-3} \text{ kg} = 0{,}905 \text{ g}$$

2.º La deformación de la superficie del agua es:

$$h = R - R \operatorname{sen}\theta$$

El valor de θ se obtiene de la primera expresión:

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{p}{8\pi R\sigma}} = \sqrt{\frac{0{,}3 \times 10^{-3}}{8\pi\, 0{,}5 \times 10^{-3}\, 0{,}072}} = 0{,}5758236$$

de donde $\theta = 0{,}9571852$ rad., con lo cual, $h = 0{,}091$ mm.

16.3 Membranas líquidas

Supongamos que una membrana líquida soporta una diferencia de presión Δp entre sus caras. Consideremos, en un entorno del punto P de ella, el elemento de superficie $dA = ds_1 \cdot ds_2$ (Figura 16.6). Para que el equilibrio subsista, debemos considerar las fuerzas que la membrana ejercía sobre este elemento y que están indicadas en la Figura 16.6; también se indican en éstas los radios de curvatura principales de la superficie en el punto P, R_1 y R_2, correspondientes a las curvas de intersección de la superficie con sendos planos normales a ella y entre sí.

La ecuación de equilibrio sobre la normal es:

$$\Delta p\, ds_1\, ds_2 = 2(2\sigma\, ds_1 \operatorname{sen} d\alpha + 2\sigma\, ds_2 \operatorname{sen} d\beta)$$

como son:

$$\operatorname{sen} d\alpha \cong d\alpha \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} d\beta \cong d\beta$$

y además:

$$d\alpha = \frac{ds_2}{2R_2} \quad \text{y} \quad d\beta = \frac{ds_1}{2R_1}$$

es:

$$\Delta p\, ds_1\, ds_2 = 2\sigma\, ds_1 \frac{ds}{R_2} + 2\sigma\, ds_2 \frac{ds_1}{R_1}$$

de donde:

$$\Delta p = 2\sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

En Geometría diferencial se define la curvatura media de una superficie en un punto P mediante la expresión:

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad [16.3]$$

resultando:

$$\Delta p = 4\sigma\gamma \qquad [16.4]$$

Ecuación conocida con el nombre de *ecuación de Laplace* que, en el caso de una superficie líquida, es:

$$\Delta p = 2\sigma\gamma \qquad [16.5]$$

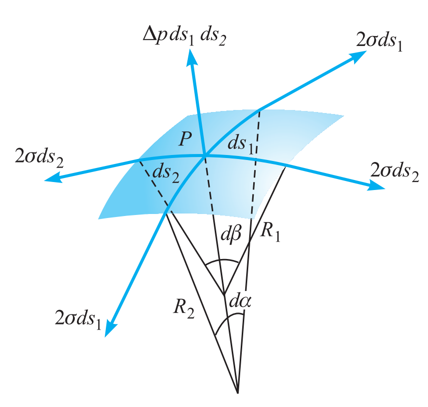
ya que éstas presentan una sola cara activa.

Un caso particular importante son las burbujas, que podemos considerar como membranas esféricas; se verifica:

$$R_1 = R_2 = R \quad \text{y} \quad \gamma = \frac{1}{2}$$

lo que da:

$$\Delta p = \frac{4\sigma}{R} \qquad [16.6]$$



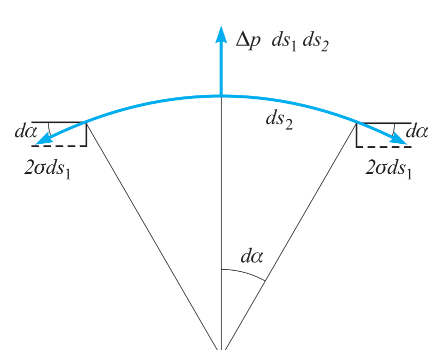


Figura 16.6.

En consecuencia, *la diferencia de presión que puede soportar una burbuja entre su interior y su exterior es directamente proporcional a la tensión superficial de la sustancia que la forma e inversamente proporcional a su radio.*

Una gota de agua adoptará forma esférica si sobre ella no actúan fuerzas exteriores, lo que exige que su masa sea pequeña para poder despreciar las fuerzas gravitacionales. En este caso, es la superficie exterior la que debe soportar la diferencia de presiones entre su interior y el exterior y, en consecuencia, esta diferencia es:

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R} \qquad [16.7]$$

EJEMPLO 16.2

Una gota de mercurio a la presión atmosférica normal y temperatura de 20 ºC tiene un diámetro de 4 mm, calculemos la presión que existe en su interior.

Solución:

La Expresión [16.7] nos da la diferencia de presión entre el interior de la gota y el exterior, cuyo valor es:

$$\Delta p = 2 \times \frac{0{,}44}{2 \times 10^{-3}} = 440 \text{ Pa}$$

La presión en el interior es:

$$p = p_0 + \Delta p = 1{,}013 \times 10^5 + 440 = 1{,}0174 \times 10^5 \text{ Pa}$$

16.4 Contacto líquido-sólido

Consideremos una molécula perteneciente a la línea de intersección de la superficie libre de un líquido con una pared sólida. Sobre ella, las demás moléculas del líquido situadas a una distancia menor al radio de acción, ejercerán una fuerza $\mathbf{F}_C$, *fuerza de cohesión*, y las moléculas del sólido, la fuerza $\mathbf{F}_A$, *fuerza de adhesión*. Ésta, por razón de simetría, si la pared es suficientemente amplia, será normal a dicha pared y aplicará contra ella la molécula. La fuerza de cohesión estará contenida en el plano bisector del ángulo formado por la pared y el plano tangente a la superficie del líquido en su línea de encuentro con aquélla (ángulo de contacto) y dirigida hacia el interior del líquido. La superficie del líquido en el punto ocupado por la molécula considerada debe ser normal a la resultante de estas dos fuerzas, $\mathbf{R} = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_C$ pues, de lo contrario, existiría una componente tangencial y, dado que los fluidos en equilibrio no pueden soportar esfuerzos tangenciales, éste no estaría en equilibrio. Hallemos la expresión analítica de la resultante $\mathbf{R}$ en un caso general como el indicado en la Figura 16.7:

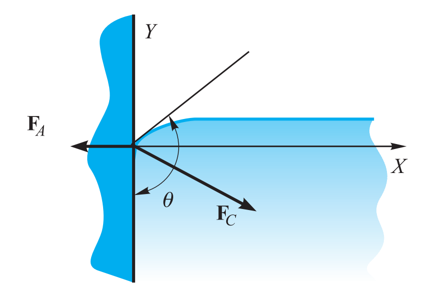


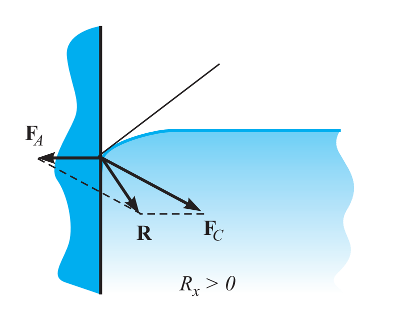
Figura 16.7.

$$\mathbf{F}_A = -F_A\,\mathbf{i}, \quad \mathbf{F}_C = F_C\left(\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\,\mathbf{i} - \cos\frac{\theta}{2}\,\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{R} = \left(F_C\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2} - F_A\right)\mathbf{i} - F_C\cos\frac{\theta}{2}\,\mathbf{j}$$

Pueden suceder dos casos, $R_x > 0$ o $R_x < 0$ (Figura 16.8). En el primero, la resultante queda comprendida en el espacio ocupado por el líquido; y la superficie de éste, para ser normal a ella, adoptará forma convexa, diciéndose que el líquido no moja el sólido y debiendo verificarse:

$$F_C \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} > F_A \quad \text{es decir:} \quad F_C > F_A$$



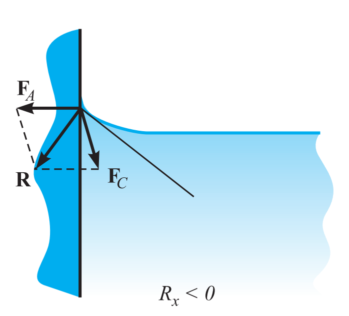


Figura 16.8.

En el segundo, la resultante queda en el espacio exterior al líquido; y la superficie de éste, para ser normal a ella, adoptará forma cóncava, diciéndose que el líquido moja el sólido y debiendo verificarse:

$$F_C \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} < F_A$$

lo que siempre sucederá si es $\mathbf{F}_A > \mathbf{F}_C$.

16.5 Ascensión y depresión en tubos capilares. Ley de Jurin

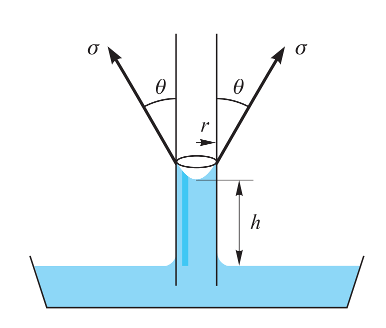


Figura 16.9.

Si un tubo abierto y de pequeño diámetro se introduce por uno de sus extremos en un líquido que moja al material de que está hecho el tubo, el líquido asciende por éste, debido a la fuerza ejercida por la tensión superficial σ (Figura 16.9). Si el radio del capilar es r y el ángulo de contacto θ, la fuerza ascensional vale $2\pi r\sigma \cos\theta$.

La fuerza que se opone a la ascensión es el peso de la columna líquida contenida en el interior del tubo, cuyo valor es $\pi r^2 h\rho g$, siendo ρ la densidad del líquido y h la altura de la columna en el interior del capilar.

El líquido quedará en equilibrio cuando se igualen la fuerza ascensional y el peso de la columna en el interior del capilar:

$$2\pi r\sigma \cos\theta = \pi r^2 \rho h g$$

$$h = \frac{2\sigma \cos\theta}{\rho g r} \qquad [16.8]$$

lo que nos indica que *la altura de ascensión en un tubo capilar cilíndrico es inversamente proporcional al radio del tubo* (ley de Jurin).

Si introducimos el tubo capilar abierto en un líquido que no moja al material que forma el tubo, lo que se produce es un descenso del líquido en el interior del mismo (Figura 16.10). El cálculo de este descenso puede hacerse de forma análoga a como se ha hecho para el caso anterior, sin embargo, consideramos interesante realizarlo como aplicación de la ecuación de Laplace.

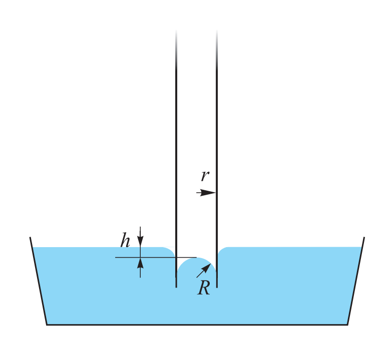


Figura 16.10.

La superficie libre del líquido en el interior del tubo capilar adopta una cierta forma que se denomina menisco. Por la parte exterior actúa sobre el menisco la presión atmosférica p_0, mientras que por la parte interior actúa la presión hidrostática $p_0 + pgh$, siendo su diferencia $\Delta p = \rho gh$. Considerando el menisco como una superficie esférica de radio R, la ecuación de Laplace, en este caso, es:

$$\rho gh = \frac{2\sigma}{R} = \frac{2\sigma\cos\theta}{r}$$

de donde:

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho gr}$$

que es idéntica a la [16.8].

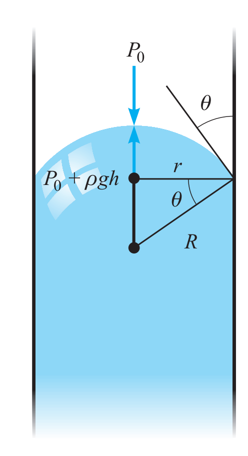


Figura 16.11.

16.6 Ascensión y depresión de líquidos entre láminas planas paralelas muy próximas

Si sumergimos en un líquido dos láminas paralelas separadas entre sí una distancia d muy pequeña, el líquido ascenderá o descenderá dentro de ellas, según que moje o no a las sustancias de que están hechas (Figura 16.12). Sea h la cota alcanzada por el líquido en el espacio entre láminas, el peso del líquido desplazado entre las láminas por unidad de longitud de éstas es ρghd.

La fuerza proporcionada por la tensión superficial y que equilibra este peso es $2\sigma\cos\theta$. Igualando ambas, resulta:

$$\rho gdh = 2\sigma\cos\theta$$

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho gd} \qquad [16.9]$$

lo que demuestra que el desnivel del líquido es la mitad del que se produciría en un tubo cuyo diámetro fuese igual a la separación entre láminas.

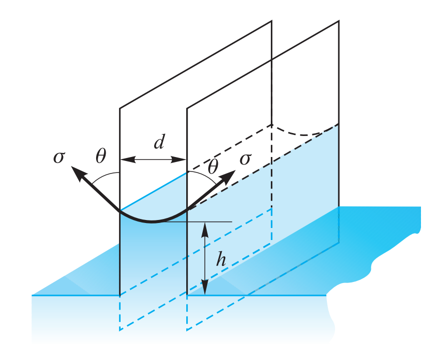


Figura 16.12.

16.7 Estudio de la superficie libre

Consideremos un punto del menisco que forma un líquido al ascender por un tubo capilar y sea z su cota sobre el plano de referencia, en el cual la presión es p_A (Figura 16.13). En el punto M, por la parte exterior del líquido, actúa la presión atmosférica p_0, y por el interior, la presión hidrostática $p_A - \rho gz$. Si es γ la curvatura media en el punto M, la ecuación de Laplace se escribe:

$$p_0 - p_A + \rho gz = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\rho gz = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + p_A - p_0$$

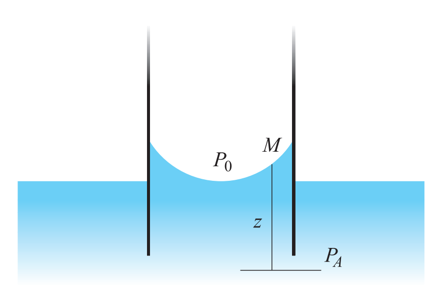


Figura 16.13.

Consideremos el caso de ascensión capilar por una pared plana vertical (Figurta 16.14). La superficie libre del líquido será una superficie cilíndrica y una de las curvaturas $1/R_2$ se anulará. Teniendo esto en cuenta y tomando como plano $z = 0$ a la superficie libre del líquido, la ecuación de Laplace es:

$$\rho gz = \frac{\sigma}{R} \qquad [16.10]$$

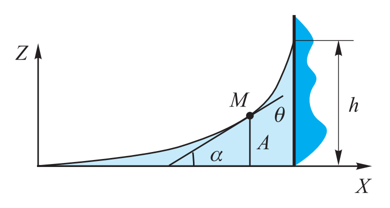


Figura 16.14.

siendo R el radio de curvatura de la sección recta de la superficie por un plano vertical. Designando α al ángulo que forma la tangente en M con el eje de las x, la definición de radio de curvatura permite escribir:

$$R = \frac{ds}{d\alpha}$$

siendo ds el elemento de arco de la sección recta de la superficie en M. Con ello, [16.10] se escribe:

$$\rho g z = \sigma \frac{d\alpha}{ds}$$

y, como es $dz = ds \operatorname{sen} \alpha$, resulta:

$$\rho g z \, dz = \sigma \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha$$

que integrada, teniendo en cuenta que para $z = 0$ es $\alpha = 0$, da:

$$z^2 = \frac{2\sigma}{\rho g} (1 - \cos \alpha) \qquad [16.11]$$

Si el ángulo de contacto es θ y la flecha del menisco h, particularizando la expresión anterior para un punto en contacto con la pared, obtenemos:

$$h^2 \text{-} 1 = \frac{2\sigma}{\rho g} (1 - \operatorname{sen} \theta) \qquad [16.12]$$

que permite, midiendo dos cualesquiera de las tres variables h, σ y θ, calcular el valor de la tercera.

Las mismas ecuaciones son aplicables al estudio de la superficie de una gran gota pesada o de una burbuja de gas aprisionada en el interior de un líquido, siendo, únicamente necesario que en el punto de tangencia horizontal presenten una zona plana y que pueda despreciarse la curvatura de las secciones horizontales.

16.8 Estalagmómetros. Ley de Tate

Debido a la tensión superficial, un líquido que fluye a través de un tubo capilar lo hace en forma de gotas. Cada una de éstas se desprende, en tubos verticales, cuando su peso supera las fuerzas debidas a la tensión superficial que actúan en el estrechamiento EE', en el momento del desprendimiento (Figura 16.15). El equilibrio en el instante anterior al desprendimiento verifica:

$$p = 2\pi r_1 \sigma$$

Ahora bien, el radio r_1 es proporcional al radio r del tubo, $r_1 = K_1 r$, pudiendo escribirse:

$$p = 2\pi k_1 r \sigma = k r \sigma$$

que constituye la expresión analítica de la ley de Tate: *el peso de la gota que cae es proporcional al radio del cuentagotas y a la tensión superficial del líquido.*

Si hacemos fluir sucesivamente por el mismo cuentagotas dos líquidos de distinta tensión superficial, se verificará:

$$p_1 = k r \sigma_1 \quad \text{y} \quad p_2 = k r \sigma_2$$

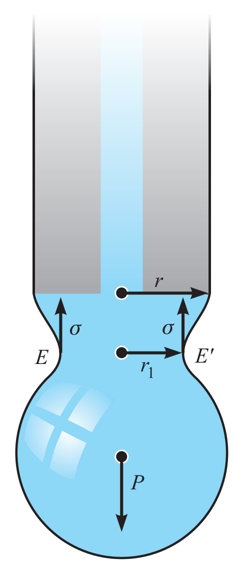


Figura 16.15.

Al hallar el cociente entre ambos resulta:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \qquad [16.13]$$

lo que permite calcular la tensión superficial de un líquido conociendo la tensión superficial de otro, pues bastará hacer fluir pesos conocidos de uno y otro por el mismo cuentagotas.

Si contamos el número de gotas n que se forman al fluir un volumen V de un cierto líquido de densidad ρ_1 y es p el peso de cada gota, será:

$$pn = V\rho g$$

Haciendo la misma operación con un volumen igual de un líquido de tensión superficial conocida, tendremos:

$$p_0 n_0 = V\rho_0 g$$

Al hallar el cociente de ambas expresiones:

$$\frac{pn}{p_0 n_0} = \frac{\rho}{\rho_0}$$

y teniendo en cuenta la [16.13], resulta:

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{n_0}{n} \frac{\rho}{\rho_0}$$

es decir, la tensión superficial es directamente proporcional a la densidad e inversamente proporcional al número de gotas necesarias para hacer fluir por un mismo capilar igual volumen de líquido.

Dinámica de fluidos

CAPÍTULO 17

17.1 Introducción

El movimiento de un fluido está definido por un campo vectorial de velocidades, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(r, t)$, correspondientes a las partículas del fluido y un campo escalar de presiones, $p = p(r, t)$ correspondientes a los distintos puntos del mismo.

El movimiento de un fluido puede obedecer, fundamentalmente, a dos tipos de regímenes: *régimen laminar* y *régimen turbulento*. *Régimen laminar* es aquél en el cual la función que define el campo de velocidades de sus partículas, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(r, t)$, es función unívoca de la posición r, es decir, para cada instante y en cada punto del espacio ocupado por el fluido, su velocidad es una: la partícula de fluido que llega a un punto debe tomar la velocidad que le corresponde a ese punto en el instante en que ella llega. Si el régimen laminar es, además, independiente del tiempo, se denomina *estacionario o permanente*, siendo unívoca la función $\mathbf{v} = \mathbf{v}(r)$; por tanto, a cada punto ocupado por el fluido le corresponde una velocidad constante y la partícula que llega a cada punto toma la velocidad que le corresponde a ese punto. *Régimen turbulento* es aquél para el cual la función $\mathbf{v} = \mathbf{v}(r, t)$ no es unívoca: a cada punto del espacio ocupado por el fluido le corresponde más de un vector velocidad.

Dentro del régimen laminar pueden presentarse dos tipos de movimiento: *rotacional* e *irrotacional*. El movimiento es *rotacional* cuando en alguno de sus puntos el fluido tiene una cierta velocidad angular respecto a aquél; si colocásemos en este punto una diminuta rueda con paletas, se pondría a girar alrededor de su eje. El movimiento es *irrotacional* cuando no presenta punto alguno con movimiento rotacional.

Debe también tenerse en cuenta si el fluido en su movimiento se comporta como compresible o incompresible. El comportamiento de los líquidos puede suponerse siempre como prácticamente incompresible, es decir, su densidad es prácticamente constante, mientras que los gases pueden comportarse de ambas formas; así, a bajas velocidades, los gases también se comportan como incompresibles, pero no a altas.

Finalmente, los fluidos pueden presentar en su movimiento un comportamiento *viscoso* o *no viscoso*, según que aparezcan o no dentro de ellos fuerzas cortantes o

tangenciales. Estudiaremos, en primer lugar, el movimiento de los fluidos perfectos o no viscosos y, posteriormente, el de los fluidos viscosos.

FLUIDOS PERFECTOS

Nos limitaremos aquí al estudio del movimiento de los fluidos perfectos incompresibles y en régimen estacionario.

17.2 Líneas de corriente. Ecuación de continuidad

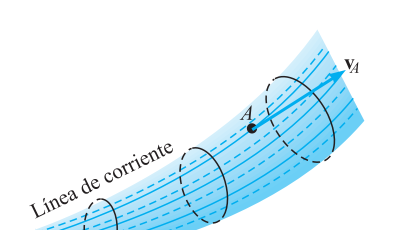


Figura 17.1.

Consideremos un punto A del fluido y sea en él la velocidad $\mathbf{v}_A$ (Figura 17.1). Toda partícula que llega a A, por ser el movimiento estacionario, deberá adquirir esta velocidad y, en consecuencia, su trayectoria queda determinada. Por tanto, toda partícula que llegue a A deberá seguir la misma trayectoria. A estas trayectorias se les denomina *líneas de corriente*. Evidentemente, en cada punto de una línea de corriente la velocidad es tangente a la misma. Asimismo, es obvio que dos líneas de corriente no pueden cortarse, puesto que la velocidad en el punto de corte no puede ser más que una. En consecuencia, si trazamos las líneas de corriente que pasan por los puntos de una línea cerrada contenida en el fluido, formarán una superficie que se denomina *tubo* o *filamento de corriente*. En todo punto de esta superficie la velocidad de la partícula de fluido es tangente a la superficie y, por tanto, no hay flujo de fluido a través de las paredes del tubo; todo fluido que entra por un extremo debe salir por el otro.

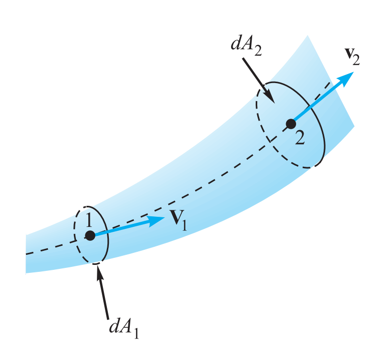


Figura 17.2.

Consideremos la línea de corriente que pasa por el punto 1 (Figura 17.2), en el cual la velocidad es $\mathbf{v}_1$, y un tubo de corriente en un entorno de esta línea. Sea dA_1, el área de la sección normal del tubo en el punto 1 y dA_2, la correspondiente al punto 2, en el cual la velocidad es $\mathbf{v}_2$. En la unidad de tiempo, por la sección 1 entra la masa del fluido $\rho_1 v_1\, dA_1$, siendo ρ_1 la densidad del fluido en el punto 1. Análogamente, por la sección 2, y en la unidad de tiempo, sale la masa $\rho_2 v_2\, dA_2$.

Si la masa en el interior del tubo permanece constante, es decir, además de no haber flujo a través de las paredes de éste, no hay variación en la densidad del fluido con el tiempo, deberá verificarse:

$$\rho_1 v_1\, dA_1 = \rho_2 v_2\, dA_2 \qquad [17.1]$$

que es una expresión de la *ecuación de continuidad de los fluidos*. Si el fluido es incompresible, $\rho_1 = \rho_2 =$ cte., la ecuación de continuidad se expresa:

$$v_1\, dA_1 = v_2\, dA_2 \qquad [17.2]$$

Si la velocidad es constante en todos los puntos de la sección 1 y sucede lo mismo en los puntos de la sección 2, la integración de [17.2] es

Ecuación de continuidad

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \qquad [17.3]$$

que es la denominada *ecuación de continuidad*, únicamente aplicable al caso para el que ha sido deducida.

El caudal Q que circula es el producto vA, $Q = vA$. Su ecuación de dimensiones es L^3T^{-1} y su unidad, en el S.I., el m^3/s. En función del caudal, la ecuación de continuidad se expresa $Q =$ cte., y establece que las velocidades son inversamente proporcionales al área de la sección recta del conducto.

EJEMPLO 17.1 **Circulación arterial**

La arteria aorta en el cuerpo humano tiene un diámetro medio de 2 cm y transporta un caudal medio de sangre de 88 cm^3/s. Calculemos:

1.º La velocidad de la sangre en la aorta.

2.º Si se ha producido una estenosis, que ha reducido la sección útil en un 60 %, ¿qué velocidad debe llevar la sangre para conseguir su aporte normal?

Solución:

1.º El área de la sección recta de la aorta es de $A = \pi d^2/4 = \pi$ cm^2. Para conseguir aportar el caudal indicado, la velocidad debe verificar $v \cdot \pi = 88$, $v = 28$ cm/s $\cong 1$ km/h.

2.º La estenosis reduce la sección útil a 0,4 A = 0,4 π cm^2 y, para mantener el caudal de sangre aportado, la velocidad debe verificar ahora $v' \cdot 0{,}4\pi = 88$, de donde:

$$v' = v/0{,}4 = 70 \text{ cm/s} = 2{,}52 \text{ km/h}$$

17.3 Teorema de Bernoulli

A lo largo de una línea de corriente, la velocidad del fluido y la presión serán función del arco $\mathbf{v} = \mathbf{v}(s)$ y $p = p(s)$. Tomemos un elemento de volumen de sección recta dA y longitud ds (Figura 17.3), la masa de éste es $dm = \rho\, dA\, ds$. En la dirección de su movimiento y tangente a la línea de corriente, las fuerzas que actúan son:

$$p\,dA, \quad -(p + dp)\,dA \quad \text{y} \quad -\rho g\, dA\, ds \cos\alpha = -\rho g\, dA\, dz$$

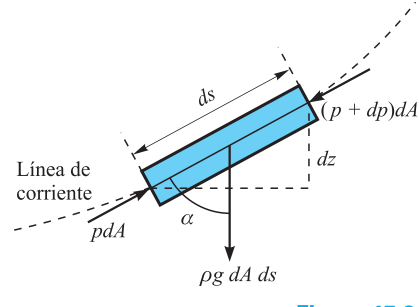


Figura 17.3.

La ecuación del movimiento es:

$$\rho\, dA\, ds \frac{dv}{dt} = -dp\, dA - \rho g\, dA\, dz$$

que, dividida por $\rho\, dA$ y teniendo en cuenta que es:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$$

resulta:

$$v\,dv = -\frac{dp}{\rho} - g\,dz \quad \text{o} \quad v\,dv + g\,dz + \frac{dp}{\rho} = 0$$

que integrada es:

$$\frac{v^2}{2} + gz + \int \frac{dp}{\rho} = \text{cte.} \qquad [17.4]$$

Ecuación de Saint-Venant

denominada ecuación de Saint-Venant.

Si el fluido es incompresible, ρ = cte., la Ecuación [17.4] se escribe:

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{cte.} \qquad [17.5]$$

que es la expresión analítica del teorema de Bernoulli y en la cual cada uno de los sumandos es una energía por unidad de masa, denominada, respectivamente, cinética, potencial y debida a las presiones.

Puesto que la ecuación de dimensiones de la energía es ML^2T^{-2}, la ecuación de dimensiones de la energía por unidad de masa es L^2T^{-2}, que son las dimensiones de cada uno de los miembros de [17.5]. En efecto:

$$\left[\frac{v^2}{2}\right] = [LT^{-1}]^2 = L^2T^{-2} \quad ; \quad [gz] = LT^{-2}L = L^2T^{-2}$$

y

$$\left[\frac{p}{\rho}\right] = \frac{FL^{-2}}{ML^{-3}} = \frac{MLT^{-2}L^{-2}}{ML^{-3}} = L^2T^{-2}$$

En consecuencia, el teorema de Bernoulli puede enunciarse así: *en un fluido perfecto, incompresible y en movimiento estacionario, la suma de las energías por unidad de masa cinética, potencial y debida a las presiones, permanece constante a lo largo de una línea de corriente*. Lo que, obviamente, constituye un principio de conservación de la energía.

Si la Ecuación [17.5] se escribe de la forma:

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = \text{cte.} \qquad [17.6]$$

cada uno de los sumandos es una longitud, altura sobre un plano de referencia o cota: z es la *cota geométrica*; $p/\rho g$ es la *cota piezométrica* o altura que debería darse a una columna de líquido para que ejerza la presión p; y $v^2/2g$ es la cota desde la que sería necesario dejar caer una partícula de líquido en el vacío para que adquiriese la velocidad que realmente lleva, se le denomina altura debida a la velocidad.

Si el fluido está en equilibrio, $v = 0$, la ecuación de Bernoulli conduce como caso particular a la ecuación de la Hidrostática.

17.4 Aplicaciones del teorema de Bernoulli

a) *Flujo de un líquido en una tubería de sección variable.*

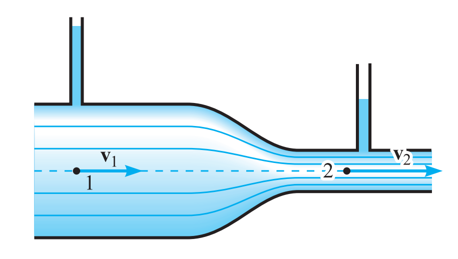


Figura 17.4.

Sea una tubería como la indicada en la Figura 17.4, que presenta un estrechamiento no brusco para evitar turbulencias. Consideremos dos puntos de una misma línea de corriente, los 1 y 2, y sean las velocidades y secciones normales en estos puntos, v_1, v_2, A_1 y A_2, respectivamente.

La ecuación de Bernoulli para la línea de corriente considerada puede escribirse de la forma:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho}$$

y, en función del caudal $Q = v_1A_1 = v_2A_2$, resulta:

$$\frac{Q^2}{2A_1^2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{Q^2}{2A_2^2} + \frac{p_2}{\rho} \qquad [17.7]$$

observándose que los puntos en los que la sección es menor y, por tanto, el fluido lleva mayor velocidad, están sometidos a una presión menor, efecto que se conoce con el nombre de Venturi, y que puede ponerse de manifiesto colocando unos tubos de pequeña sección, que se denominan piezómetros, pues nos medirán la altura piezométrica o debida a las presiones; en el situado en la sección correspondiente

al punto 1, el líquido alcanzará mayor altura que en el correspondiente a la sección 2; puesto que en aquélla la presión es mayor que en ésta.

b) *Venturímetro.*

Es éste un dispositivo empleado para la medida del caudal del líquido que fluye por una tubería. Para ello, debe practicarse en ésta un suave estrechamiento y colocar un dispositivo (manómetro diferencial) que nos permita medir la diferencia de presión del fluido en la tubería y en la zona del estrechamiento (Figura 17.5).

La Ecuación [17.7], deducida en el apartado anterior, permite despejar el caudal Q que circula por la tubería:

$$Q = A_1 A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$$

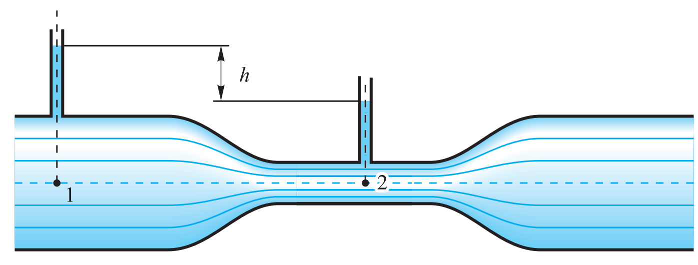


Figura 17.5.

teniendo en cuenta que es $p_1 - p_2 = \rho g h$, es:

$$Q = A_1 A_2 \sqrt{\frac{2gh}{A_1^2 - A_2^2}} = C\sqrt{h} \qquad [17.8]$$

siendo C una constante específica de cada venturímetro, cuya expresión es:

$$C = A_1 A_2 \sqrt{\frac{2g}{A_1^2 - A_2^2}}$$

c) *Trompa de agua.*

Un dispositivo como el que se esquematiza en la Figura 17.6 constituye una trompa de agua o pulverizador. Veamos en qué está basado su funcionamiento. Apliquemos el teorema de Bernoulli entre los puntos 1 y 2:

$$\frac{p_1}{\rho_a} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho_a} + \frac{v_2^2}{2}$$

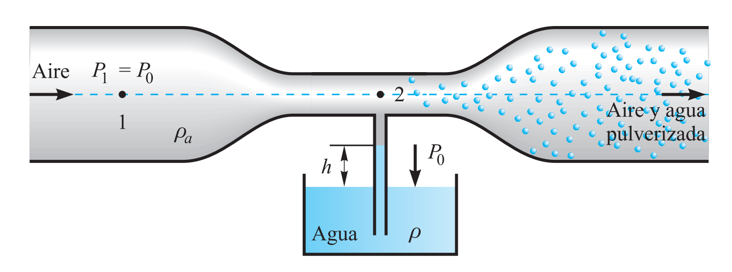


Figura 17.6.

Despejemos p_2:

$$p_2 = p_1 - \frac{\rho_a}{2}(v_2^2 - v_1^2)$$

y, teniendo en cuenta la ecuación de continuidad [17.3], se expresa:

$$p_2 = p_1 - \frac{\rho_a}{2}\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right]v_1^2$$

Al aumentar la velocidad v_1 de entrada del aire en la trompa, disminuye la presión en 2 y el agua asciende por el tubo vertical, puesto que h aumenta, ya que su valor es:

$$h = \frac{p_1 - p_2}{\rho g}$$

El agua, al llegar en su ascenso al tubo horizontal, es arrastrada por la corriente de aire y sale pulverizada.

d) *Tubo de Pitot.*

Es un dispositivo usado para medir la velocidad de gases en tuberías y se esquematiza en la Figura 17.7. Considerando que la conducción del gas es horizontal y que la velocidad de éste en el punto 2 es nula, por impedir su paso el líquido del tubo manométrico, la ecuación de Bernoulli, admitiendo que la densidad del gas permanece constante, se escribe:

Figura 17.7.

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho}$$

y la velocidad v_1:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_2 - p_1)}$$

Teniendo en cuenta que es $p_2 - p_1 = \rho g h$, resulta:

$$v_1 = \sqrt{2gh\frac{\rho_1}{\rho}}$$

siendo ρ la densidad del gas y ρ_1 la del líquido del tubo manométrico.

e) *Sonda de Prandtl.*

Es un dispositivo análogo al anterior y se utiliza para los mismos fines (Figura 17.8). En la misma hipótesis del caso anterior, la ecuación de Bernoulli se escribe:

Figura 17.8.

$$\frac{p_1}{\rho} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_1 - p_2)} \quad \text{y} \quad v_2 = \sqrt{2gh\frac{\rho_1}{\rho}}$$

f) *Teorema de Torricelli.*

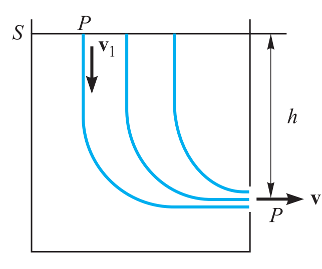


Figura 17.9.

La aplicación del teorema de Bernoulli al estudio del flujo de un líquido contenido en un recipiente, a través de un pequeño orificio practicado en la pared de éste, bajo la acción de la gravedad, da como resultado la obtención del teorema de Torricelli: *la velocidad de salida de un líquido por un pequeño orificio, practicado en la pared de un gran depósito, es la misma que llevaría un grave, abandonado sin velocidad inicial al nivel de la superficie libre del líquido, al pasar por el plano horizontal que contiene al centro del orificio.*

La aplicación del teorema de Bernoulli entre un punto de la superficie libre y uno de la sección del orificio (Figura 17.9), da:

$$\frac{v_1^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} = \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}$$

La ecuación de continuidad es $v_1 S = vs$ y, si la superficie libre del líquido S, es muy grande comparada con la superficie del orificio s, la velocidad v_1 será mucho menor que v, y el término $v_1^2/2$, despreciable frente a $v^2/2$, resultando: $v = \sqrt{2gh}$, que es la expresión analítica del ya enunciado teorema de Torricelli.

17.5 Cantidad de movimiento y momento cinético. Acción sobre la conducción

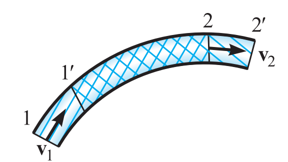


Figura 17.10.

Consideremos un filamento de corriente, limitado por dos secciones rectas de áreas S_1 y S_2, en un líquido animado de un movimiento permanente (Figura 17.10). La variación en la unidad de tiempo de la cantidad de movimiento del fluido que ocupa el filamento debe ser igual a la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre él. Sean v_1 y v_2 las velocidades de entrada por la sección 1 y de salida por la 2, respectivamente. En la unidad de tiempo, el fluido habrá pasado de la posición 1-2 a la 1′-2′ y la cantidad de movimiento del fluido se habrá incrementado en la correspondiente al fluido comprendido entre 2-2′, que vale $\dot{\mathbf{P}}_2 = \rho S_2 v_2 \mathbf{v}_2$ y ha disminuido en la correspondiente al fluido comprendido entre 1-1′, cuyo valor es $\dot{\mathbf{P}}_1 = -\rho S_1 v_1 \mathbf{v}_1$. Por tanto, la resultante del sistema de fuerzas que actúan sobre el filamento es:

$$\sum \mathbf{F}_i = \rho S_2 v_2 \mathbf{v}_2 - \rho S_1 v_1 \mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{P}}_2 + \dot{\mathbf{P}}_1$$

Hay que hacer notar que, en esta ocasión, simbolizamos con **P** la cantidad de movimiento, para distinguirla de la presión p.

Aplicando el teorema del momento cinético, la variación de éste en la unidad de tiempo es debida al momento cinético de la parte 2-2′ más la debida al momento cinético de la parte 1-1′; debe ser igual al momento resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre el filamento:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}(\rho S_2 v_2 \mathbf{v}_2, \ -\rho S_1 v_1 \mathbf{v}_1) = \mathbf{M}(\dot{\mathbf{P}}_2, \dot{\mathbf{P}}_1) = \sum \mathbf{M}(\mathbf{F}_i)$$

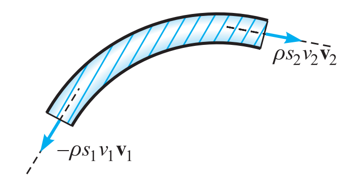


Figura 17.11.

En consecuencia, *el sistema de fuerzas exteriores que actúan sobre el filamento de fluido es equivalente al sistema de dos vectores*, $-\rho S_1 v_1 \mathbf{v}_1$ y $\rho S_2 v_2 \mathbf{v}_2$, cuyas líneas de acción pasan, respectivamente, por los centros de las secciones 1 y 2, y son normales a ellas.

Acción sobre una conducción. Las acciones que ejerce la conducción sobre una porción de líquido considerada, y que denominaremos **CL**, más las debidas a

las presiones en las secciones que limitan la porción de líquido considerada, que se expresan:

$$\mathbf{f}_1 = S_1 p_1 \frac{\mathbf{v}_1}{v_1} \quad \text{y} \quad \mathbf{f}_2 = -S_2 p_2 \frac{\mathbf{v}_2}{v_2}$$

deben ser equivalentes al sistema de dos vectores antes citado:

$$(\mathbf{CL}, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) \simeq (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) \qquad [17.9]$$

En consecuencia, la acción de la conducción sobre la porción de líquido considerada debe ser equivalente al sistema de dos vectores, $\mathbf{P}_1 - \mathbf{f}_1$ y $\mathbf{P}_2 - \mathbf{f}_2$:

$$(\mathbf{CL}) \simeq (\mathbf{P}_1 - \mathbf{f}_1, \mathbf{P}_2 - \mathbf{f}_2)$$

En efecto, ambos sistemas tienen la misma resultante, ya que por [17.9] debe ser:

$$\mathbf{CL} + \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$$

y de aquí:

$$\mathbf{CL} = \mathbf{P}_1 - \mathbf{f}_1 + \mathbf{P}_2 - \mathbf{f}_2$$

Análogamente para los momentos, puesto que por [17.9] es:

$$\mathbf{M}_0(\mathbf{CL}) + \mathbf{M}_0(\mathbf{f}_1) + \mathbf{M}_0(\mathbf{f}_2) = \mathbf{M}_0(\mathbf{P}_1) + \mathbf{M}_0(\mathbf{P}_2)$$

y por tener la misma dirección los vectores $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{f}_2$, se puede escribir:

$$\mathbf{M}_0(\mathbf{CL}) = \mathbf{M}_0(\mathbf{P}_1 - \mathbf{f}_1) + \mathbf{M}_0(\mathbf{P}_2 - \mathbf{f}_2)$$

La acción del líquido sobre la conducción, **LC**, será equivalente a los dos vectores $\mathbf{f}_1 - \mathbf{P}_1$ y $\mathbf{f}_2 - \mathbf{P}_2$:

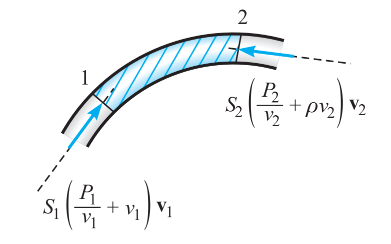


Figura 17.12.

$$(\mathbf{LC}) \simeq (\mathbf{f}_1 - \mathbf{P}_1, \mathbf{f}_2 - \mathbf{P}_2) = \left[S_1\left(\frac{p_1}{\mathbf{v}_1} + \rho v_1\right)\mathbf{v}_1 - S_2\left(\frac{p_2}{\mathbf{v}_2} + \rho v_2\right)\mathbf{v}_2\right] \qquad [17.10]$$

cuyas líneas de acción pasan, respectivamente, por los centros de las secciones 1 y 2, y son normales a ellas (Figura 17.12).

FLUIDOS VISCOSOS

17.6 Viscosidad

En los fluidos reales en movimiento aparecen fuerzas que se oponen al movimiento relativo entre capas contiguas y que se denominan *fuerzas de viscosidad*, y son la causa de la disipación de la energía mecánica del fluido y del consiguiente calentamiento del mismo.

Hipótesis de Navier.

La hipótesis de Navier establece que la fuerza de viscosidad entre dos capas de fluido en contacto es proporcional a la superficie y al gradiente de velocidades según la dirección de la normal común a ambas superficies:

$$d\mathbf{F} = \eta \frac{d\mathbf{v}}{dn} dS \qquad [17.11]$$

llamándose al coeficiente de proporcionalidad η *coeficiente de viscosidad absoluta o dinámica*. Su ecuación de dimensiones es:

Coeficiente de viscosidad dinámica.

$$[\eta] = \frac{\text{Fuerza longitud}}{\text{Velocidad superficie}} = \frac{MLT^{-2}L}{LT^{-1}L^2} = ML^{-1}T^{-1}$$

y su unidad en el sistema C.G.S. se denomina Poise (P). En el S.I. la unidad es el $N \cdot s/m^2 = Pa \cdot s$, sin nombre especial. La equivalencia entre ambas unidades es:

$$1 \text{ P} = 0{,}1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

En numerosos problemas de la Dinámica de fluidos aparece el coeficiente:

$$v = \frac{\eta}{\rho} \qquad [17.12]$$

que se denomina *coeficiente de viscosidad cinemática*, cuya ecuación de dimensiones es L^2T^{-1}, denominándose a su unidad en el sistema C.G.S., stokes. La unidad en el S.I., que es el m^2/s, no tiene nombre especial.

Coeficiente de viscosidad cinemática.

El valor del coeficiente de viscosidad depende de la naturaleza del fluido. En los líquidos disminuye al aumentar la temperatura, según la ecuación:

$$\eta = Ae^{\frac{B}{T}} \qquad [17.13]$$

mientras que en los gases aumenta muy lentamente al aumentar la temperatura, según la ley:

$$\eta = A\frac{\sqrt{T}}{1 - \frac{B}{T}} \qquad [17.14]$$

Tanto en unos como en otros, el coeficiente de viscosidad puede considerarse prácticamente independiente de la presión.

La inversa de la viscosidad dinámica se llama fluidez, $\varphi = \eta^{-1}$.

Tabla 17.1. Viscosidad dinámica η

Sustancia	η Pa · s · 10^{-3}	T °C
Líquidos		
Agua	1,789	0
Agua	1,005	20
Agua	0,285	99
Alcohol etílico	1,190	20
Mercurio	1,554	20
Aceite SAE-10*	200,0	20
Glicerina	1499,0	20
Gases (1 atm)		
Aire	0,017	0
Aire	0,0182	20
Monóxido de carbono ..	0,0176	20
Dióxido de carbono	0,0147	20
Vapor de agua	0,013	100
Hidrógeno	0,0084	0
Argon	0,0222	20

* SAE (Society Automotive Engineers).

17.7 Pérdida de carga en una conducción

Si entre dos secciones de una conducción no hay conservación de la energía, la Expresión [17.5] no se conserva entre esas secciones y debemos escribirla de la forma:

$$\frac{1}{2}v_1^2 + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{1}{2}v_2^2 + gz^2 + \frac{p_2}{\rho} + W_m$$

en la que W_m es la pérdida de energía por unidad de masa entre las secciones 1 y 2, o *pérdida de carga por unidad de masa* entre ambas secciones:

$$W_m = \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) + g(z_1 - z_2) + (p_1 - p_2)/\rho \qquad [17.15]$$

Con frecuencia, aparece la pérdida de carga expresada por unidad de volumen:

$$W_v = \rho W_m = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) + \rho g(z_1 - z_2) + p_1 - p_2 \qquad [17.16]$$

y, en otros casos, por unidad de peso:

$$W_p = \frac{W_m}{g} = \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2)/g + z_1 - z_2 + (p_1 - p_2)/\rho g \qquad [17.17]$$

En cualquier caso, y puesto que la pérdida de carga es proporcional a la longitud de la conducción, es usual dar la pérdida de carga por unidad de longitud de conducción:

$$w_m = \frac{W_m}{L} \quad , \quad w_v = \frac{W_v}{L} \quad \text{y} \quad w_p = \frac{W_p}{L}$$

La pérdida unitaria de carga, en el caso más general, puede ser función de la densidad del fluido, ρ; de su viscosidad cinemática, ν; de la velocidad media en la conducción considerada, v, y del diámetro de esa conducción, d, lo que se expresa

$$w = F(\rho, \nu, v, d)$$

que puede escribirse:

$$w = \frac{\rho v^2}{2d} f(\rho, \nu, v, d)$$

Puesto que la pérdida de la carga unitaria y el factor $\rho v^2/2d$ tienen las mismas dimensiones, la función f debe ser adimensional, de aquí que, en ella, no pueda intervenir ρ, ya que es la única de las cuatro variables en la que aparece la magnitud masa. Las otras tres deberan agruparse en una expresión adimensional. Puesto que sus dimensiones son $[\nu] = L^2T^{-1}$, $[v] = LT^{-1}$ y $[d] = L$, la expresión buscada es el llamado número de Reynolds, R_e:

Número de Reynolds

$$R_e = \frac{vd}{\nu} = vd\,\frac{\rho}{\eta} \qquad [17.18]$$

resultando:

$$w = \frac{\rho v^2}{2d} f(R_e) = \frac{\rho v^2}{2d} f\left(\frac{vd}{\nu}\right) \qquad [17.19]$$

La determinación de la función f debe hacerse experimentalmente.

17.8 Regímenes laminar y turbulento

Al determinar experimentalmente la función f, si en abscisas tomamos el logaritmo del número de Reynolds y en ordenadas el valor del logaritmo de f, resulta una curva como la indicada en la Figura 17.13. Hay un valor del número de Reynolds, llamado crítico, por debajo del cual el régimen es laminar, a la velocidad correspondiente se le denomina *velocidad crítica*:

$$v_c = \frac{R_c v}{d}$$

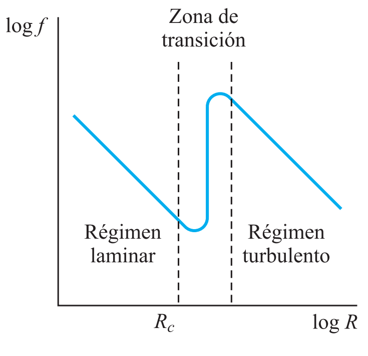


Figura 17.13.

En general, valores del número de Reynolds inferiores a 2 300 indican que el régimen es laminar y valores superiores a 4 000 indican que el régimen es turbulento:



$R_e < 2\,300$ Régimen laminar

$R_e > 4\,000$ Régimen turbulento

EJEMPLO 17.2

Una tubería de diámetro 2’’ suministra un caudal de agua de $Q = 4$ l/s, en estado estacionario. Determinemos:

1.º La velocidad del agua en la tubería.

2.º El número de Reynolds.

Solución:

1.º La velocidad del agua en la tubería se obtiene de la ecuación de continuidad $Q = vA$. El diámetro de la tubería es $D = 2'' = 2 \times 0{,}0254$ m $= 0{,}0508$ m, con ello, el área de la sección recta de la tubería es $A = \frac{1}{4}\pi D^2 = 0{,}00203$ m^2 y la velocidad buscada es:

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{4 \times 10^{-3}}{0{,}00203} = \frac{4}{2{,}03}\ \text{m/s} = 1{,}97\ \text{m/s}$$

2.º El número de Reynolds, tomando para la densidad del agua $\rho = 10^3$ kg/m^3 y para su viscosidad dinámica $\eta = 1{,}005 \times 10^{-3}$ Pa · s, es:

$$R_e = \frac{vD}{\nu} = \frac{vD}{\eta}\rho = \frac{1{,}97 \times 0{,}0508}{1{,}005 \times 10^{-3}}10^3 = 0{,}0996 \times 10^6 = 9{,}96 \times 10^4$$

lo que nos indica que el régimen en la tubería es turbulento.

17.9 Régimen laminar: pérdida de carga

Si tomamos en ordenadas $\log f(R_e)$ y en abscisas, $\log R_e$ (Figura 17.13) se comprueba que en la zona correspondiente al régimen laminar, la función $\log f(R_e)$ es una recta de pendiente -1, por lo cual, se expresa de la forma:

$$\log f(R_e) = \log C - \log R_e = \log \frac{C}{R_e}$$

Tomando antilogaritmos, es $f(R_e) = \frac{C}{R_e}$, con lo cual, la pérdida de carga dada por [17.19] se expresa:

$$w = \frac{\rho v^2}{2d}\frac{C}{R} = \frac{C}{2}\frac{\rho v v}{d^2}$$

y el caudal que fluye por la tubería es:

$$Q = vS = \frac{2wd^2}{C\rho v}\frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{2C}\frac{wd^4}{\eta}$$

Ley de Poiseuille

fórmula que expresa la conocida ley de Poiseuille: *el flujo laminar de un fluido viscoso por una tubería cilíndrica es proporcional a la cuarta potencia del diámetro de la tubería y a la pérdida unitaria de carga en la tubería, siendo inversamente proporcional al coeficiente de viscosidad dinámica del fluido.*

17.10 Otra deducción de la ley de Poiseuille

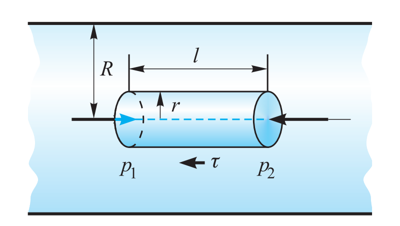


Figura 17.14.

Analicemos el flujo de un fluido viscoso en un tubo cilíndrico. Admitiremos la hipótesis de que la presión es constante en todos los puntos de una misma sección recta, lo que supone despreciar la presión debida al peso del líquido. Por razones de simetría, consideraremos un elemento de líquido cilíndrico centrado con el eje de la tubería (Figura 17.14).

En el movimiento estacionario, la suma de las fuerzas que actúan sobre el cilindro considerado debe ser nula y, en particular, su componente sobre el eje de la tubería, lo que se expresa:

$$\pi r^2 p_1 - \pi r^2 p_2 - 2\pi r l \tau = 0$$

o

$$r(p_1 - p_2) + 2\eta l \frac{dv}{dr} = 0$$

ya que es:

$$\tau = -\eta \frac{dv}{dr}$$

puesto que la velocidad disminuye al aumentar el radio. La ecuación diferencial puede escribirse:

$$dv = -\frac{r(p_1 - p_2)}{2\eta l} dr$$

y su integración da:

$$v = -\frac{r^2(p_1 - p_2)}{4\eta l} + \text{cte}$$

Para el cálculo de la constante de integración, consideraremos que la velocidad es nula en la capa líquida en contacto con la tubería, es decir, $v = 0$ para $r = R$ y la constante de integración vale:

$$\frac{R^2(p_1 - p_2)}{4\eta l}$$

resultando para la velocidad la expresión:

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

Existe, pues, un reparto parabólico de velocidades (Figura 17.15), siendo la velocidad máxima la correspondiente al eje de la tubería, $r = 0$:

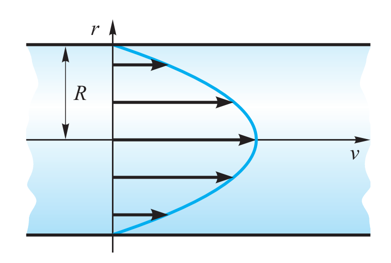


Figura 17.15.

$$v_{\text{máx}} = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2$$

El caudal que fluye por la corona de radios, r y $r + dr$, es:

$$dQ = v\,dS = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l}(R^2 - r^2)2\pi r\,dr$$

y el caudal total que fluye por la tubería es:

$$Q = \int_0^R dQ = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{2\eta l}\int_0^R (R^2 - r^2)r\,dr =$$

$$= \frac{\pi(p_1 - p_2)}{8\eta l}R^4 = \frac{\pi \Delta p}{8\eta}R^4 \qquad [17.20]$$

que es la expresión de la ya conocida ley de Poiseuille.

EJEMPLO 17.3 Flujo arterial

Debido a la arteriosclerosis, una arteria ha reducido su diámetro de paso a la mitad. Suponiendo que el flujo de sangre en las arterias es laminar y estacionario, determinemos el aumento del gradiente de presiones que debe suministrar el corazón, para mantener el flujo de sangre constante.

Solución:

Utilizando la Expresión [17.20], al reducirse el diámetro a la mitad, $R/2$, para mantener constante el caudal de sangre Q, el gradiente de presiones a lo largo de la arteria debe modificarse, verificando:

$$Q = \frac{\pi}{8\eta}\Delta' p \left(\frac{R}{2}\right)^4 = \frac{\pi \Delta' p}{8\eta}\frac{R^4}{16}$$

de donde:

$$\Delta' p = 16\frac{8\eta Q}{\pi R^4} = 16\Delta p$$

Es decir, el corazón debe suministrar una presión 16 veces superior a la que necesitaria en el estado normal de la arteria.

17.11 Régimen turbulento

Si tomamos en ordenadas $\log f(R_e)$ y en abscisas, $\log R_e$ (Figura 17.13), en la zona correspondiente al régimen turbulento, la función $\log f(R_e)$ resulta ser una recta de pendiente $-1/4$, pudiendo expresarse:

$$\log f(R_e) = \log C - \frac{1}{4}\log R_e = \log CR_e^{-1/4}$$

y tomando antilogaritmos:

$$f(R_e) = CR_e^{1/4}$$

con lo cual, la pérdida de carga resulta ser ahora:

$$w_T = \frac{\rho v^2}{2d} CR_e^{-1/4} = \frac{C}{2}\rho \nu^{1/4}\frac{v^{7/4}}{d^{5/4}} \qquad [17.21]$$

La pérdida de carga es superior a la correspondiente al régimen laminar, verificando:

$$\frac{w_T}{w_L} = \frac{\nu^{1/4}v^{7/4}d^2}{\nu v d^{5/4}} = \nu^{-3/4}v^{3/4}d^{3/4} = R_e^{3/4}$$

En consecuencia, la energía disipada es superior y el caudal transportado inferior.

17.12 Resistencia de los fluidos al movimiento de un sólido en su interior

Los fluidos oponen una resistencia al movimiento de los sólidos en su interior, resistencia que depende, en primer término, del movimiento relativo entre el sólido y el fluido.

A pequeñas velocidades relativas, el fluido se desplaza en torno al sólido de acuerdo con un régimen laminar, la capa en contacto con el sólido es inmóvil respecto a éste y las demás capas del líquido se deslizan unas respecto de otras, dando lugar a la aparición de esfuerzos cortantes debidos a la viscosidad. La resistencia que ofrece el fluido es proporcional a la velocidad relativa y al coeficiente de viscosidad de aquél. En el caso de ser el sólido una esfera, la resistencia es también función del radio de ésta:

$$A = f(v, \eta, r)$$

La función f se obtiene considerando las dimensiones de cada una de las magnitudes:

$$[A] = MLT^{-2} \qquad [\eta] = ML^{-1}T^{-1}$$

$$[v] = LT^{-2} \qquad [r] = L$$

Evidentemente, la única agrupación posible es:

$$A = Crv\eta$$

habiendo sido calculado por Stokes el valor $C = 6\pi$ y denominándose a:

$$A = 6\pi\eta r v \quad [17.22]$$

fórmula de Stokes, válida únicamente para pequeñas velocidades.

Si la velocidad relativa del fluido y el sólido supera un cierto valor límite, el régimen del fluido deja de ser laminar y pasa a turbulento, apareciendo remolinos en la parte posterior del cuerpo, debido a lo cual se crea una diferencia de presión entre el fluido situado delante del cuerpo y el situado detrás, lo que da lugar a una fuerza que se opone al movimiento, no influyendo prácticamente en este caso la viscosidad. La resistencia, en este caso, es de la forma:

$$A = CS\,\frac{\rho v^2}{2} \quad [17.23]$$

siendo S la sección aparente del sólido y C un coeficiente sin dimensiones que depende de la forma geométrica del sólido y varía muy poco con el número de Reynolds.

Si la velocidad relativa del sólido en el fluido se aproxima a la del sonido en él, los fenómenos se hacen más complejos y hay que considerar la compresibilidad del fluido, ya que las variaciones de densidad de éste dan lugar a la propagación de ondas elásticas.

17.13 Efecto magnus. Fuerza ascensorial

Si en un fluido en movimiento colocamos un cilindro con su eje normal a la dirección del movimiento del fluido (Figura 17.16), las líneas de corriente de éste se distribuirán alrededor de aquél, como ya conocemos. Si se hace girar el cilindro alrededor de su eje, las líneas de corriente se distribuirán como se indica en la Figura 17.16, la velocidad de las capas superiores será mayor que la correspondiente a las capas inferiores y la presión en la parte inferior será mayor que en la parte superior, apareciendo una fuerza F que moverá el cilindro en el sentido indicado (efecto Magnus).

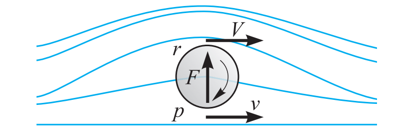


Figura 17.16.

La fuerza ascensional en el ala del avión es un efecto parecido al descrito. Aunque el ala del avión no gira, puede establecerse una circulación alrededor de ella siempre que ésta tenga la forma adecuada. Al ponerse en movimiento el avión, se forman sendos torbellinos a la salida de la parte posterior de sus alas. La conservación del momento cinético exige la formación de una circulación de aire alrededor del ala del avión, con momento cinético igual y opuesto al del torbellino. Ello hace que la velocidad del aire en la parte superior del ala sea mayor que la velocidad en la parte inferior (Figura 17.17).

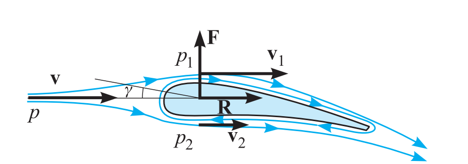


Figura 17.17.

La aplicación del teorema de Bernoulli, despreciando la diferencia de cota correspondiente al espesor del ala, da:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Con ello, la diferencia de presiones entre la parte inferior del ala y la superior es:

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2)$$

La fuerza ascensional es $F = A(p_2 - p_1)$, siendo A el área de la parte inferior del ala. Esta fuerza puede expresarse de la forma:

$$F = A\,\frac{1}{2}\,\rho(v_1^2 - v_2^2) = A\rho\,\frac{1}{2}\,(v_1 + v_2)(v_1 - v_2)$$

Puede admitirse que, aproximadamente, es $v = \frac{1}{2}\,(v_1 + v_2)$; por otra parte, experimentalmente se comprueba que la diferencia de velocidades del aire entre la parte superior y la inferior del ala es proporcional a la velocidad v, $v_1 - v_2 = Kv$, siendo $0 < K < 1$, con todo lo cual la fuerza ascensional puede expresarse de la forma:

$$F = A\rho v(v_1 - v_2) = KA\rho v^2$$

Al moverse el ala del avión dentro del aire, aparece una resistencia, R, a su avance, y el perfil del ala se determinará para que la relación F/R sea máxima, relación que también depende del *ángulo de ataque*, γ, formado por el plano del ala y la dirección del movimiento del avión.

TERMODINÁMICA

La Termodinámica puede definirse como la ciencia que estudia los intercambios o interacciones energéticas entre sistemas, o entre éstos y el medio exterior, cuando una de las energías que interviene es el calor, definiendo un sistema como la porción de universo, de volumen y/o masa no necesariamente constantes, que es objeto de estudio.

Los orígenes de la Termometría pueden establecerse en Galileo, por sus estudios termométricos encaminados a cuantificar las sensaciones de calor y frío, que construyó el primer instrumento para medir temperaturas, al que llamó *termoscopio*.

Observando procesos de enfriamiento de líquidos contenidos en recipientes de distinta naturaleza, se llegó a los conceptos de materiales aislantes y conductores térmicos, lo que puede ser considerado como el nacimiento de la calorimetría.

Experiencias hechas mezclando cantidades de un mismo líquido a diferentes temperaturas llevaron a la conclusión de que el calor era un fluido, que pasaba de los cuerpos más calientes a los más frios y que verificaba un principio de conservación. La mezcla de líquidos diferentes condujo al resultado de que en la temperatura final de la mezcla, además de la masa de los líquidos mezclados y de su estado térmico, intervenía un nuevo concepto, característico de cada líquido, el *calor específico*, lo que configuraba al calor como característica intrínseca de la materia.

Los trabajos de Benjamín Thomson, conde de Rumford, publicados en 1798 con el título *Cuestiones concernientes a las fuentes de calor excitadas por el rozamiento*, establecían un origen mecánico para el calor, al poner de manifiesto que mediante el trabajo podíamos continuamente producir calor, según lo cual no parecía que éste tuviera que ver con la naturaleza de la materia. Quedando así planteado un antagonismo entre los procesos de conservación y los de conversión, y una cuestión fundamental, la naturaleza del calor.

En 1824, Carnot publicó su famoso trabajo *Reflexiones sobre la potencia motriz del fuego y las máquinas adecuadas para producir esa potencia*, en el cual aparecen nuevos conceptos como *foco térmico*, *proceso reversible e irreversible*, *necesidad de salto térmico para producir trabajo*, *proceso cíclico*, *etc*., todos los cuales contribuyeron a ir estableciendo las bases de los principios de la Termodinámica.

En 1843, Mayer formula el principio de conservación de la energía o imposibilidad del móvil perpetuo de primera especie: *la energía ni puede crearse ni destruirse*, *sólo se transforma*. La equivalencia cuantitativa entre calor y trabajo se estableció por primera vez en 1845 por Joule, con lo cual, definitivamente, el calor pasó a ser una forma mas de la energía, determinándose posteriormente su equivalencia con otras formas de energía, como la eléctrica o la química.

La Termodinámica quedó configurada como ciencia durante el siglo XIX, siendo los principales impulsores, además de los ya indicados, Kelvin, que en 1848 definió la escala termométrica de temperaturas a partir del ciclo de Carnot; Clausius, que introdujo, en 1865, el concepto de entropía; Gibbs, que, en 1875, extendió la aplicación de la Termodinámica a los sistemas heterogéneos, incluso con reacciones químicas, e introdujo los conceptos de energía y entalpía libres; Helmholtz, que, de forma independiente a Gibbs, tambièn definió la energía libre, en 1882; Boltzmann, que estableció los fundamentos de la Mecánica estadística y relacionó la entropía con los estados microscópicos del sistema; Planck, que, en 1900, plantea la necesidad de que la energía esté cuantizada, para poder explicar la emisión de radiación térmica; y, finalmente, Einstein, que estableció, en 1905, la teoría del calor específico de los sólidos.

La Termodinámica es una ciencia axiomática, basada en cuatro axiomas o principios. El *principio cero*, que define el equilibrio térmico y es base para definir la temperatura; el *primer principio*, que establece el balance energético de los procesos, basado en la conservación de la energía; el *segundo principio*, que limita la conversión del calor en trabajo e indica el sentido en el cual los procesos son realmente posibles y el *tercer principio*, que establece el nivel de referencia para la entropía. Estos principios se han deducido de la observación del comportamiento de la naturaleza y no hay demostración alguna para ellos; su validez queda comprobada al contrastar los resultados que de ellos se deducen con la realidad del mundo físico.

La Termodinámica clásica estudia los sistemas desde el punto de vista macroscópico, sin atender a los fenómenos moleculares o atómicos que en ellos puedan tener lugar. El estudio de los sistemas a este nivel se lleva a cabo dentro de la Termodinámica estadística y cuántica. Una iniciación al estudio microscópico de los gases lo constituye la teoría cinética de los gases que, si bien es capaz de explicar algunos fenómenos macroscópicos a partir de propiedades moleculares, rápidamente demuestra su incapacidad en muchos otros, siendo necesario el concurso de las Termodinámica estadística y cuántica.

Introducción a la Termodinámica. Termología

CAPÍTULO 18

18.1 Sistema termodinámico

Como ya hemos indicado, denominamos *sistema termodinámico* a la *porción de universo físico objeto del estudio termodinámico*. Al resto de universo que no pertenece al sistema considerado, se le denomina *medio exterior*. Hay que hacer notar que una misma región del espacio puede estar ocupada por dos sistemas, como pueden ser los iones y los electrones de un gas ionizado. Los límites del sistema han de estar siempre muy bien definidos, pudiendo ser barreras materiales (paredes de los recipientes), barreras físicas (campos electromagnéticos) o superficies imaginarias, pudiendo, en cualquiera de los casos, ser fijos o móviles.

Los sistemas termodinámicos se denominan *abiertos* cuando, a través de la superficie límite que los define, hay flujo de masa, y *cerrados*, cuando no existe el citado flujo. Si las paredes que limitan el sistema permiten el flujo de energía, se dice que son *diatérmas* y, si lo impiden, se denominan *adiabáticas*. Se dice que un sistema está *aislado* cuando no existe interacción alguna entre él y el medio exterior.

18.2 Propiedades. Coordenadas termodinámicas. Estado de un sistema

Denominaremos *propiedad* de un sistema a toda magnitud del mismo, es decir, a toda característica o atributo medible; así, por ejemplo, son propiedades el volumen, la masa, la presión, la temperatura, la energía, etc. Evidentemente, toda función uniforme, x, de propiedades $x_1, x_2, ..., x_n$, del sistema, es también una propiedad de éste:

$$x = x(x_1, x_2, ..., x_n)$$

De esta forma, definiremos posteriormente la entalpía y la energía libre, que son propiedades muy importantes de los sistemas termodinámicos.

El estado de un sistema en cada instante está definido por los valores que toman sus propiedades en ese instante. Ahora bien, según acabamos de indicar, las

Coordenadas termodinámicas

Funciones de estado

propiedades de un sistema no son todas independientes entre sí, denominándose *coordenadas termodinámicas* o *variables de estado* al conjunto de propiedades independientes entre sí, a partir de las cuales pueden deducirse, mediante relaciones funcionales, las restantes propiedades del sistema; estas relaciones funcionales se denominan *funciones de estado*.

Una propiedad muy importante de los sistemas termodinámicos es la forma característica para cada uno de ellos de reaccionar, a partir de un cierto estado, ante las acciones ejercidas por el medio exterior, lo que posteriormente podremos comprobar al definir propiedades tan importantes como los calores específicos o la entropía.

Las propiedades de un sistema se denominan *intensivas* cuando no dependen de la cantidad de materia del sistema, como, por ejemplo, la temperatura o el calor específico; y *extensivas*, cuando dependen directamente de la cantidad de materia del sistema, como, por ejemplo, la masa, el volumen o el número de moles. Por tanto, si un sistema en un cierto estado se divide en dos partes iguales en cuanto a cantidad de masa, en cada parte, las propiedades intensivas tienen el mismo valor del sistema inicial, pero las propiedades extensivas tendrán por valor la mitad, si son directamente proporcionales a la masa.

Debemos hacer notar que las propiedades o variables termodinámicas del sistema sólo tienen sentido macroscópico y cuando consideremos cantidades muy pequeñas de ellas éstas no podrán ser infinitamente pequeñas, pues deben contener un número elevado de moléculas, ya que no tiene sentido hablar de presión o temperatura en sistemas de muy pocas moléculas.

18.3 Sistemas homogéneos y heterogéneos. Fases

Los sistemas pueden ser de un solo constituyente, cuando están formados por una sola especie química, o estar compuestos de varios constituyentes o especies químicas distintas.

Se dice que un sistema es *homogéneo* cuando sus propiedades tienen el mismo valor en todos sus puntos y *heterogéneo*, en caso contrario. El sistema puede ser homogéneo para alguna propiedad y no para otras, así, puede ser homogéneo en presión pero no en temperatura. Muchos sistemas heterogéneos de interés práctico están formados por un mosaico de sistemas homogéneos, a cada uno de los cuales se le denomina *fase* del sistema heterogéneo. Pueden existir sistemas formados por una sola especie química y que, sin embargo, sean heterogéneos, puesto que la especie química que lo forma puede presentar las tres fases, sólida, líquida y gaseosa. También pueden existir sistemas formados por varias especies químicas y que sean perfectamente homogéneos, como puede ser una mezcla homogénea de gases.

Fase.

18.4 Equilibrio. Transformaciones o procesos. Ciclos

Cuando el estado de un sistema permanece constante en el tiempo, se dice que éste es un *estado de equilibrio*. El estado de equilibrio está definido por ciertos valores de las coordenadas termodinámicas del sistema, que permanecerán constantes durante todo el tiempo que dure el equilibrio. El equilibrio termodinámico exige tres tipos de equilibrio:

a) **Equilibrio mecánico**, establecido por las leyes de la Mecánica para todas las fuerzas que actúan sobre el sistema.

b) **Equilibrio térmico**, que se establece cuando todos los puntos del sistema tienen la misma temperatura y ésta coincide con la del medio exterior, si la pared es diaterma.

c) **Equilibrio químico**, cuando todos sus puntos tienen la misma composición y no hay fenómenos de difusión.

Los estados de equilibrio pueden ser descritos en función de las variables macroscópicas de estado y la relación que liga a éstas se denomina *función de estado*, que, obviamente, será independiente del tiempo.

Cuando un sistema termodinámico, partiendo de un estado de equilibrio inicial, evoluciona hasta un estado de equilibrio final, se dice que ha sufrido una *transformación* o *proceso*, lo que usualmente se deberá a la interacción entre él y su entorno. A lo largo del proceso pueden permanecer constantes algunas coordenadas del sistema y el proceso tendrá denominaciones especiales:

Isócoro, si se realiza a volumen constante.

Isóbaro, si se realiza a presión constante.

Isotermo, si se realiza a temperatura constante.

Si el proceso se realiza sin intercambio de calor entre el sistema y el medio, se denomina *adiabático*.

Si después de una transformación el estado de equilibrio final coincide con el inicial, se dice que el sistema ha descrito un *ciclo*.

Un proceso ideal en el cual el sistema va pasando por infinitos estados de equilibrio infinitamente próximos se dice que es un proceso *cuasi-estático*. Un proceso de este tipo se consigue dando variaciones infinitesimales a las variables de estado que definen el sistema, por ello, será un proceso infinitamente lento. Un sistema formado por agua y hielo en equilibrio a $0\,^{\circ}C$, realiza un proceso *cuasi-estático* al suministrarle una cantidad de calor dQ: una parte del hielo se funde y pasa a estado líquido, pasando el sistema a un nuevo estado de equilibrio a la misma temperatura. El proceso inverso se realiza tomando del sistema la cantidad de calor $-dQ$: una parte del agua se solidifica y pasa a un nuevo estado de equilibrio a la misma temperatura. El cambio de estado es un proceso *cuasi-estático* a la temperatura de cambio de estado.

18.5 Procesos reversibles e irreversibles

Se dice que un *proceso* es *reversible* cuando se realiza de tal modo que *una vez finalizado puede verificarse en sentido contrario, volviendo al estado inicial tanto el sistema como el medio exterior*.

Los procesos *cuasi-estáticos* pueden considerarse reversibles, si no conllevan disipación de energía, puesto que al ser una sucesión de infinitos estados de equilibrio, pueden detenerse en cualquier momento y repetirse en sentido contrario. En los procesos reales la degradación de la energía es inevitable, por lo que, en realidad, todos son irreversibles, siendo el proceso reversible una abstracción teórica, útil para desarrollos teóricos y cálculos aproximados.

El cambio de estado indicado anteriormente como proceso *cuasi-estático*, es un proceso irreversible. Al sistema se le puede suministrar desde el medio la cantidad de calor dQ, pero para extraer esa cantidad de calor del sistema es necesario un aporte de energía, que debe realizar el medio y, en consecuencia, aunque el sistema vuelva a su estado inicial, el medio no vuelve al suyo, y el proceso no es reversible.

Se dice que un proceso es irreversible cuando no cumple las condiciones de reversibilidad. Como consecuencia del segundo principio de la Termodinámica se podrá demostrar que todos los procesos reales son irreversibles.

18.6 Aislantes y conductores térmicos. Procesos adiabáticos. Equilibrio térmico

Se dice que una pared que limita un sistema es un aislante térmico cuando por medios externos no se puede provocar cambio alguno en el estado térmico del sistema, salvo que se mueva la pared o actúen fuerzas de acción a distancia (gravitacionales o electromagnéticas). Por el contrario, los conductores térmicos permiten la influencia térmica del medio exterior sobre el sistema que limitan.

Un sistema limitado completamente por materiales aislantes térmicos se dice que está *aislado térmicamente*, y a cualquier proceso que se realice en esas condiciones se le denomina *proceso adiabático*, ya que se hará sin intercambio de calor.

Diremos que dos sistemas están en *contacto térmico* cuando alguna zona de la separación entre ambos esté formada por conductores térmicos. Dos sistemas en contacto térmico, que no se ejercen influencia mutua alguna, se dice que están en *equilibrio térmico*.

18.7 Principio cero. Definición de temperatura

El principio cero de la Termodinámica establece que *si dos sistemas están en equilibrio térmico con un tercero, están en equilibrio térmico entre sí*. Parece ser que fue enunciado por primera vez por Helmholtz: «Cuando cada uno de dos cuerpos está a su vez en equilibrio con un tercero, entonces están en equilibrio térmico entre sí.» Sin embargo, su consideración como principio y su denominación como principio cero se debe a Fowler y Guggenheim, en 1939, en su libro *Statistical Thermodynamics*.

Si consideramos como referencia un sistema en un cierto estado de equilibrio, todos los sistemas en equilibrio térmico con él tendrán una propiedad común, que caracteriza el equilibrio térmico entre ellos; pues bien, a esta propiedad se le denomina *temperatura*. Dos sistemas en equilibrio térmico tienen la misma temperatura y, recíprocamente, una serie de sistemas con la misma temperatura estarán en equilibrio térmico entre sí.

La temperatura es la cuarta magnitud fundamental necesaria para el desarrollo de la Termodinámica.

18.8 Medida de la temperatura. Termómetros

Una vez definida la igualdad de temperaturas mediante el principio cero, hace falta ahora, para poder medir temperaturas, definir cuándo un sistema tiene temperatura doble, triple, etc., que la de otro. Como veremos posteriormente, para esto es necesario estudiar la máquina térmica reversible de Canot; hasta entonces, tendremos que ir valiéndonos de temperaturas tomadas sobre escalas arbitrarias, que se establecen según la variación de alguna propiedad del sistema con la temperatura, como la dilatación de líquidos, la variación de presión en gases a volumen constante, la variación de la resistencia eléctrica, la variación del color, etc.

Denominemos X a la propiedad elegida del sistema, variable con la temperatura θ. Evidentemente, es necesario que las funciones $\theta = \theta(X)$ y $X = X(\theta)$ sean uni-

formes y monótonas, y conveniente que los incrementos de temperatura sean directamente proporcionales a los incrementos del valor de la magnitud considerada, es decir, $d\theta = a\,dX$, cuya integración da:

$$\theta = aX + b \qquad [18.1]$$

Para determinar las dos constantes a y b, es necesario asignar dos valores de θ arbitrarios a sendos estados elegidos también arbitrariamente y cuyos valores de X se deben determinar; para lo cual el sistema debe tener alguna propiedad que varíe linealmente con la temperatura. Los instrumentos que, construidos sobre estas bases, se emplean para medir temperaturas se llaman *termómetros*.

La escala centígrada o de Celsius (1701-1744) toma la temperatura del hielo fundente (mezcla de hielo y agua en equilibrio a la presión de 1 atm.) como temperatura cero, 0 ºC, y la temperatura de punto de ebullición del agua a la presión de una atmósfera, como temperatura 100 ºC. La Ecuación [18.1] en cada uno de los casos se escribe:

$$0 = aX_c + b$$

$$100 = aX_e + b$$

sistema que, resuelto, da:

$$a = \frac{100}{X_e - X_c} \quad \text{y} \quad b = \frac{100X_c}{X_c - X_e}$$

y la expresión de la temperatura queda de la forma:

$$\theta = \frac{100}{X_e - X_c}(X - X_c)$$

Si se despeja X puede escribirse:

$$X = X_c(1 + k\theta)$$

denominándose a k coeficiente termométrico:

$$k = \frac{X_e - X_c}{100X_c}$$

Si en lugar de la propiedad X empleamos la Y, la expresión de la temperatura será:

$$\theta' = \frac{100}{Y_e - Y_c}(Y - Y_c)$$

Ambas escalas θ y θ', coincidirán en los puntos fijos cero y cien pero, para que coincidan a todas las temperaturas debe verificarse:

$$\frac{X - X_c}{X_e - X_c} = \frac{Y - Y_c}{Y_e - Y_c}$$

lo que exige que X e Y sean propiedades proporcionales, y esto jamás sucede así. Incluso para una misma propiedad, diferentes cuerpos dan diferentes escalas, por ejemplo, para la dilatación, la del mercurio no es proporcional a la del alcohol y, por tanto, dos termómetros, el uno de mercurio y el otro de alcohol, basados en la dilatación, indicarán exactamente igual el cero y el cien, pero en cualquier otro estado de equilibrio térmico no marcarán la misma temperatura.

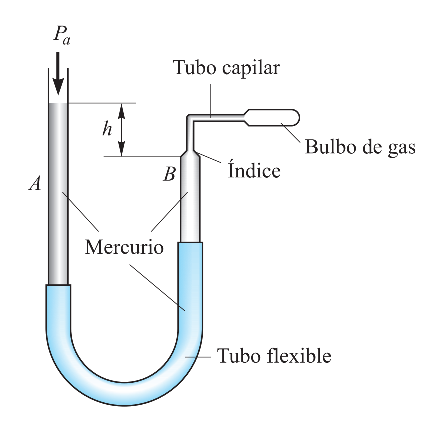


Figura 18.1.

Las conferencias internacionales sobre pesas y medidas tomaron el acuerdo de elegir como escala normal la centígrada, definida por un termómetro de gas a volumen constante y cuyo gas fuese el hidrógeno. El termómetro de gas se esquematiza en la Figura 18.1. La rama libre *A*, merced al tubo flexible, puede moverse en sentido vertical y conseguir que el menisco del mercurio de la rama *B* coincida con el índice existente del final del tubo capilar, de esta forma, se mantiene a volumen constante el gas encerrado en el bulbo.

La presión a la que está el gas viene dada por la atmosférica más la correspondiente a la columna de mercurio de altura *h*, $p = p_a + \rho g h$. La escala normal utilizaba como gas el hidrógeno, el bulbo era de platino y su volumen de un litro. La expresión que da la temperatura en función de la presión es:

$$\theta = \frac{100}{p_{100} - p_0}(p - p_0) \qquad [18.2]$$

o su inversa:

$$p = p_0(1 + \beta\theta) \qquad [18.3]$$

siendo:

$$\beta = \frac{p_{100} - p_0}{100 p_0}$$

Para medir la temperatura de un sistema, debemos introducir en él el bulbo del termómetro y mover la rama libre para que el menisco del mercurio coincida con el índice señalado en el termómetro, esperar a que se llegue al equilibrio térmico y hacer la lectura h, calculamos *p* y llevando su valor a la (18.2) se obtiene la temperatura θ. El resto del termómetro estará a la temperatura ambiente y la distinta dilatación de los materiales y el mercurio puede afectar a las lecturas. Evidentemente, éste es un termómetro experimental, pero como tal ha sido fundamental en el desarrollo de la Termología.

18.9 Temperatura absoluta

La Expresión [18.3], sacando en el segundo miembro factor común a β, se escribe:

$$p = p_0\beta\left(\frac{1}{\beta} + \theta\right)$$

y, haciendo el cambio de origen de temperaturas definido por:

$$T = \frac{1}{\beta} + \theta$$

resulta ser:

$$T = \frac{1}{\beta p_0} p$$

por tanto, la temperatura *T* es esencialmente positiva, de aquí que se le denomine *temperatura absoluta*, y su grado, de igual tamaño que el centígrado, se simboliza con K. La nueva escala se expresa.

$$T = \frac{100}{p_{100} - p_0} p = \frac{100}{h_{100} - h_0} h$$

18.10 Gas perfecto. Ecuación de estado. Constante de los gases perfectos

Sometamos a un mol de un cierto gas a diferentes presiones, manteniendo siempre fija la temperatura; el gas ocupará diferentes volúmenes correspondientes a cada una de las presiones. Si en ordenadas representamos el producto PV y en abscisas la presión P, los valores anteriores se situarán sobre una curva (Figura 18.2). Si la experiencia se repite para diferentes gases, conservando la misma temperatura, obtendremos distintas curvas, siendo muy importante observar cómo todas ellas, al tender la presión a cero, tienden a un mismo punto sobre el eje de ordenadas. El valor de la ordenada en el origen, común a todas las curvas depende únicamente de la temperatura del ensayo, siendo igual al producto de una constante por la temperatura absoluta a la que se realizó aquél, RT, pudiendo escribirse:

Figura 18.2.

$$\lim_{p \to 0} PV = RT$$

Gas perfecto

Definiremos el *gas perfecto como aquel gas que para cualquier valor de la presión verifica la ecuación*:

$$PV = RT$$

o bien para n moles:

$$PV = nRT \qquad [18.4]$$

Ecuación de estado del gas perfecto

A la constante R se le denomina *constante de los gases perfectos*. Su ecuación de dimensiones se deduce de la última ecuación, resultando:

$$[R] = ML^2T^{-2}\,\mathrm{K}^{-1}\,\mathrm{mol}^{-1}$$

Su valor numérico, en el sistema internacional de unidades, es:

$$R = 8{,}314472(\pm 14 \times 10^{-6})\ \mathrm{J\ K^{-1}\ mol^{-1}}$$

En la práctica, se emplea, con frecuencia, la presión en atmósferas y el volumen en litros, en cuyo caso el valor de R es:

$$R = 0{,}082028\ \mathrm{atm \cdot l \cdot K^{-1}\ mol^{-1}}$$

Asimismo, se utiliza con frecuencia el valor:

$$R = 1{,}987216\ \mathrm{cal.\ mol^{-1}\ K^{-1}}$$

18.11 Escala de temperaturas de los gases perfectos

Realicemos con el termómetro de gas a volumen constante la siguiente experiencia: para una cierta masa de gas contenido en el bulbo, determinemos las presiones P_c y P_e correspondientes a los puntos de congelación y ebullición del agua pura a la presión de una atmósfera. Repitamos esas determinaciones para distintas cantidades de gas encerradas en el bulbo y obtendremos las correspondientes parejas de valores P_c y P_e. Si representamos en una gráfica los valores $(P_e/P_c)_v$ en ordenadas y P_c en abscisas, resulta una curva que, para pequeños valores de P_c, se hace rectilínea (Figura 18.3). Si en el bulbo se colocan gases distintos, las curvas que se obtienen al realizar la experiencia antes descrita son distintas, pero las rectas a las

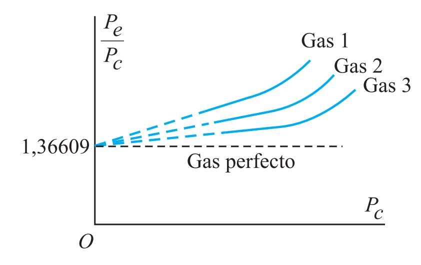


Figura 18.3.

que tienden, al hacer tender la presión a cero, concurren en un punto común cuya ordenada resulta valer 1,36609 ± 0,00004, es decir:

$$\lim_{p \to 0} \left(\frac{P_e}{P_c} \right)_v = 1{,}36609 \pm 0{,}00004$$

y para el gas perfecto:

$$\left(\frac{P_e}{P_c} \right)_v = 1{,}36609 \pm 0{,}00004$$

Teniendo en cuenta la Expresión [18.4] y que el proceso se realiza a volumen constante:

$$\frac{T_e}{T_c} = 1{,}36609 \pm 0{,}00004$$

Si, además, obligamos a que la escala sea centígrada:

$$T_e - T_c = 100\,^{\circ}\mathrm{K}$$

resulta:

$$T_e = 373{,}16 \pm 0{,}03\,^{\circ}\mathrm{K} \quad \text{y} \quad T_c = 273{,}16 \pm 0{,}03\,^{\circ}\mathrm{K} \qquad [18.5]$$

La temperatura de un sistema cualquiera se determinará obteniendo, para cada cantidad de gas encerrada en el bulbo, la presión P correspondiente a la temperatura del sistema y la presión P_c correspondiente al punto de congelación. Una vez calculada la expresión $(P/P_c)_v = f(P_c)$, la temperatura del sistema viene dada por:

$$T = T_c \cdot \lim_{P_c \to 0} \left(\frac{P}{P_c} \right)_v$$

De acuerdo con las expresiones de [18.5], la relación entre las temperaturas de las escalas centígrada y absoluta es:

$$T\,^{\circ}\mathrm{K} = t\,^{\circ}\mathrm{C} + 273{,}16$$

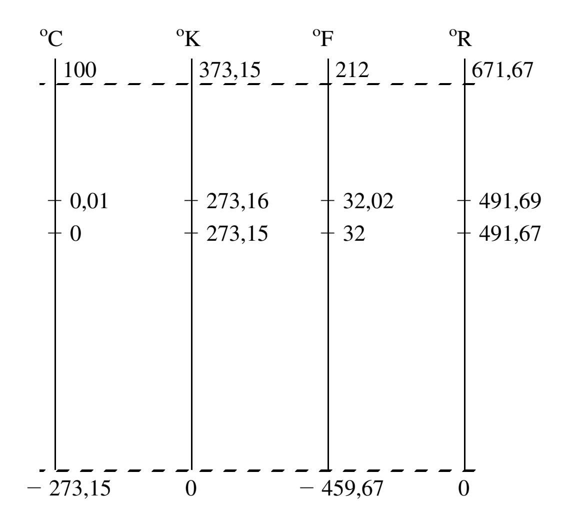
por tanto, el cero de la escala absoluta está a $-273{,}16\,^{\circ}\mathrm{C}$.

La Conferencia Internacional de Pesas y Medidas del año 1954 dio una nueva definición de escala Celsius, confirmada en 1967 y basada en determinaciones realizadas con el termómetro de gas a volumen constante, tal como se ha descrito, pero tomando como temperatura de referencia la del punto triple del agua, estado en el cual coexisten en equilibrio las tres fases: sólida, líquida y vapor de agua, lo que sólo ocurre a la presión de 4,58 mm Hg, a la cual se le asignó el valor 0,01 ºC, debiendo usarse en su determinación agua con la composición isotópica del agua de los océanos. La correspondencia entre las escalas Celsius y Kelvin queda establecida por la relación:

$$T\,^{\circ}\mathrm{K} = t\,^{\circ}\mathrm{C} + 273{,}15$$

Recientes determinaciones experimentales han obtenido que en esta escala el punto de ebullición del agua está en los 99,974 ± 0,003 ºC, con lo cual, la escala Celsius deja de ser centígrada.

Además de las escalas Celsius y absoluta, se usan, aunque de forma cada vez más restringida, las escalas termométricas de Fahrenheit y Rankine. A continuación, se presenta gráficamente la comparación de las escalas termométricas citadas.



18.12 Escala práctica internacional de temperaturas

La dificultad de utilizar la escala de los gases perfectos hizo que se adoptase, en 1927, una Escala Práctica Internacional de Temperaturas; ésta fue revisada en 1948 y ampliada en 1968 por el Comité Internacional de Pesas y Medidas. Está basada en un número de puntos fijos fácilmente reproducibles y cuyas temperaturas tienen valores numéricos concretos que, salvo en los casos de puntos triples, corresponden a estados de equilibrio a la presión de una atmósfera.

Tabla 18.1. Escala práctica internacional de temperatura

Estado de equilibrio	Temperatura ºC
Punto triple del hidrógeno	−259,34
Punto normal de ebullición del hidrógeno	−252,87
Punto normal de ebullición del neón	−246,048
Punto triple del oxígeno	−218,789
Punto normal de ebullición del oxígeno	−182,962
Punto triple del agua	0,01
Punto normal de fusión del cinc	419,58
Punto normal de fusión de la plata	961,93
Punto normal de fusión del oro	1 064,43

La propia Escala Práctica Internacional de Temperaturas contiene normas en cuanto al tipo de termómetro y fórmula de interpolación a emplear en cada una de las cuatro zonas en que se divide.

1. De 0 a 630,74 ºC. Se utilizará para las medidas un termómetro de resistencia de platino y la fórmula para la interpolación de temperatura será del tipo:

$$R = R_0(1 + AT + BT^2)$$

las constantes R_0, A y B se determinarán por medidas en el punto normal de ebullición del agua, punto normal de ebullición del azufre y punto normal de fusión del hielo.

2. De −259,34 a 0 ºC. Se utilizará también un termómetro de resistencia de platino y la fórmula de interpolación será ahora:

$$R = R_0[1 + AT + BT^2 + C(T - 100)T^3]$$

determinándose la nueva constante C a partir de una medida en el punto de ebullición normal del oxígeno.

3. De 630,74 a 1 064,43 °C. Se utilizará como instrumento de medida un termopar, uno de cuyos hilos será de platino y el otro estará formado por una aleación de 90 por 100 de platino y 10 por 100 de sodio. La fórmula de interpolación utilizada en este caso será:

$$E = a + bT + cT^2$$

y las constantes a, b y c se determinan por medidas en el punto 630,74 °C, dado por el termómetro de resistencia de platino, y en los puntos de fusión de la plata y el oro.

4. Temperaturas superiores a 1 064,43 °C. Se comparará la luminancia energética de una cualquiera de las longitudes de onda emitidas en la radiación con la luminancia energética para la misma longitud de onda emitida por un cuerpo negro a la temperatura del punto normal de fusión del oro, utilizando, para la comparación, la ecuación de Planck para la radiación del cuerpo negro:

$$\frac{L}{L_0} = \frac{e^{c/\lambda T_0} - 1}{e^{c/\lambda T} - 1}$$

si λ se expresa en metros, el valor de c es 0,014388 m.

La Conferencia Internacional de Pesas y Medidas de 1989 estableció nuevas recomendaciones para medidas a muy bajas temperaturas y puso las bases para el desarrollo de una nueva escala, que se denominó Escala Internacional de Temperaturas de 1990. En ésta se establecen nuevos puntos fijos y toda una serie de recomendaciones para efectuar las medidas. Una amplia información puede encontrarse en www.its.90.com.

Gas perfecto

CAPÍTULO 19

19.1 Ley de Boyle-Mariotte

Si hacemos variar el volumen ocupado por una cierta cantidad de gas perfecto, manteniendo constante su temperatura, el producto de la presión a la que está sometido el gas por su volumen permanece constante. De forma analítica, la ley se expresa: $PV =$ cte. donde, de acuerdo con la ecuación de estado [18.4], la constante depende de la temperatura:

$$PV = nRT_1 \qquad [19.1]$$

En un diagrama $P - V$, la ley se representa por una familia de hipérbolas equiláteras, una para cada valor de T (Figura 19.1).

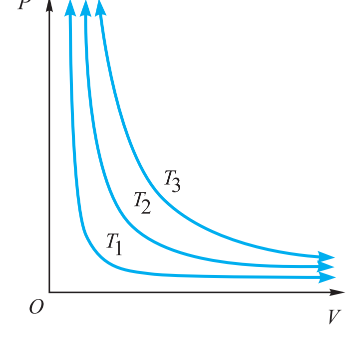


Figura 19.1.

Tomando logaritmos en [19.1], $\log P + \log V =$ cte., y en un diagrama doblemente logarítmico, $y = \log P$, $x = \log V$, se representará por rectas de pendiente -1 (Figura 19.2).

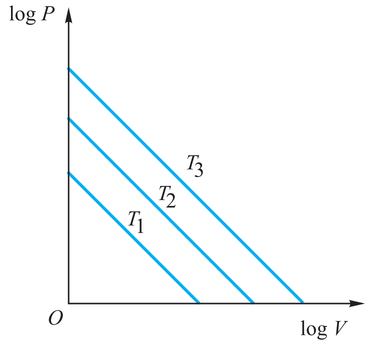


Figura 19.2.

19.2 Leyes de Gay-Lussac

Primera ley. *A presión constante, el volumen de una determinada cantidad de gas perfecto es directamente proporcional a la temperatura.* La variación del volumen de un gas con la temperatura, cuando se mantiene la presión constante, fue observado por primera vez por Charles, en 1787. Este comportamiento fue cuantificado, en 1808, por el científico de quien tomó nombre, si bien su verdadero valor no fue obtenido hasta 1847 por Regnault.

Estas leyes pueden demostrarse a partir de la ecuación de estado del gas perfecto. Sea una cierta cantidad de gas que ocupa un volumen V_0 a la presión P_0 y temperatura $T_0 = 273{,}15\,\text{K}$. Si hacemos pasar su temperatura al valor T, para que su presión no varíe deberá variar su volumen hasta el valor V, que ahora calcularemos. En el estado inicial, la ecuación de estado se escribe $P_0V_0 = nRT_0$ y, en el final, $P_0V = nRT$, dividiendo miembro a miembro ambas ecuaciones:

$$\frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0}$$

o

$$V = \frac{V_0}{T_0} T = V_0 \frac{T_0 + \Delta T}{T_0} = V_0 \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right) = V_0(1 + \alpha \Delta T) \qquad [19.2]$$

que también puede expresarse:

$$\frac{V - V_0}{V_0} = \alpha \Delta T$$

la variación unitaria de volumen a presión constante es proporcional al incremento de temperatura, siendo el coeficiente de proporcionalidad:

Coeficiente de dilatación

$$\alpha = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{273,15}$$

que se denomina *coeficiente de dilatación de los gases perfectos*.

Segunda ley. *A volumen constante, la presión de una determinada cantidad de gas es directamente proporcional a la temperatura*. Supongamos, como en el caso anterior, una cierta cantidad de gas que ocupa un volumen V_0 a la presión P_0 y temperatura $T_0 = 273,15$ K. Si hacemos pasar su temperatura hasta el valor T, manteniendo constante el volumen V_0, la presión pasará a un valor P. Para el estado inicial, la Ecuación [19.1] se escribe $P_0V_0 = nRT_0$ y, para el final, $PV = nRT$. Dividiendo ambas entre sí resulta:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{T}{T_0} \quad ; \quad P = P_0 \frac{T + \Delta t}{T_0} = P_0 \left(1 + \frac{\Delta t}{T_0}\right) = P_0(1 + \beta \Delta t) \qquad [19.3]$$

que también puede expresarse:

$$\frac{P - P_0}{P_0} = \beta \Delta T$$

la variación unitaria de presión a volumen constante es proporcional a la variación de temperatura, siendo el coeficiente de proporcionalidad:

Coeficiente de aumento de presión

$$\beta = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{273,15}$$

al cual se le denomina *coeficiente de aumento de presión*.

Una propiedad importante de los gases perfectos es la identidad de sus coeficientes de dilatación y de aumento de presión, $\alpha = \beta$.

19.3 Volumen molar normal

El volumen molar normal es el volumen ocupado por un mol en condiciones normales de presión y temperatura: $P_0 = 1,01325 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ y $T_0 = 273,15$ K. Este volumen, deducido de la ecuación de estado de los gases perfectos [18.4], es:

$$V_M = \frac{RT_0}{P_0} = \frac{8,314472 \times 273,15}{1,01325 \times 10^5} \text{ m}^3 = 22,414 \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 22,414 \text{ litros}$$

19.4 Ley de Avogadro

En igualdad de presión y temperatura, volúmenes iguales de cualquier gas perfecto contienen igual número de moléculas. Esta hipótesis fue emitida por Avogadro en 1811, y también se puede enunciar diciendo: *en igualdad de condiciones, un mol de cualquier sustancia contiene siempre el mismo número de moléculas*, número que se denomina *de Avogadro* y cuyo mejor valor actualmente determinado es:

$$N_A = 6{,}02214199 \times 10^{23} \text{ moléculas/gmol}$$

Número de Avogadro

El número de moles puede expresarse en función del número de moléculas:

$$n = \frac{N}{N_A}$$

con lo cual, la ecuación de estado puede escribirse de la forma:

$$PV = \frac{N}{N_A} RT$$

La constante $k = \frac{R}{N_A}$, cociente entre la constante de los gases perfectos y el número de Avogadro, es la constante universal de Boltzmann, cuya ecuación de dimensiones, deducida de la última expresión, es $ML^2T^{-2}K^{-1}$, y su valor, en unidades del S.I., es:

$$k = 1{,}3806503 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

Constante de Boltzmann

resultando con ello una nueva expresión de la ecuación de estado del gas perfecto:

$$PV = NkT \qquad [19.4]$$

Esta ecuación pone de manifiesto la ley de Avogadro ya que, en igualdad de presión y temperatura, volúmenes iguales de diferentes gases contienen el mismo número de moléculas.

EJEMPLO 19.1

Calculemos para el aire contenido en una habitación de 32 m^3, a la presión de 1 atm y temperatura de 20 ºC:

1.º El número de moléculas.
2.º El número de moles.

Solución:

1.º Aplicando la Expresión [19.4], se obtiene el número de moléculas:

$$N = \frac{PV}{kT} = \frac{1{,}013 \times 10^5}{1{,}3806 \times 10^{-23}} \times 293{,}15 = 8{,}01 \times 10^{26} \text{ moléculas}$$

2.º El número de moles es:

$$n = \frac{N}{N_A} = \frac{8{,}01 \times 10^{26}}{6{,}02 \times 10^{23}} = 1\,330{,}56 \text{ moles}$$

Esto también podría haberse calculado por aplicación de la ecuación de estado:

$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{1{,}013 \times 10^5 \times 32}{8{,}3145 \times 293{,}15} = 1\,399{,}94 \text{ moles}$$

La diferencia entre los resultados es debida al error de las operaciones con números no exactos.

19.5 Masa específica o densidad

Se define la *masa específica* o *densidad* como *la masa por unidad de volumen*, la cual dependerá de las condiciones de presión y temperatura a las que se encuentre el gas. En el estado normal (P_0, V_0, T_0), la masa específica será $\rho_0 = m/V_0$ y, en otro estado cualquiera (P, V, T), será $\rho = m/V$. Eliminando m entre ambas ecuaciones, resulta la relación $\rho = \rho_0 \cdot V_o/V$.

Para los dos estados, las respectivas ecuaciones de estado son: $P_0V_0 = nRT_0$ y $PV = nRT$ que, al dividirlas entre sí, da:

$$\frac{P_0V_0}{PV} = \frac{T_0}{T} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_0}{V} = \frac{P}{P_0}\frac{T_0}{T}$$

Lo que permite expresar:

$$\rho = \rho_0 \frac{P}{P_0}\frac{T_0}{T} \qquad [19.5]$$

que nos relaciona las densidades, presiones y temperaturas de dos estados.

Densidad relativa

Se define la *densidad relativa de un gas respecto a otro a igualdad de presión y temperatura, como el cociente de sus masas específicas*:

$$d = \frac{\rho}{\rho'} \qquad [19.6]$$

La ecuación de estado de m gramos de un gas de masa molecular M, que a la presión P y temperatura T ocupan el volumen V, es:

$$PV = \frac{m}{M} RT \qquad [19.7]$$

Análogamente, m' gramos de otro gas de masa molecular M', a la misma presión P y temperatura T, ocuparán un volumen V', verificando:

$$PV' = \frac{m'}{M'} RT$$

Las dos últimas ecuaciones pueden escribirse, respectivamente:

$$PM = \rho RT \quad \text{y} \quad PM' = \rho' RT$$

y, al dividir miembro a miembro, resulta:

$$d = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{M}{M'} \qquad [19.8]$$

es decir, *la densidad relativa de dos gases es igual al cociente de sus masas moleculares*.

19.6 Volumen específico

Se denomina *volumen específico* al *volumen correspondiente a la unidad de masa*, el cual, obviamente, será función de la presión y la temperatura. La ecuación de estado [19.7], para la unidad de masa, se expresa:

$$Pv = \frac{R}{M} T$$

en la que v es el volumen específico. A la constante $\frac{R}{M} = R_G$, se le denomina *constante del gas* y, en función de ella, la ecuación de estado para la masa unidad se expresa:

Constante del gas

$$Pv = R_G T \qquad [19.9]$$

La inversa del volumen específico es la densidad y la ecuación de estado también puede expresarse:

$$P = \rho R_G T \qquad [19.10]$$

En la Tabla 19.1 se indican los valores de R_G para algunos gases.

Tabla 19.1.

Gas	R_G J/kg·K
Hidrógeno	4 124,24
Metano	518,36
Vapor de agua	461,40
Monóxido de carbono	296,84
Nitrógeno	296,73
Aire	287,00
Oxígeno	259,83
Dióxido de carbono	188,92

EJEMPLO 19.2

Para el mismo enunciado del Ejemplo 19.1, determinemos:

1.º La densidad del aire.

2.º La masa de aire contenida en la habitación.

3.º La masa de una molécula de aire.

Solución:

1.º La aplicación de la Expresión [19.10] nos da la densidad del aire en las condiciones indicadas en el enunciado:

$$\rho = \frac{P}{R_G T} = \frac{1{,}013 \times 10^5}{287 \times 293{,}15} = 1{,}204 \text{ kg/m}^3$$

2.º La masa de aire contenida en la habitación es:

$$m = V\rho = 32 \times 1{,}204 = 38{,}529 \text{ kg}$$

3.º La masa de cada molécula de aire es:

$$\mu = \frac{m}{N} = \frac{38{,}529}{8{,}01 \times 10^{26}} = 4{,}810 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

19.7 Ley de Dalton o de las presiones parciales

Consideremos una mezcla de gases perfectos contenida en un volumen V a la temperatura T, y sean n_1, n_2, ..., los números de moles de cada uno de los gases. Cada uno de éstos ejercerá una presión, denominada presión parcial, p_i, que estará dada por su ecuación de estado:

$$p_i V = n_i RT \qquad i = 1{,}2, \ldots \qquad [19.11]$$

Si estos gases no se ejercen entre sí interacción alguna, la mezcla constituirá un nuevo gas ideal y verificará:

$$PV = \sum n_i RT \qquad [19.12]$$

Sumando las ecuaciones de [19.11]:

$$\sum p_i V = \sum n_i RT$$

y, al compararlo con la Ecuación [19.12], resulta que debe ser:

Ley de Dalton

$$P = \sum p_i \qquad [19.13]$$

lo que constituye la expresión analítica de la ley de Dalton: *la presión total en la mezcla de gases perfectos, que no se ejercen entre sí interacción alguna, es igual a la suma de las presiones parciales que cada gas ejercería si ocupara él solo el volumen total de la mezcla.*

Dividiendo la Ecuación [19.11] por la [19.12], resulta:

Fracción molar

$$\frac{p_i}{P} = \frac{n_i}{\sum n_i} = f_i$$

a este cociente se le denomina *fracción molar*. Evidentemente, la suma de todas las fracciones molares es igual a la unidad:

$$\sum f_i = \frac{\sum n_i}{\sum n_i} = 1$$

19.8 Masa molecular ficticia de una mezcla de gases perfectos

Consideremos una mezcla de gases perfectos de masas moleculares M_1, M_2, ..., M_i, que contiene m_1, m_2, ..., m_i gramos de cada uno de ellos, respectivamente. El número total de moles de esta mezcla es:

$$n = \sum_i n_i = \sum_i \frac{m_i}{M_i} \qquad [19.14]$$

La ecuación de estado para cada uno de estos gases perfectos se escribe:

$$p_i V = n_i RT$$

sumando todas ellas:

$$\sum p_i V = \sum n_i RT$$

y, al tener en cuenta las ecuaciones [19.13] y [19.14] resulta:

$$PV = nRT$$

lo que nos indica que una mezcla de gases perfectos se comporta como un gas perfecto cuyo número de moles es la suma de los correspondientes a cada uno de los componentes.

La masa molecular ficticia de la mezcla de gases perfectos se define por la relación $M = m/n$, siendo m la masa total de la mezcla y pudiendo expresarse:

$$M = \frac{\sum_i n_i m_i}{n} \qquad [19.15]$$

EJEMPLO 19.3 **Masa molecular ficticia del aire**

Calculemos la masa molecular ficticia del aire, suponiendo que esté formado por un 78 por 100 de nitrógeno, un 32 por 100 de oxígeno y un 1 por 100 de argón:

Solución:

La aplicación de la Expresión [19.15] permite obtener directamente M

$$M = \frac{78 \times 28 + 21 \times 32 + 39}{100} = 28{,}95 \text{ g/mol}$$



GASES REALES. ECUACIÓN DE ESTADO

En el modelo de gas perfecto se consideran a las moléculas de tamaño despreciable, es decir, el volumen que ellas ocupan es despreciable frente al volumen total del gas, con lo cual disponen del volumen total para moverse. También se considera que únicamente se ejercen acciones durante el tiempo que dura el choque. Estas condiciones sólo se dan a altas temperaturas o a muy bajas densidades, en cuyo caso se verifica la ecuación de estado de los gases perfectos, Ecuación (18.4) o (19.4)

$$PV = nRT = NkT$$

En cualquier otra situación hay que hacer dos correcciones al modelo de gas perfecto. En primer lugar hay que considerar a las moléculas con un volumen no despreciable frente al volumen del gas. El volumen ocupado por las moléculas será proporcional al número de estas, bN, de forma que el volumen que queda disponible para su movimiento es, $V - bN$, con lo cual la ecuación de estado se expresa

$$P(V - bN) = nRT = NkT$$

que es conocida como ecuación de estado de *Clausius*. Despejando la presión se expresa

$$P = \frac{NkT}{V - bN} = \frac{kT}{\dfrac{V}{N} - b}$$

Debemos ahora realizar una segunda corrección, que hace referencia a la acción que se ejercen las moléculas entre sí. Mientras las moléculas están en el interior del gas, la simetría esférica hace que la resultante de todas las acciones sobre una molécula sea nula, pero cuando las moléculas están próximas a las paredes del recipiente, la resultante de esas acciones trata de llevar a la molécula hacia el interior, por lo que su acción sobre la pared disminuye y la presión quedará disminuida. Al tratarse de una acción gravitacional entre moléculas, la citada resultante será proporcional al cuadrado de la densidad, es decir, de la forma a $(N/V)^2$ y la presión puede escribirse

$$P = \frac{kT}{\dfrac{V}{N} - b} - a\left(\frac{N}{V}\right)^2$$

Con lo cual, la ecuación de estado para un gas real se expresa

$$\left[P + a\left(\frac{N}{V}\right)^2\right]\left(\frac{N}{V} - b\right) = kT$$

o

$$\left[P + a'\left(\frac{n}{V}\right)^2\right]\left(\frac{V}{n} - b'\right) = RT$$

ecuación que se denomina de Van der Waals por haber sido propuesta, en 1873, por Johannes van der Waals (1837-1923), y en la que N es el número total de moléculas y n el número total de moles.

Una expresión más general de escribir la ecuación de estado de un gas real es desarrollando en serie la presión como función de la densidad, lo que se conoce como desarrollo del virial, propuesto por Clausius (1822-1888)

$$P = \frac{NkT}{V}\left[1 + A\frac{N}{V} + B\left(\frac{N}{V}\right)^2 + \cdots\right]$$

en la cual, A, B, ... son los coeficientes del virial. Evidentemente, si nos quedamos sólo con el primer término del desarrollo, se obtiene la ecuación de estado del gas perfecto (19.4). Al ir utilizando más términos del desarrollo la ecuación va representando con mayor fidelidad el comportamiento del gas real. Para cada gas y para cada rango de temperaturas deben obtenerse experimentalmente los valores de los coeficientes del virial.

Es fácil expresar la ecuación de Van der Waals en forma virial, para ello vamos a escribirla de la siguiente manera

$$P = \frac{NkT}{V - bN} - a\left(\frac{N}{V}\right)^2 = \frac{NkT}{V\left(1 - b\dfrac{N}{V}\right)} - a\left(\frac{N}{V}\right)^2 =$$

$$= \frac{NkT}{V}\left(1 - b\frac{N}{V}\right)^{-1} - a\left(\frac{N}{V}\right)^2$$

Desarrollando en serie

$$\left(1 - b\frac{N}{V}\right)^{-1} = 1 + b\frac{N}{V} + b^2\frac{N^2}{V^2} + \cdots$$

y el segundo término de la presión puede expresarse de la forma

$$a\left(\frac{N}{V}\right)^2 = a\,\frac{NkT}{V}\,\frac{N}{kTV}$$

Todo lo cual llevado a la expresión de la presión permite escribir

$$P = \frac{NkT}{V}\left[1 + \left(b - \frac{a}{kT}\right)\frac{N}{V} + b^2\,\frac{N^2}{V^2} + \cdots\right]$$

Ecuación que, al ser comparada con la del virial, nos da para los dos primeros coeficientes las expresiones

$$A = b - a/kT \qquad \text{y} \qquad B = b^2$$

Primer principio de la Termodinámica

CAPÍTULO 20

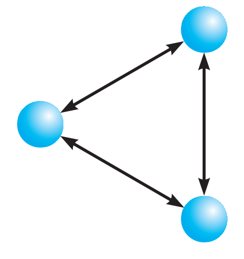
20.1 Energía

En Mecánica ya hemos definido algunas formas de energía, como la cinética y la potencial, así como el modo de calcular su valor. Ahora, ampliaremos el concepto de *energía*, que podemos definir de una forma más general y abstracta, como *la capacidad de un sistema para producir un efecto*. La energía es una propiedad de los sistemas que juega un papel importante en la explicación de las interacciones entre éstos, es almacenada en ellos y puede transferirse de unos a otros al interactuar entre sí.

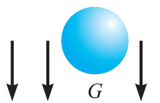
La energía de un sistema presenta dos aspectos completamente distintos: uno corresponde a la energía mecánica (cinética y potencial), medible macroscópicamente y que depende de la posición, velocidad y masa del sistema considerado en su conjunto; otro, que se denomina *energía interna*, radica en el estado energético de cada una de las partículas que componen el sistema, perteneciendo, por tanto, al mundo microscópico; ésta no puede ser medida directamente y es necesario hacer una formulación macroscópica de la misma, que nos permita su cálculo.

Muchas son las formas en las que un sistema puede almacenar su energía interna:

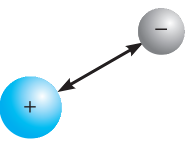
Como *energía potencial intermolecular*, dependiendo de las fuerzas intermoleculares y de la posición relativa de las moléculas entre sí, no pudiendo ser determinada con exactitud por no conocerse ni la función potencial de las fuerzas intermoleculares, ni la posición relativa en cada instante de las moléculas. Para gases a muy bajas densidades, las distancias intermoleculares se hacen lo suficientemente grandes como para poder considerar que las moléculas no interactúan entre sí; tenemos entonces un sistema de partículas independientes, un *gas ideal*. Dentro de las fuerzas intermoleculares hemos incluido las gravitacionales y las culombianas que se ejercen entre sí las diferentes moléculas.



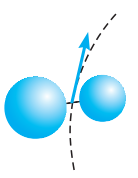
Como *energía potencial gravitacional*, debida a la acción de campos gravitacionales externos al sistema, siendo función de la intensidad de éstos y de la masa de la partícula sometida a ellos.



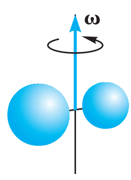
Como *energía potencial electrónica*, correspondiente a los campos gravitacionales y eléctricos internos que actúan sobre los electrones, y hacen que éstos permanezcan en sus órbitas de forma estable.



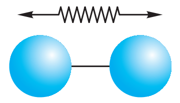
Como *energía de traslación molecular*, que es la energía cinética correspondiente al movimiento de traslación de las moléculas dentro del sistema.



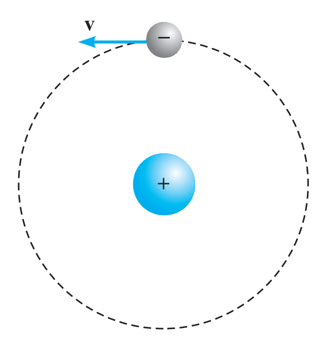
Como *energía de rotación molecular*, que es la energía cinética correspondiente al movimiento de rotación de las moléculas dentro del sistema.



Como *energía de vibración molecular*, que aparece en las moléculas cuyos átomos vibran alrededor de su centro de masas.



Como *energía cinética de traslación electrónica*, que es la energía cinética que lleva el electrón en su órbita, debida al movimiento de traslación.



Como *energía cinética de rotación electrónica*, que es la energía cinética en el movimiento de rotación del electrón alrededor de un eje que pasa por su centro (*spin*).

Como *energía cinética de rotación nuclear* (*spin* nuclear), que es la energía cinética en el movimiento de rotación del núcleo alrededor de un eje que pasa por su centro.

Como *energía asociada a momentos dipolares eléctricos o magnéticos*. Los electrones recorriendo su órbita crean dipolos magnéticos que, en presencia de un campo magnético externo, se orientan almacenando una energía, función de su momento dipolar. Análogamente, los átomos neutros no tienen sus cargas eléctricas repartidas simétricamente y constituyen un dipolo eléctrico, que se orienta en presencia de un campo eléctrico externo y, almacenando una energía, función de su momento dipolar. Estas energías tienen mucha importancia en los dieléctricos y materiales paramagnéticos.

Como *energía másica*, puesto que, según veremos al estudiar Mecánica relativista, toda masa m_0 en reposo es asiento de una energía $m_0 c^2$.

En resumen, la energía total de un sistema, E, puede expresarse como suma de su energía mecánica macroscópica y su energía interna, U, microscópica, subdividiéndose la primera en cinética E_c y potencial E_p, y la segunda, según hemos indicado:

$$E = E_c + E_p + U \qquad [20.1]$$

Evidentemente, la energía de un sistema compuesto de otros varios es la suma de las energías de cada uno de éstos, es decir, la energía es una propiedad extensiva.

20.2 Trabajo

La definición de trabajo fue establecida en el Capítulo 8, al estudiar el trabajo mecánico o trabajo realizado por las fuerzas al desplazar su punto de aplicación, y todo lo allí visto es de aplicación general.

El trabajo, en sentido abstracto, puede definirse como *una de las formas de intercambio energético entre sistemas*: un sistema puede ceder energía a otro realizando sobre él un trabajo; o como *una de las maneras de cambiar la energía de forma*: la energía cinética puede transformarse en potencial realizando un trabajo contra las fuerzas gravitacionales. Las recíprocas no son ciertas, toda forma de intercambio de energía entre sistemas no es un trabajo, ni todo cambio de forma en la energía es un trabajo.

El trabajo, en general, depende de la trayectoria seguida por el punto de aplicación de las fuerzas, por ello, el trabajo no es una propiedad de los sistemas, ni es algo contenido en los sistemas, únicamente se realiza cuando interactúan entre sí los sistemas, o éstos y el medio exterior, y depende del proceso seguido en la interacción.

Debemos señalar aquí el convenio de signos que se utiliza en Termodinámica, según el cual, el trabajo realizado por el sistema o trabajo que produce el sistema se considera positivo, y el trabajo realizado sobre el sistema o consumido por él se considera negativo (Figura 20.1).

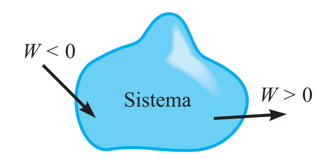
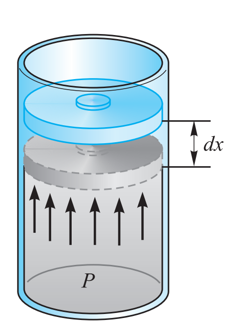


Figura 20.1.

En Termodinámica, el único trabajo que se considera es el realizado por las fuerzas que se ejercen el sistema y su entorno, a través de la pared límite o *trabajo exterior*. No se considera nunca el *trabajo interno* del sistema, que es el realizado por las fuerzas que se ejercen entre sí las diferentes partes del sistema, ya que éste no cambia la energía total del mismo. Tal es el caso de un sistema formado por dos

recipientes rígidos, en uno de los cuales está confinado un gas y en el otro se ha hecho el vacío. Si dejamos expansionarse libremente el gas hacia el recipiente vacío, se realiza un trabajo interno al sistema, el gas realiza trabajo para llenar la parte vacía hasta igualarse las presiones en todo el sistema, pero no hay trabajo alguno intercambiado por el sistema con el medio exterior.

20.3 Trabajo en el cambio de volumen de un sistema



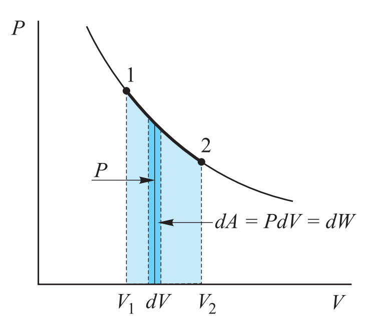


Figura 20.2.

Consideremos un gas contenido en un cilindro circular recto, cuya sección normal tiene un área A, mantenido en él mediante un pistón deslizante sin rozamiento (Figura 20.2). Si en una determinada posición es P la presión que ejerce el gas sobre el pistón, la fuerza total sobre éste será PA y, para un desplazamiento elemental del pistón, dx, el trabajo realizado será:

$$dW = PA\,dx$$

lo que, teniendo en cuenta que $dV = A\,dx$, se escribe $dW = P\,dV$, y el trabajo realizado al pasar de un estado de volumen V_1 a otro de volumen V_2 es:

$$dW = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV \qquad [20.2]$$

Si el desplazamiento del pistón es sumamente lento, podemos considerar que el sistema evoluciona pasando por una infinita sucesión de estados de equilibrio (proceso cuasi-estático) y, en consecuencia, en todo momento se verifica la ecuación de estado, $P = P(V, T)$, lo que posibilita la integración de la Ecuación [20.2]

En un diagrama $P - V$, presión en ordenadas y volumen en abscisas (Figura 20.2), el trabajo elemental $dW = P\,dV$, coincide con el área elemental, y el trabajo total será el área limitada por la curva de la transformación $P = P(V)$, las dos ordenadas de los estados inicial y final, y el eje de abscisas.

Calculemos el trabajo en algunos procesos en los cuales la integración de [20.2] es inmediata:

a) Proceso isócoro. Obviamente, el trabajo será nulo, al ser $dV = 0$.

b) Proceso isóbaro. En procesos a presión constante, $P = P_1$, la integración de [20.2] da para el trabajo la expresión:

$$W_{12} = P_1(V_2 - V_1) \qquad [20.3]$$

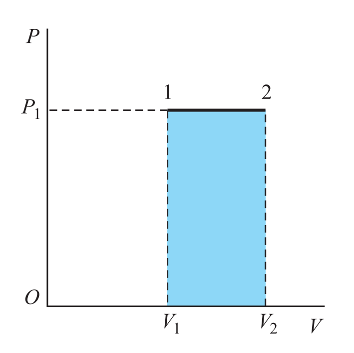


Figura 20.3.

En un diagrama $P - V$, la transformación isóbara se representa por un segmento de línea recta paralelo al eje de abscisas, y el trabajo por el área del rectángulo formado por la citada línea, las ordenadas correspondientes a los estados inicial y final, y el eje de abscisas, que se ha rayado en la Figura 20.3, cuya base es $V_2 - V_1$ y altura P_1.

c) Proceso isotermo de un gas perfecto. Teniendo en cuenta la ecuación de estado del gas perfecto y suponiendo que el proceso es cuasi-estático, la Expresión [20.2] se escribe:

$$W_{12} = nR \int_{V_1}^{V_2} T\,\frac{dV}{V}$$

y, por ser además el proceso isotermo, la integración de esta última expresión da:

$$W_{12} = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \qquad [20.4]$$

trabajo que es positivo o producido, si es $V_2 > V_1$, es decir, si hay expansión, y negativo o consumido, en caso contrario.

En función de las presiones, puesto que es $P_1V_1 = nRT_1 = P_2V_2$, se expresa:

$$W_{12} = nRT_1 \ln \frac{P_1}{P_2} \qquad [20.5]$$

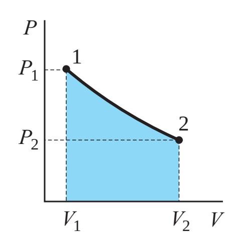


Figura 20.4.

En un diagrama $P - V$, la transformación isoterma de un gas perfecto es una hipérbola equilátera y el trabajo está expresado por el área sombreada en la Figura 20.4.

Las transformaciones cíclicas se representan en el diagrama $P - V$ por una curva cerrada C. Al expansionarse el gas desde el volumen V_1 al volumen V_2, siguiendo la línea C_1 (Figura 20.5), realiza un trabajo que está representado por el área limitada por la curva C_1, las ordenadas $V = V_1$ y $V = V_2$, y el eje de abscisas; éste es un *trabajo realizado* por el sistema, W_r. Para llevar el gas desde el volumen V_2 al volumen V_1 siguiendo la curva C_2, es necesario comunicar a éste un trabajo, que está representado por el área limitada por la curva C_2, las dos ordenadas $V = V_1$ y $V = V_2$, y el eje de abscisas; es un *trabajo consumido* por el sistema, W_c. En consecuencia, el *trabajo útil o neto* que el sistema da está representado por el área encerrada por la curva C representativa del ciclo, siendo:

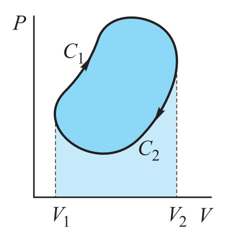


Figura 20.5.

$$W_n = W_r - W_c$$

20.4 Trabajo en un proceso irreversible

En un proceso irreversible no se verifica en todos los instantes del mismo la ecuación de estado y, por ello, no se puede calcular a partir de las variables de estado el trabajo intercambiado. Podrá hacerse mediante datos del medio exterior o admitiendo alguna aproximación al proceso. Así, podemos calcular el trabajo producido en la expansión libre de un gas bajo una presión exterior, P_2. Sea un gas contenido en un cilindro, ocupando un volumen V_1 y a una presión $P_1 > P_2$. Se suelta el émbolo que lo mantiene confinado y el gas se expansiona de forma súbita hasta un volumen V_2, manteniéndose la presión exterior constante, P_2. El proceso es irreversible y admitiremos que la caída de presión en el interior del cilindro es instantánea, realizándose un proceso a presión constante, P_2, desde un volumen V_1 hasta otro V_2. En este caso, el trabajo realizado por el gas es:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV = P_2 \int_{V_1}^{V_2} dV = P_2(V_2 - V_1) \qquad [20.6]$$

20.5 Concepto de calor

Mediante el sentido del tacto hemos adquirido un concepto intuitivo del estado térmico de un cuerpo, así, corrientemente se dice que un cuerpo está más o menos caliente, o más o menos frío que otro, lo cual está relacionado directamente con la temperatura, pudiendo decirse que ésta es la medida del estado térmico del cuerpo. La experiencia pone de manifiesto que dos sistemas a diferente temperatura, puestos en contacto térmico, acaban en equilibrio térmico: el más caliente se enfría y el más frío se calienta. Esto llevó a suponer la existencia de una sustancia, *el calórico*, que se almacena en los cuerpos y que se transmite de los de mayor a los de menor temperatura.

En 1798, Benjamín Thompson, conde de Rumford, llegó a la conclusión de que el calor no era una sustancia, al observar cómo se calentaban tanto el material del

cañón, como las virutas que se desprendían en el torneado de su ánima, produciéndose una generación continua de calor. En este caso, era el trabajo realizado por la broca del torno la responsable del flujo de calor.

La primera idea de que el calor puede ser una forma de energía, parece que se debe al ingeniero francés Séguin, en 1839, aunque, en general, se le atribuye al físico alemán Mayer, en 1842. El primero que relacionó cuantitativamente el calor y el trabajo fue Joule que, en 1830, estableció el equivalente mecánico del calor, si bien de forma poco exacta. Helmholtz, en 1847, generalizó los trabajos de Joule a sistemas eléctricos y químicos.

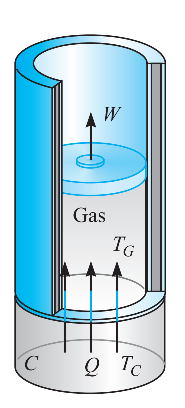


Figura 20.6.

Es muy importante poner de manifiesto el carácter energético del calor; para ello, consideremos el gas encerrado en un cilindro cuya pared lateral sea aislante térmico, que tenga una base fija y diaterma, y la otra formada por un pistón aislante y móvil sin rozamiento (Figura 20.6). Si en contacto con la base diaterma colocamos un cuerpo C a mayor temperatura que el gas encerrado en el cilindro, el gas se expansiona desplazando el émbolo y produciendo un trabajo; esta energía empleada por el gas en producir un trabajo forzosamente debe provenir del cuerpo C, y no es un trabajo mecánico, ya que la base es fija; pues bien, definiremos el *calor* como *la forma de energía que se transfiere del sistema de mayor temperatura al de menor, en virtud de su diferencia de temperaturas*. Por tanto, el calor es un fenómeno de transporte, es una energía de tránsito y no tiene sentido hablar de calor almacenado en un cuerpo, como no lo tiene hablar de trabajo almacenado en un cuerpo. En consecuencia, el calor no es una propiedad del sistema. El calor intercambiado en un proceso depende del camino seguido durante el proceso, no es, pues, la diferencial exacta de función alguna de estado.

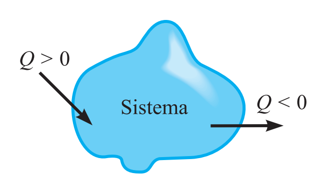


Figura 20.7.

Se ha convenido que el calor recibido por un sistema se considere como positivo y el cedido, como negativo (Figura 20.7). Hay que hacer notar que la energía electromagnética radiante por todos los cuerpos en función de su temperatura no queda englobada en la definición de calor adoptada.

20.6 Unidades de calor

Por ser el calor una forma de la energía, su ecuación de dimensiones y las unidades en que se mide son las de ésta. Así, en el sistema internacional, la unidad de calor es el julio.

Caloría

Tradicionalmente, se ha usado como unidad de calor la *caloría*, definiéndola como *la cantidad de calor que es necesario comunicar a un gramo de agua pura para elevar su temperatura de* 14,5 *a* 15,5 °*C, a la presión constante de una atmósfera*.

De análoga manera se definió la BTU (British Termal Unit) como *la cantidad de calor que es necesario comunicar a una libra de agua pura para elevar su temperatura de 59,5 a 60,5 °F, a la presión constante de una atmósfera*.

La equivalencia entre estas dos últimas unidades es:

$$1 \text{ B.T.U.} = 1 \text{ libra} \times 1\,^{\circ}\text{F} = 0{,}4536 \text{ kg } 5/9\,^{\circ}\text{C} = 0{,}252 \text{ kcal}$$

La equivalencia entre la caloría y el julio únicamente puede determinarse experimentalmente y de acuerdo con la definición de caloría. La experiencia debe determinar la energía por gramo de agua que es necesario suministrar a una masa de ésta para que su temperatura pase de 14,5 a 15,5 °C, a la presión constante de una atmósfera. El factor de conversión se denomina *equivalente mecánico del calor* y se simboliza por J. De esta forma, J es un valor sujeto a los refinamientos de las experiencias empleadas en su determinación, y no se puede establecer con certeza

absoluta la equivalencia entre la caloría y el julio. Todo ello llevó a definir por convenio la *caloría internacional* como múltiplo fijo del julio:

$$1 \text{ cal} = 4{,}1867 \text{ julios}$$

y, análogamente:

$$1 \text{ BTU} = 1055{,}04 \text{ julios}$$

resultando para la equivalencia entre ambas:

$$1 \text{ BTU} = 251{,}998 \text{ cal}$$

El valor actual, recomendado para el equivalente mecánico del calor o *caloría termodinámica*, por el Comité sobre Datos para Ciencia y Tecnología (CODATA), en 1998, es:

$$1 \text{ cal} = 4{,}18398 \text{ J}$$

20.7 Capacidades caloríficas. Calores específicos

Si a un sistema, que inicialmente se encuentra a la temperatura T, le suministramos una cantidad de calor ΔQ y sin cambiar de estado, eleva su temperatura una cantidad ΔT; se define la *capacidad calorífica media* del sistema, entre las temperaturas T y $T + \Delta T$, mediante la relación:

$$C_T^{T+\Delta T} = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

El límite al que tiende la expresión anterior al tender ΔT a cero se denomina *capacidad calorífica instantánea* o *verdadera* a la temperatura T y se expresa:

$$C = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{dQ}{dT} \qquad [20.7]$$

En general, C será función de la temperatura $C = C(T)$, ya que la curva de calentamiento también lo es, $Q = Q(T)$ y, en general, será de grado superior a uno. Las dimensiones de la capacidad calorífica serán las de una energía divididas por una temperatura, es decir:

$$[C] = ML^2T^{-2}\theta^{-1}$$

La unidad para capacidades caloríficas en el S.I. es el julio/grado.

Se define el *calor específico como la capacidad calorífica por unidad de masa*:

$$c = \frac{1}{m}\frac{dQ}{dT} \qquad [20.8]$$

su ecuación de dimensiones es $[c] = L^2T^{-2}\theta^{-1}$ y su unidad, en el S.I., es el $\text{J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$.

También suele utilizarse el *calor molar* o *calor específico molar*, que es la *capacidad calorífica por mol*:

$$c_M = \frac{1}{n}\frac{dQ}{dT} = \frac{M}{m}\frac{dQ}{dT} \qquad [20.9]$$

siendo n el número de moles, M la masa molecular y m los gramos de sustancia. Su ecuación de dimensiones es $[c_M] = ML^2T^{-2}\text{mol}^{-1}$ y su unidad, en el S.I., es el $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}\ \text{K}^{-1}$.

La cantidad de calor que es necesario suministrar a un sistema para que, sin cambiar de estado, su temperatura pase de T a $T + dT$, de acuerdo con las definiciones anteriores, puede expresarse de cualquiera de las formas:

$$dQ = C\,dT = mc\,dT = nc_M\,dT$$

y, para un cambio desde la temperatura T_1 a la temperatura T_2:

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} C\,dT = m\int_{T_1}^{T_2} c\,dT = n\int_{T_1}^{T_2} c_M\,dT = \frac{m}{M}\int_{T_1}^{T_2} c_M\,dT \qquad [20.10]$$

siendo necesario conocer las funciones $C = C(T)$, $c = c(T)$ o $c_M = c_M(T)$ para poder resolver la correspondiente integral, funciones que se deben determinan experimentalmente.

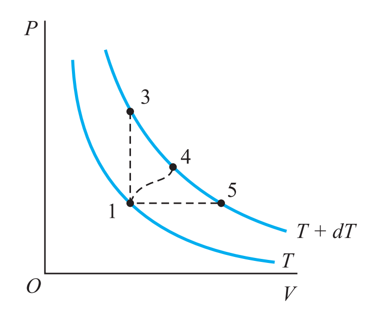


Figura 20.8.

Puesto que el calor no es función de estado, es necesario definir el camino que sigue el sistema para pasar de la temperatura T a la $T + dT$. Si un gas ideal está en el estado 1, indicado en la Figura 20.8, cualquiera de los caminos 1-3, 1-4 o 1-5, entre los infinitos posibles, le lleva a la temperatura $T + dT$. La cantidad de calor necesaria para la realización de estos caminos es diferente de uno a otro y, por tanto, el calor específico es diferente en cada transformación. Una sustancia, en consecuencia, tendrá un número infinito de calores específicos, siendo muy importantes, y posteriormente se determinarán, los *calores específicos a volumen constante* y *a presión constante*, que corresponden, respectivamente, a transformaciones del tipo 1-3 y 1-5.

20.8 Primer principio

El primer principio de la Termodinámica constituye un principio de conservación de la energía para la magnitudes calor y trabajo, que son objeto de tratamiento especial por aquélla. Podemos enunciarlo así: *durante un proceso cíclico realizado por un sistema, la cantidad neta de calor intercambiada es igual a la cantidad neta de trabajo intercambiado, cuando ambas magnitudes se expresan en las mismas unidades*. Lo que, analíticamente, es:

$$\oint dQ = \oint dW \qquad [20.11]$$

debiendo extenderse la integración curvilínea a lo largo del ciclo recorrido por el sistema.

Consideremos dos estados, 1 y 2 (Figura 20.9) de un cierto sistema termodinámico y, partiendo del estado 1, realicemos dos ciclos que pasen por el estado 2, el 1A2D y el 1B2D. La aplicación del primer principio a estos ciclos da:

Figura 20.9.

$$\int_{1\,(A)}^{2} dQ + \int_{2\,(D)}^{1} dQ = \int_{1\,(A)}^{2} dW + \int_{2\,(D)}^{1} dW$$

$$\int_{1\,(B)}^{2} dQ + \int_{2\,(D)}^{1} dQ = \int_{1\,(B)}^{2} dW + \int_{2\,(D)}^{1} dW$$

y, al restar miembro a miembro, es:

$$\int_{1\,(A)}^{2} dQ - \int_{1\,(B)}^{2} dQ = \int_{1\,(A)}^{2} dW - \int_{1\,(B)}^{2} dW$$

o bien:

$$\int_{1\,(A)}^{2} (dQ - dW) = \int_{1\,(B)}^{2} (dQ - dW)$$

de lo que se deduce que la cantidad:

$$\int_{1}^{2} (dQ - dW)$$

no depende de la trayectoria seguida para pasar del estado 1 al 2, sino únicamente de estos estados. En consecuencia, la cantidad subintegral será una diferencial exacta de una cierta magnitud, que es la energía total del sistema, E, verificando:

$$dE = dQ - dW \qquad [20.12]$$

que es una expresión diferencial del primer principio.

Integrando esta ecuación para una trayectoria cualquiera entre los estados 1 y 2:

$$\int_{1\,(C)}^{2} dE = \int_{1\,(C)}^{2} dQ - \int_{1\,(C)}^{2} dW$$

o bien:

$$E_2 - E_1 = Q_{12} - W_{12} \qquad [20.13]$$

ya que ni dQ ni dW son diferenciales exactas. Siendo E_1 y E_2, la energía total del sistema en los estados 1 y 2, respectivamente; Q_{12}, el calor tomado por el sistema al evolucionar del estado 1 al 2; y W_{12}, el trabajo producido por el sistema al pasar del estado 1 al 2, y de acuerdo con el convenio de signos adoptado, expresa que *la variación de energía de un sistema es igual al calor absorbido menos el trabajo producido por el sistema*.

Diferenciando la Ecuación [20.1]:

$$dE = dE_C + dE_P + dU$$

y, al sustituir en la [20.12], ésta se escribe:

$$dQ = dW + dU + dE_C + dE_P \qquad [20.14]$$

que es una nueva expresión diferencial del primer principio y que integrada es:

$$Q_{12} = W_{12} + U_2 - U_1 + E_{c2} - E_{c1} + E_{p2} - E_{p1} \qquad [20.15]$$

ya que dU también es diferencial exacta, por serlo dE, dE_C y dE_P.

Si en el sistema en estudio no sufren variación ni la energía cinética ni la potencial, las ecuaciones [20.14] y [20.15] se escriben:

$$dQ = dU + dW \qquad [20.16]$$

y

$$Q_{12} = U_2 - U_1 + W_{12} \qquad [20.17]$$

por tanto, en los sistemas con las restricciones impuestas, *la cantidad neta de calor absorbida por el sistema al evolucionar entre dos estados, es igual al trabajo producido por el sistema en esa evolución, más el aumento de energía interna al pasar el sistema del estado* 1 *al* 2.

Si el único trabajo es el debido a las presiones, la [20.16] se escribe:

$$dQ = dU + P\,dV \tag{20.18}$$

que es la ecuación diferencial del primer principio más ampliamente utilizada, pero no deben olvidarse las restricciones impuestas para su deducción.

20.9 Entalpía

La *entalpía* de un sistema es una nueva magnitud que se define mediante la relación:

$$H = U + PV \tag{20.19}$$

La entalpía será una función de estado, ya que es función uniforme de variables de estado. Su ecuación de dimensiones es la correspondiente a una energía, pues así es la de U y la de PV, siendo sus unidades las correspondientes a ésta en los distintos sistemas.

La *entalpía específica* es la entalpía por unidad de masa, $h = H/m$ y, para la unidad de masa, la [20.19] se escribe:

$$h = u + pv \tag{20.20}$$

en la que u es la *energía interna específica*, o energía interna por unidad de masa, $u = U/m$, y los valores de p y v son también los correspondientes a la unidad de masa. La Ecuación [20.20] también puede estar expresada por mol, en cuyo caso tanto la entalpía como la energía interna están expresadas por mol, así como los valores de p y v.

Diferenciando la [20.19] se obtiene:

$$dH = dU + P\,dV + V\,dP \tag{20.21}$$

que permite escribir la [20.18] de la forma:

$$dQ = dH - V\,dP \tag{20.22}$$

que es una nueva expresión diferencial del primer principio.

Para procesos a presión constante, como son los que tienen lugar durante un corto periodo de tiempo en la naturaleza, la anterior expresión se reduce a:

$$dQ = dH$$

que, integrada entre los estados inicial y final del proceso, es:

$$Q_{12} = H_2 - H_1 \tag{20.23}$$

Lo que nos indica que *el intercambio de calor en un proceso a presión constante es igual a la variación de entalpía del sistema*.

20.10 Calores específicos a volumen constante y a presión constante

La energía interna específica puede expresarse en función de las variables independientes v y T, $u = u(v,T)$, y su diferencial es:

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT$$

lo que, llevado a la [20.18], y agrupando convenientemente, permite escribir:

$$dq = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_T + p\right] dv$$

Para un proceso a volumen constante, es:

$$dq = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT$$

y como a volumen constante es $dq = c_v \, dT$, resulta:

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v \qquad [20.24]$$

expresión en la que u es la energía interna específica por unidad de masa.

Para la aplicación de esta definición del calor específico a volumen constante, además de las limitaciones que ya tiene la Ecuación [20.18], debe permanecer constante la composición del sistema. Por otra parte, el calor específico así definido es una propiedad del sistema y, como tal, de aplicación general a procesos sean o no a volumen constante e, incluso, sean o no *cuasi-estáticos*.

El calor específico a volumen constante, solamente para procesos a volumen constante puede expresarse $c_v = dq/dT$.

Si la Ecuación [20.18] fuese la correspondiente a un mol de sustancia, la [20.24] daría el calor específico molar a volumen constante, c_{Mv}:

$$c_{Mv} = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v \qquad [20.25]$$

Expresión en la que u es la energía interna específica por mol.

La entalpía específica puede expresarse como función de las variables independientes T y p, $h = h(p, T)$, y su diferencial total es:

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT$$

lo que, llevado a [20.22] y agrupado convenientemente, da:

$$dq = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT + \left[\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T - v\right] dp$$

Para un proceso a presión constante, es

$$dq = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT$$

y como a presión constante es $dq = c_p\, dT$, resulta:

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p \qquad [20.26]$$

en la que h es la entalpía específica o por unidad de masa, que es otra propiedad del estado del sistema, de aplicación general con las limitaciones ya indicadas, y que únicamente en el caso de ser el proceso a presión constante puede expresarse por:

$$c_p = \frac{dq}{dT}$$

De haber escrito la Expresión [20.22] para un mol de sustancia, hubiéramos obtenido el calor específico molar a presión constante, c_{Mp}:

$$c_{Mp} = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p \qquad [20.27]$$

donde h es la entalpía específica por mol.

Tabla 20.1. Calores específicos molares a 20 °C y 1 atm, en $\text{cal} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot {}^\circ\text{K}^{-1}$

Sustancia	c_{Mv}	c_{Mp}	$\gamma = \frac{c_{Mp}}{c_{Mv}}$
GASES MONOATÓMICOS:			
Helio (He)	2,98	4,97	1,6678
Argón (Ar)	2,98	4,97	1,6678
GASES DIATÓMICOS:			
Hidrógeno (H_2)	4,88	6,87	1,4078
Nitrógeno (N_2)	4,96	6,95	1,4012
Oxígeno (O_2)	5,04	7,03	1,3948
Monóxido de carbono (CO)	4,98	6,97	1,3996
GASES POLIATÓMICOS:			
Dióxido de carbono (CO_2)	6,80	8,83	1,3278
Amoniaco (NH_3)	6,65	8,80	1,3233
Dióxido de azufre (SO_2)	7,50	9,65	1,2867
Sulfuro de hidrógeno (SH_2)	6,20	8,27	1,3339
LÍQUIDOS:			
Agua (H_2O)		17,99	
Alcohol etílico		21,86	
Mercurio (Hg)		6,69	
SÓLIDOS:			
Aluminio (Al)		5,82	
Cobre (Cu)		5,85	
Hierro (Fe)		5,97	
Plata (Ag)		6,09	
Plomo (Pb)		6,40	

20.11 Energía interna, entalpía y calores específicos de los gases perfectos

Experimentalmente, en 1845, Joule comprobó que la energía interna de un gas perfecto era función únicamente de la temperatura absoluta de éste, $U = U(T)$, lo que constituye la ley que lleva su nombre. Para ello, utilizó dos recipientes diatermos, A y B, unidos por una conducción que tenía una llave de paso (Figura 20.10). Ini-

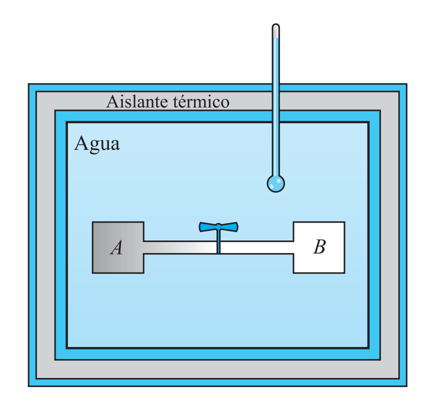


Figura 20.10.

cialmente, el recipiente *A* estaba lleno de gas a baja presión, de forma que pudiera ser considerado gas perfecto y, en el *B*, había hecho el vacío. Ambos estaban sumergidos en un baño de agua, con termómetros dispuestos para medir la temperatura del agua, y todo ello estaba encerrado en un recinto adiabático.

El sistema termodinámico objeto de estudio es el conjunto de los dos recintos, uno con el gas y el otro inicialmente vacío. Al abrir la llave de paso, el gas del recinto *A* se expansiona y ocupa también el recinto *B*, disminuyendo la presión en el gas y aumentando el volumen ocupado por él. Los termómetros no acusaron variación de temperatura del baño, lo que indicaba que no había intercambio de calor entre el sistema y el medio, $\Delta Q = 0$. Tampoco había intercambio de trabajo, ya que los límites del sistema eran rígidos, $\Delta W = 0$. Por tanto, la aplicación del primer principio al sistema considerado obliga a que sea $\Delta U = 0$, es decir, la energía interna del sistema permanece invariable. Puesto que el volumen del sistema y su presión habían variado y únicamente la temperatura había permanecido constante, dedujo Joule que la energía interna de un gas perfecto era únicamente función de ésta.

Analicemos la expansión del gas. El gas del recinto *A* realiza un trabajo para aumentar la presión en el recinto *B* hasta llegar a la presión de equilibrio. Por tanto, el gas que queda en *A* se enfría y toma calor del agua, mientras que el gas que pasa a *B*, recibe trabajo, aumenta su temperatura y cede calor al agua. Las cantidades de calor intercambiadas son, aproximadamente, iguales y el calor neto intercambiado entre el sistema y el baño es nulo. Si la experiencia se hace partiendo de altas presiones en el recipiente *A*, se puede observar que sí existe algún intercambio de calor entre el sistema y el agua, es decir, en un gas real, la energía interna es función de la temperatura y de la presión. Cuando la presión inicial tiende a cero, la variación de temperatura del agua tiende también a cero y, por tanto, en un gas perfecto la energía interna únicamente depende de la temperatura absoluta.

Teniendo en cuenta la ley de Joule, de la [20.24] se deduce que el calor específico a volumen constante para un gas perfecto es:

$$c_v^* = \frac{du}{dT} \qquad [20.28]$$

ecuación en la cual u es la energía interna por unidad de masa de gas perfecto. Si u fuese la energía interna por mol de gas perfecto, hubiéramos obtenido el calor específico molar del gas perfecto a volumen constante, c_{Mv}^* [1].

La entalpía de un gas perfecto, de acuerdo con la ecuación de estado, se escribe:

$$H = U(T) + PV = U(T) + nRT = H(T) \qquad [20.29]$$

y, por tanto, también es función únicamente de la temperatura absoluta del gas perfecto. Teniendo esto en cuenta, de la [20.26] se deduce que el calor específico por unidad de masa a presión constante para un gas perfecto es:

$$c_p^* = \frac{dh}{dT} \qquad [20.30]$$

fórmula en la que h es la entalpía por unidad de masa de gas perfecto. Si h hubiera sido la entalpía por mol de gas perfecto, hubiéramos obtenido el calor específico molar del gas perfecto a presión constante, c_{Mp}^*.

---

[1] *Para simbolizar que los calores específicos corresponden a gases perfectos utilizamos como supraíndice un asterisco.*

Los calores específicos son una propiedad de estado y, por tanto, los valores dados por [20.28] y [20.30] son válidos tanto si el proceso es o no a volumen constante, como si es o no a presión constante. Hay que señalar que el calor específico a volumen constante, únicamente en un proceso a volumen constante, se puede expresar por:

$$c_v^* = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_v \tag{20.31}$$

y análogamente, el calor específico a presión constante, únicamente en los procesos a presión constante, puede expresarse por

$$c_p^* = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p \tag{20.32}$$

que para un mol se expresan

$$c_{Mv}^* = \left(\frac{dQ_M}{dT}\right)_v \quad \text{y} \quad c_{Mp}^* = \left(\frac{dQ_M}{dT}\right)_p \tag{20.33}$$

Por tanto, el calor intercambiado en un proceso a volumen constante es

$$Q_{12} = n \int c_{Mv}^* \, dT \tag{20.34}$$

y para un proceso a presión constante

$$Q_{12} = n \int c_{Mp}^* \, dT \tag{20.35}$$

Si los calores específicos molares se mantienen constantes durante el proceso son

$$Q_{12} = nc_{Mv}^*(T_2 - T_1) \quad \text{y} \quad Q_{12} = nc_{Mp}^*(T_2 - T_1) \tag{20.36}$$

los calores intercambiados en procesos a volumen constante y a presión constante, respectivamente.

Resulta evidente, de la ley de Joule y de la [20.29], que las líneas isotermas en un diagrama p-v para un gas perfecto, serán también líneas de energía interna constante y de entalpía constante, de aquí que también de las denomine *isentálpicas*.

La variación de la energía interna por unidad de masa en un gas perfecto se obtiene integrando la Ecuación [20.28]:

$$u_2 - u_1 = \int c_v^* \, dT \tag{20.37}$$

que, en caso de procesos en los cuales pueda considerarse constante c_v^*, la integración es inmediata:

$$u_2 - u_1 = c_v^*(T_2 - T_1) \tag{20.38}$$

La variación de entalpía por unidad de masa se obtiene integrando la [20.30]:

$$h_2 - h_1 = \int c_p^* \, dT \tag{20.39}$$

que, para procesos en los cuales c_p^* sea constante, es:

$$h_2 - h_1 = c_p^*(T_2 - T_1) \tag{20.40}$$

Análogamente, para un mol de gas perfecto serán:

$$u_2 = u_1 = \int c^*_{Mv}\, dT \quad \text{y} \quad h_2 - h_1 = \int c^*_{Mp}\, dT \qquad [20.41]$$

La determinación de las variaciones de energía interna o de entalpía de un gas perfecto hace necesario conocer sus calores específicos en función de la temperatura, para poder proceder a la integración de las expresiones [20.34], [20.35], [20.37], [20.39] o [20.41]. Varios autores: Spencer, Justine, Flanagan, Chipman, Fontana, Sweigert y Beardsley, han propuesto unas fórmulas empíricas que dan el valor del calor específico molar a presión constante en función de la temperatura absoluta. Las citamos en la Tabla 20.2.

Tabla 20.2. Calor específico molar a presión constante de algunos gases

Gas	$\text{cal} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Aire	$c_{Mp} = 6{,}36 + 9{,}92 \cdot 10^{-4}\, T - 8{,}52 \cdot 10^{-8}\, T^2$
Anhídrido carbónico	$c_{Mp} = 16{,}2 - 6530\, \text{T}^{-1} + 142 \cdot 10^4\, \text{T}^{-2}$
Anhídrido sulfuroso	$c_{Mp} = 11{,}89 + 6{,}05 \cdot 10^{-4}\, \text{T} - 85{,}6 \cdot 10^4\, \text{T}^{-2}$
Hidrógeno	$c_{Mp} = 5{,}76 + 5{,}78 \cdot 10^{-4}\, \text{T} + 20\, \text{T}^{-1/2}$
Monóxido de carbono	$c_{Mp} = 9{,}46 - 3\,290\, T^{-1} + 107 \cdot 10^4\, T^{-2}$
Nitrógeno	$c_{Mp} = 9{,}47 - 3\,470\, T^{-1} + 116 \cdot 10^4\, T^{-2}$
Oxigeno	$c_{Mp} = 11{,}515 - 173\, T^{-1/2} + 1\,530\, T^{-1}$
Vapor de agua	$c_{Mp} = 19{,}86 - 597\, T^{-1/2} + 7\,500\, T^{-1}$

20.12 Ley de Mayer

La ley de Mayer relaciona los calores específicos molares a presión constante y a volumen constante para un gas perfecto. Para su deducción, utilizaremos la definición de la entalpía específica molar de gas perfecto:

$$h(T) = u(T) + pv = u(T) + RT$$

Si derivamos esta ecuación respecto a T, resulta:

$$\frac{dh}{dT} = \frac{du}{dT} + R$$

y, teniendo en cuenta las [20.28] y [20.30], se escribe:

$$c^*_{Mp} = c^*_{Mv} + R$$

o bien:

$$c^*_{Mp} - c^*_{Mv} = R \qquad [20.42]$$

que es la conocida ley de Mayer: *la diferencia entre los calores específicos molares a presión y a volumen constante de un gas perfecto es igual al valor de la constante universal de los mismos.*

20.13 Energía interna y entalpía en una transformación de un gas ideal

Se define el *coeficiente adiabático* de un gas perfecto como *el cociente entre los valores de sus calores específicos molares a presión constante y a volumen constante*:

$$\gamma = \frac{c^*_{Mp}}{c^*_{Mv}} \tag{20.43}$$

Cuando este coeficiente es una constante, independiente de la temperatura, se dice que el gas se comporta como ideal.

De acuerdo con la ley de Mayer, siempre es $c^*_{Mp} > c^*_{Mv}$ y, por tanto, siempre es $\gamma > 1$.

Los calores específicos molares de un gas ideal pueden expresarse en función de las constantes R y γ, utilizando las expresiones [20.42] y [20.43]. Para ello, despejemos c_{Mp} de [20.43] y sustituyamos su valor en [20.42], obteniendo:

$$\gamma c^*_{Mv} - c^*_{Mv} = R$$

de donde:

$$c^*_{Mv} = \frac{R}{\gamma - 1} \quad \text{y} \quad c^*_{Mp} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \tag{20.44}$$

La variación de la energía interna molar para un gas ideal también puede expresarse en función de las citadas constantes, ya que:

$$u_2 - u_1 = R \int \frac{1}{\gamma - 1}\, dT \tag{20.45}$$

y, puesto que γ es constante, la integración da:

$$u_2 - u_1 = \frac{R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1) \tag{20.46}$$

Análogamente, la variación de la entalpía molar se expresa:

$$h_2 - h_1 = R \int \frac{\gamma}{\gamma - 1}\, dT \tag{20.47}$$

cuya integración da:

$$h_2 - h_1 = R\frac{\gamma}{\gamma - 1}(T_2 - T_1) = \gamma(u_2 - u_1) \tag{20.48}$$

20.14 Aplicación del primer principio a sistemas cerrados

Figura 20.11.

Proceso a volumen constante (isócoro). Consideremos un gas perfecto encerrado en un recipiente rígido, de volumen constante V (Figura 20.11). El estado de equilibrio inicial, estado 1, debe estar determinado por tres de los cuatro parámetros V, P_1, T_1 y n, pues el cuarto se obtiene de la ecuación de estado:

$$P_1 V = nRT_1$$

El trabajo intercambiado con el medio exterior durante el proceso 1-2 es nulo, ya que la vasija es rígida. Por tanto, el primer principio se expresa:

$$dQ = dU$$

y su integración da:

$$Q_{12} = U_2 - U_1$$

Para hacer evolucionar el sistema debemos intercambiar calor con él, calor que empleará en modificar su energía interna y, con ello, su temperatura y su presión. En el diagrama *P-V* el proceso se representa por un segmento normal al eje de los volúmenes (Figura 20.11).

Del estado final, estado 2, conocemos dos coordenadas, su volumen *V* y el número de moles *n*, ya que el sistema es cerrado. Las otras dos coordenadas están relacionadas por la ecuación de estado:

$$P_2 V = nRT_2$$

de forma que, si es conocida una de ellas, queda determinada la otra.

La cantidad de calor intercambiado en el proceso 1-2 debe verificar la relación:

$$Q_{12} = n \int_{T_1}^{T_2} c^*_{Mv}\, dT \qquad [20.49]$$

que relaciona la cantidad de calor intercambiada con las temperaturas de los estados inicial y final, y para cuya integración es necesario conocer $c^*_{Mv} = f(T)$. Si el calor específico molar permanece constante durante el proceso, la integración es inmediata y da:

$$Q_{12} = nc^*_{Mv}(T_2 - T_1)$$

La presión en el estado final se calcula a partir de la ecuación de estado.

Al suministrar calor a un sólido o a un líquido, la variación de volumen que experimentan éstos es muy pequeña y, prácticamente, todo el calor suministrado se emplea en aumentar su energía interna, elevando su temperatura.

EJEMPLO 20.1

Una vasija rígida, de volumen $V = 8{,}5$ l, contiene 1 mol de gas perfecto a la presión de 3 atm. Se le suministra la cantidad de calor $Q = 228$ cal. Admitiendo que el calor específico molar a volumen constante se mantiene constante durante el proceso y su valor es $c_{Mv} = 3{,}8\ \text{cal} \cdot \text{molg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, determinemos la temperatura y la presión en el estado final.

Solución:

La temperatura inicial es:

$$T_1 = \frac{3 \times 8{,}5}{0{,}082} = 311\ \text{K}$$

La temperatura final se obtiene aplicando la Ecuación [20.49]:

$$228 = \int_{311}^{T} 3{,}8\, dT = 3{,}8(T_2 - 311)$$

de donde:

$$T_2 = 371 \text{ K}$$

La presión final será:

$$P_2 = \frac{0{,}082 \times 371}{8{,}5} = 3{,}6 \text{ atm.}$$

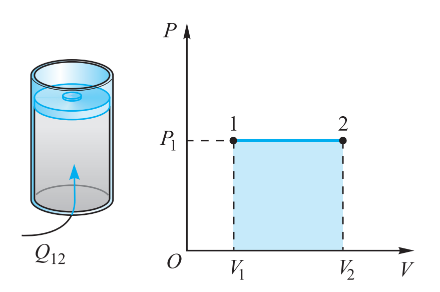


Figura 20.12.

Proceso a presión constante (isóbaro). Consideremos un gas perfecto contenido en un cilindro y mantenido a presión constante, P_1, mediante un pistón móvil sin rozamiento (Figura 20.12). El estado inicial queda definido por tres de las variables V_1, P_1, T_1 y n, y la cuarta se determina mediante la ecuación de estado. Ahora, el sistema puede intercambiar con el medio calor y también trabajo.

Al suministrar al gas una cantidad de calor Q_{12}, se expansionará, pasando del volumen V_1 al V_2 , manteniendo la presión constante. En el diagrama P-V el proceso está representado por un segmento normal al eje de las presiones (Figura 20.12).

El trabajo producido en esta expansión a presión constante es:

$$W_{12} = P_1(V_2 - V_1) = nR(T_2 - T_1) \qquad [20.50]$$

la segunda igualdad se escribe por aplicación de la ecuación de estado.

La variación de energía interna, por tratarse de un gas perfecto, está dada por la primera de [20.41] y admitiendo que el calor específico molar se mantiene constante:

$$U_2 - U_1 = nc_{Mv}(T_2 - T_1) \qquad [20.51]$$

El calor intercambiado en el proceso, por ser éste a presión constante, está dado por la [20.35] y si el calor específico molar es constante, por la segunda [20.36]:

$$Q_{12} = nc_{Mp}(T_2 - T_1) \qquad [20.52]$$

La aplicación del primer principio da:

$$Q_{12} = U_2 - U_1 + P_1(V_2 - V_1) = H_2 - H_1 \qquad [20.53]$$

Por tanto, del calor suministrado al sistema una parte se emplea en producir trabajo y otra en aumentar la energía interna del gas, y es igual a la variación de entalpía que experimenta el gas.

El volumen y la temperatura del estado final están relacionados por la ecuación de estado:

$$P_1V_2 = nRT_2$$

EJEMPLO 20.2

Un mol de gas perfecto se mantiene en el interior de un cilindro a presión constante, $P = 3$ atm., mediante un émbolo móvil sin rozamiento. El volumen inicial es de $V_1 = 8{,}5$ l. Se le suministra la cantidad de calor $Q = 228$ cal, manteniendo la presión constante. Admitiendo que el calor específico molar a presión constante se mantiene constante durante el proceso, con valor $c^*_{Mp} = 5{,}8 \text{ cal} \cdot \text{molg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, determinemos: las temperaturas inicial y final del gas, el volumen final, el trabajo realizado por el gas y el aumento de su energía interna.

Solución:

La temperatura inicial es:

$$T_1 = \frac{3 \times 8{,}5}{0{,}082} = 311 \text{ K}$$

La temperatura final se obtiene por aplicación de la Ecuación [20.32] y, por ser constante el calor específico molar, directamente de la [20.52]:

$$228 = \int_{311}^{T_2} 5{,}8\, dT = 5{,}8(T_2 - 311)$$

de donde:

$$T_2 = 350{,}3 \text{ K}$$

El volumen final es:

$$V_2 = \frac{0{,}082028 \times 350{,}3}{3} = 9{,}578 \text{ l}$$

El trabajo realizado por el gas es:

$$W = P_1(V_2 - V_1) = 3(9{,}578 - 8{,}5) = 3{,}234 \text{ atm. l}$$

Es conveniente expresar este resultado en calorías o, mejor aún, en julios. Para ello, es suficiente tener en cuenta que:

$$R = 1{,}987216 \text{ cal} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} = 0{,}082028 \text{ atm} \cdot \text{l} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

Con lo cual, resulta:

$$W = 3{,}234 \cdot \frac{1{,}987216}{0{,}082028} = 78{,}347 \text{ cal}$$

y, teniendo en cuenta que es 1 cal = 4,18398 J, resulta:

$$W = 78{,}347 \text{ cal} \times 4{,}18398 \text{ J} \cdot \text{cal}^{-1} = 327{,}806 \text{ J}$$

La variación de energía interna del gas es:

$$U_2 - U_1 = Q - W = 228 - 78{,}347 = 149{,}653 \text{ cal}$$

Que también podría haberse obtenido directamente:

$$U_2 - U_1 = nc_{Mv}(T_2 - T_1) = 3{,}812784 \times 39{,}3 = 149{,}84 \text{ cal}$$

Proceso a temperatura constante (isotermo). Si un gas perfecto se somete a un proceso isotermo, la representación de éste en un diagrama *P-V* es una hipérbola equilátera (Figura 20.13), cuya ecuación está dada por la de estado del gas perfecto, particularizada para la temperatura a la que se realiza el proceso:

$$PV = nRT_1 = \text{cte.}$$

La energía interna del gas debe permanecer constante, puesto que únicamente es función de la temperatura y ésta permanece constante; por tanto, será $dU = 0$.

En consecuencia, la aplicación a este proceso del primer principio da $dQ = dW$, cuya integración es $Q_{12} = W_{12}$. Es decir, todo el calor suministrado al sistema es empleado por éste en producir trabajo.

El estado inicial del sistema queda definido por las variables P_1, V_1, T_1 y n, relacionadas entre sí por la ecuación de estado.

Del estado final se conocen la temperatura y el número de moles, y son incógnitas la presión y el volumen. Conocida una de estas dos, la otra se obtiene de la ecuación de estado para el estado final.

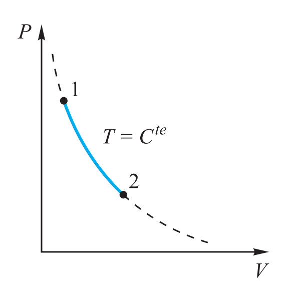


Figura 20.13.

Si a partir de un estado inicial conocido, le comunicamos al sistema la cantidad de calor Q_{12} mediante un proceso isotermo cuasiestático, veamos a qué estado final se llega. Para ello, integremos la ecuación que expresa el primer principio:

$$dQ = P\,dV$$

$$Q_{12} = nRT_1 \int_{v_1}^{v_2} \frac{dV}{V} = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \qquad [20.54]$$

de donde:

$$\ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{Q_{12}}{nRT_1}$$

y tomando antineperianos resulta:

$$V_2 = V_1 e^{\frac{Q_{12}}{nRT_1}} \qquad [20.55]$$

Puesto que a temperatura constante los volúmenes son inversamente proporcionales a las presiones:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{V_2}{V_1}$$

resulta ser la presión final:

$$P_2 = P_1 e^{\frac{-Q_{12}}{nRT_1}} \qquad [20.56]$$

EJEMPLO 20.3

Un mol de gas perfecto está contenido en un cilindro, una de cuyas bases puede desplazarse sin rozamiento; ocupa un volumen inicial de 8 l a la presión de 3 atm. Se le suministra la cantidad de calor $Q = 228$ cal y el sistema realiza un proceso isotermo. Determinemos: la temperatura inicial del gas, el volumen y la presión finales y, como comprobación, el trabajo realizado por el gas.

Solución:

La temperatura inicial es:

$$T_1 = \frac{P_1 V_1}{nR} = \frac{3 \times 8{,}5}{0{,}082028} = 310{,}87 \text{ K}$$

El volumen final se obtiene de la Ecuación [20.54]:

$$228 = 1{,}987216 \times 310{,}87 \int_{8,5}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

de donde:

$$0{,}3690725 = \ln\left(\frac{V_2}{8{,}5}\right)$$

y, tomando antineperianos es:

$$1{,}4463925 = \frac{V_2}{8{,}5} \quad \text{y} \quad V_2 = 12{,}294336 \text{ l}$$

La presión final será:

$$P_2 = P_1 \frac{V_1}{V_2} = 2{,}074 \text{ atm}$$

El trabajo realizado por el gas debe ser igual al calor absorbido:

$$W = 228 \text{ cal} = 953{,}947 \text{ J}$$

que, como comprobación, puede calcularse mediante:

$$W = 1{,}987216 \times 310{,}87 \int_{8{,}5}^{12{,}294336} \frac{dV}{V} = 617{,}766 \ln \frac{12{,}294336}{8{,}5} = 228 \text{ cal}$$

Proceso sin intercambio de calor (adiabático). Por ser $dQ = 0$, la aplicación del primer principio da:

$$dU + dW = 0 \qquad [20.57]$$

e, integrando a lo largo de la curva representativa del proceso es:

$$U_1 - U_2 = W_{12} \qquad [20.58]$$

lo que nos dice que el trabajo producido (consumido) por el sistema es igual a la disminución (aumento) de su energía interna.

Para un proceso adiabático reversible de un gas ideal, cuando las únicas fuerzas que producen trabajo son las debidas a las presiones, la [20.57], teniendo en cuenta la [20.28], se escribe:

$$c^*_{Mv}\, dT = -P\, dV = -RT \frac{dV}{V}$$

o de la forma:

$$\frac{dT}{T} = -\frac{R}{c^*_{Mv}} \frac{dV}{V} = (1 - \gamma) \frac{dV}{V}$$

siendo $\gamma = c_{Mp}/c_{Mv}$ el coeficiente adiabático. La integración entre los estados inicial y final del proceso da:

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = (1 - \gamma) \ln \frac{V_2}{V_1}$$

es decir:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\gamma} \qquad [20.59]$$

expresión que relaciona volúmenes y temperaturas de los estados inicial y final, y que puede transformarse de la siguiente manera:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_1 T_2}{P_2 T_1}\right)^{1-\gamma}$$

deduciéndose:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1-\gamma/\gamma} \qquad [20.60]$$

expresión que nos relaciona presiones y temperaturas de los estados inicial y final.

De esta última y de la [20.59] se establece:

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\gamma} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1-\gamma/\gamma} \quad \text{o} \quad \left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1/\gamma}$$

es decir:

$$P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma} = PV^{\gamma} \qquad [20.61]$$

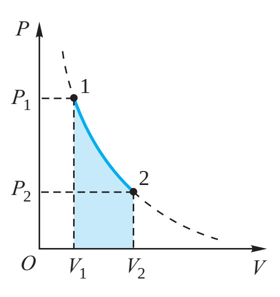


Figura 20.14.

Las Ecuaciones [20.59], [20.60] y [20.61] son las que relacionan las variables de estado en los procesos adiabáticos de los gases ideales, y la última de ellas es la ecuación de la curva que representa la transformación en el diagrama *P*-*V*, la cual es de la forma indicada en la Figura 20.14.

Conocido el estado inicial del gas, basta conocer una de las coordenadas del estado final para que éste quede determinado.

Si es conocido V_2, la Ecuación [20.61] nos da P_2:

$$P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}$$

y la Ecuación [20.59] nos da T_2:

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\gamma}$$

Si es conocido P_2, de la [20.61] se obtiene V_2:

$$V_2 = V_1 \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1/\gamma}$$

y de la [20.60] se calcula T_2:

$$T_2 = T_1 \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{(1-\gamma)/\gamma}$$

Finalmente, si la variable conocida es T_2, de la [20.59] se calcula V_2:

$$V_2 = V_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/1-\gamma}$$

y de la [20.60] se calcula P_2:

$$P_2 = P_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma/\gamma-1}$$

En todos los casos las coordenadas del estado final deben verificar la ecuación de estado:

$$P_2V_2 = nRT_2$$

Puesto que siempre es $\gamma > 1$, será $1 - \gamma < 0$ y la [20.59] se escribirá:

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}$$

Si el gas se ha expansionado, es decir, si es $V_2 > V_1$, será $V_1/V_2 < 1$ y $T_2 < T_1$. En consecuencia, toda expansión adiabática conlleva un enfriamiento del gas, lo que comporta una disminución de su energía interna. De acuerdo con [20.58], la disminución de energía interna aparece en forma de trabajo realizado por el gas al expansionarse.

El trabajo realizado por el gas en una expansión adiabática puede calcularse directamente por aplicación de [20.2] o calculando la variación de su energía interna mediante [20.46]. De la primera forma, el trabajo debido a las presiones, al tener en cuenta la [20.61], se expresa:

$$W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\text{cte}}{V^\gamma}\,dV$$

cuya integración da:

$$W_{12} = \frac{C}{1 - \gamma}\,[V^{1-\gamma}]_{v_1}^{v_2} = \frac{C}{1 - \gamma}\,(V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma})$$

que, volviendo a tener en cuenta la [20.61], se escribe:

$$W_{12} = \frac{P_2V_2 - P_1V_1}{1 - \gamma} = \frac{nR}{1 - \gamma}\,(T_2 - T_1) \qquad [20.62]$$

Por el segundo procedimiento, el cálculo resulta más sencillo, pues la [20.46] permite escribir:

$$W_{12} = -(U_2 - U_1) = -nc_{Mv}^{*}(T_2 - T_1) = \frac{nR}{1 - \gamma}\,(T_2 - T_1)$$

EJEMPLO 20.4

Un mol de gas perfecto ocupa un volumen de 8,5 l a la presión de 3 atm y se expansiona de forma adiabática reversible hasta la presión de 1 atm. Sabiendo que su coeficiente adiabático es $\gamma = 1{,}4$, determinemos: la temperatura inicial del gas, el volumen y la temperatura final del gas, y el trabajo producido en la expansión.

Solución:

La temperatura inicial es:

$$T_1 = \frac{P_1V_1}{nR} = \frac{3 \times 8{,}5}{0{,}082028} = 310{,}87 \text{ K}$$

El volumen final será:

$$V_2 = V_1 \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1/\gamma} = 8{,}5 \times 3^{1/1{,}4} = 18{,}63 \text{ l}$$

La temperatura final puede obtenerse de la ecuación de estado $P_2V_2 = nRT_2$:

$$T_2 = \frac{1 \times 18{,}63}{0{,}082028} = 227{,}12 \text{ K}$$

El trabajo producido en la expansión es igual a la disminución de su energía interna:

$$W_{12} = U_1 - U_2 = \frac{nR}{1-\gamma}(T_2 - T_1) = \frac{1{,}987216}{-0{,}4}(227{,}12 - 310{,}87) = 416{,}073 \text{ cal} =$$
$$= 1\,740{,}843 \text{ J}$$

Proceso politrópico. Un proceso politrópico es un proceso reversible que puede producirse con o sin intercambio de calor y que obedece a una ecuación similar a la del proceso adiabático $P \cdot V^m =$ cte., en la que m es el índice politrópico, el cual puede tomar valores enteros positivos o negativos.

El trabajo debido a las presiones se calcula de forma completamente análoga al cálculo directo realizado para el proceso adiabático, simplemente, ahora es m lo que allí era γ. Por tanto, es:

$$W_{12} = \frac{nR}{1 - m}(T_2 - T_1)$$

Igualmente, se verificarán relaciones análogas a las [20.59] y [20.60], que son, respectivamente:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-m} \quad \text{y} \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{(1-m)/m}$$

Posición relativa de isotermas y adiabáticas. Un proceso isotermo de un gas perfecto tiene por ecuación $PV =$ cte. Si diferenciamos esta ecuación:

$$P\,dV + V\,dP = 0$$

y la pendiente de la curva representativa en el diagrama P-V del proceso isotermo es:

$$\frac{dP}{dV} = -\frac{P}{V}$$

Un proceso adiabático de un gas ideal tiene por ecuación $PV^\gamma =$ cte. Diferenciando esta ecuación y simplificando, resulta:

$$V\,dP + \gamma P\,dV = 0$$

y la pendiente de la curva representativa en el diagrama P-V del proceso adiabático es:

$$\frac{dP}{dV} = -\gamma\frac{P}{V}$$

En ambos casos, la pendiente es negativa y, puesto que es $\gamma > 1$, la pendiente de la adiabática en un punto es mayor en valor absoluto que la pendiente de la isoterma en ese punto. Por tanto, la posición relativa de la isoterma y la adiabática es la indicada en la Figura 20.15.

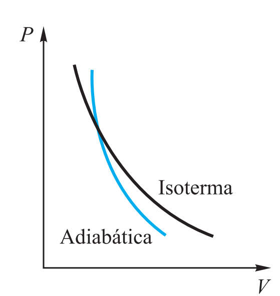


Figura 20.15.

EJEMPLO 20.5

Un mol de aire, en condiciones normales, se comprime de forma reversible e isoterma hasta reducir su volumen a la mitad. Luego, se expande por vía adiabática, también de forma reversible, hasta la presión inicial (Figura 20.16). Admitiendo que el aire se comporta como gas ideal de $\gamma = 1{,}4$, hallemos:

a) El trabajo consumido, producido y neto a lo largo del proceso.

b) El calor intercambiado entre el gas y el medio.

c) Las variaciones de su energía interna.

d) La temperatura final.

Solución:

En condiciones normales, $P = 1$ atm y $T = 273{,}15$ K, un mol de aire, supuesto gas perfecto, ocupa un volumen $V = 22{,}406$ l. Desde este estado inicial se le comprime de forma isoterma hasta un volumen mitad, por lo que se verificará:

$$1 \times V = P_2 \times \frac{V}{2}$$

de donde:

$$P_2 = 2 \text{ atm}$$

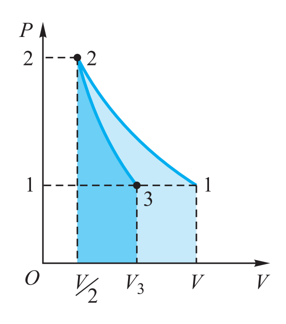


Figura 20.16.

Ahora, se expansiona de forma adiabática hasta $P_3 = 1$ atm. El volumen final, de acuerdo con [20.61], es:

$$2 \times \left(\frac{V_1}{2}\right)^{1,4} = 1 \times V_3^{1,4}$$

de donde:

$$V_3 = 11{,}203 \times 2^{1/1,4} = 18{,}38 \text{ l}$$

a) El trabajo consumido en la compresión isoterma, de acuerdo con [20.5], es:

$$W_{12} = RT_1 \ln \frac{P_1}{P_2} = 8{,}314472 \times 273{,}15 \times \ln 0{,}5 = -1\,574{,}205 \text{ J}$$

El trabajo producido en la expansión adiabática, aplicando la primera [20.62], es:

$$W_{23} = \frac{P_3V_3 - P_2V_2}{1-\gamma} = \frac{1 \times 18{,}38 - 2 \times 11{,}203}{-0{,}4} = 10{,}065 \text{ atm} \cdot \text{l} = 1\,020{,}20 \text{ J}$$

El trabajo neto es $W = W_{12} - W_{23} = 554{,}005$ J consumidos.

b) En la isoterma se verifica $dU = 0$ y el primer principio se expresa $dQ = dW$, cuya integración da:

$$Q_{12} = W_{12} = -1\,574{,}205 \text{ J}$$

calor cedido por el aire al medio ambiente.

En la adiabática, por propia definición es $dQ = 0$, no hay intercambio de calor.

c) En la isoterma, por ser $dU = 0$, no hay variación de energía interna $U_2 = U_1$. En la adiabática, aplicando [20.58]:

$$U_3 - U_2 = -W_{23} = -1\,020{,}20 \text{ J}$$

la energía interna disminuye.

d) La temperatura en el estado final se obtiene de la ecuación de estado:

$$P_3V_3 = nRT_3$$

de donde:

$$T_3 = 224{,}07 \text{ K}$$

EJEMPLO 20.6

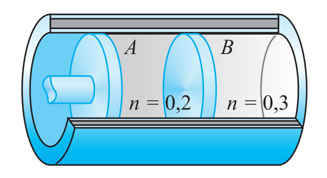




Figura 20.17.

Un cilindro cuya superficie lateral está formada por un material aislante térmico tiene una base rígida permeable al calor siendo la otra base un émbolo móvil sin rozamiento y aislante térmico (Figura 20.17). Su interior está dividido en dos zonas mediante una pared aislante que puede desplazarse sin rozamiento, manteniéndose paralela a si misma. En el instante inicial, los volúmenes de las dos zonas son iguales, $V_1 = 6$ l, y el conjunto está en equilibrio. En la zona *B*, hay 0,3 moles de un gas perfecto, que se mantiene en equilibrio térmico con el exterior a la temperatura de 27 °C. En la zona *A*, hay 0,2 moles de un gas ideal, cuyo coeficiente adiabático es $\gamma = 5/3$. Determinemos:

1.º La presión inicial en la zona *B*.

2.º La presión y temperatura iniciales en la zona *A*.

Se procede a comprimir muy lentamente la base exterior de la zona *A* hasta reducir el volumen de ésta a la mitad del inicial. Determinemos:

3.º La temperatura y presión finales en la zona *A*.

4.º La temperatura, presión y volumen finales en la zona *B*.

5.º El calor cedido al medio a través de la base permeable de la zona *B*.

6.º La energía total suministrada al sistema durante el proceso de compresión de la base exterior móvil de la zona *A*.

Solución:

1.º La ecuación de estado se expresa: $P_{1B} \times 6 = 0{,}3 \times 0{,}082 \times 300$, de donde:

$$P_{1B} = 1{,}23 \text{ atm.}$$

2.º El equilibrio mecánico es $P_{1A} = P_{1B} = 1{,}23$ atm, y la ecuación de estado permite obtener T_{1A}: $1{,}23 \times 6 = 0{,}2 \times 0{,}082 \times T_{1A}$ y $T_{1A} = 450$ K.

3.º En el estado final el volumen de *A* se ha reducido a la mitad, $V_{2A} = 3$ l. El proceso que sufre el gas en el recinto *A* es adiabático y la [20.59] permite obtener T_{2A}:

$$\frac{T_{2A}}{T_{1A}} = \left(\frac{V_{2A}}{V_{1A}}\right)^{1-\gamma} \qquad T_{2A} = 450 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-2/3} = 450 \times 2^{2/3} = 714{,}33 \text{ K}$$

La ecuación de estado nos permite calcular la presión final en A:

$$P_{2A} \times 3 = 0{,}2 \times 0{,}082 \times 714{,}33 \quad ; \quad P_{2A} = 3{,}9 \text{ atm}$$

4.º El equilibrio térmico con el medio exterior nos da $T_{2B} = 300$ K y el equilibrio mecánico en el estado final es $P_{2B} = P_{2A} = 3{,}9$ atm. La ecuación de estado permite calcular V_{2B}: $V_{2B} \times 3{,}9 = 0{,}3 \times 0{,}082 \times 300$ y $V_{2B} = 1{,}8923$ l.

5.º El gas en B sufre una transformación isoterma, por tanto $dU = 0$ y el primer principio se expresa:

$$Q_{12} = W_{12} = nRT \ln \frac{V_{2B}}{V_{1B}} = 0{,}3 \times 2 \times 300 \ln \frac{1{,}8923}{6} = -207{,}714 \text{ cal}$$

6.º La energía E suministrada al gas A se emplea en aumentar la energía interna de éste y en realizar un trabajo sobre el B, $E = U_{12A} + W_A$. El trabajo realizado sobre el B no cambia la energía interna de éste, pues se mantiene a temperatura constante, y tampoco se realiza sobre él un trabajo, ya que el recipiente es rígido, luego todo el trabajo comunicado es cedido al exterior en forma de calor, $W_A = Q_{12B}$. Por tanto,

$$E = U_{12A} + Q_{12B}$$

La variación de energía interna en A es $U_{12A} = nc^*_{Mv}(T_{2A} - T_{1A})$. Utilizando la primera [20.44], obtenemos $c^*_{Mv} = 3$ y, con ello, $U_{12A} = 158{,}598$ cal, resultando:

$$E = 158{,}598 + 207{,}214 = 366{,}312 \text{ cal} = 1\,532{,}28 \text{ J}$$

Temperatura atmosférica con la altitud (atmósfera adiabática). La variación de la presión atmosférica con la altitud es de la forma $dP = -\rho g\, dz$. La densidad del aire, admitiendo que se comporta como gas perfecto, puede expresarse mediante la [19.10], $\rho = P(R_G T)^{-1}$ y, con ello, $dP = -gP(R_G T)^{-1} dz$, que puede expresarse de la forma:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{g}{R} T^{-1} dz \qquad [20.63]$$

Si el aire se comporta de forma adiabática, la temperatura y la presión están relacionadas por:

$$T = CP^{(\gamma-1)/\gamma} \quad \text{o} \quad P = C'T^{\gamma/\gamma-1}$$

Hallando la diferencial de esta última expresión,

$$dP = C'\frac{\gamma}{\gamma-1} T^{1/\gamma-1} dT$$

y, dividiendo ésta por la anterior,

$$\frac{dP}{P} = \frac{\gamma}{\gamma-1} T^{-1} dT$$

Igualando ésta con la [20.63], resulta:

$$dT = -\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{g}{R_G} dz$$

cuya integración desde $z = z_0$, a cuya altura le corresponde la temperatura T_0, hasta la altitud z, en la cual la temperatura es T, se obtiene:

$$T = T_0 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{g}{R_G} (z - z_0) \qquad [20.64]$$

Tomando para el aire seco los valores $\gamma = 1{,}42$, $R_G = 287$ y $g = 9{,}8$, resulta:

$$T = T_0 - 0{,}0101(z - z_0) \qquad [20.65]$$

Por tanto, por cada 100 metros de ascenso la temperatura debe disminuir un grado. En el aire húmedo el descenso es menor, pudiendo establecerse éste entre 0,5 y 0,7 °C por cada 100 metros de elevación.

EJEMPLO 20.7 Temperatura en la capa superior de la troposfera

La troposfera es la capa de la atmósfera en contacto con la superficie terrestre. Su altura es variable, pudiendo establecerse que sobre los polos es de unos 8 km y sobre el ecuador, de unos 16 km (Figura 20.18). Si la temperatura en el polo es de 253 K y en el ecuador de 390 K, hallemos las temperaturas en la capa superior de la troposfera:

1.° Sobre el polo.

2.° Sobre el ecuador.

Solución:

Tomando para el aire húmedo un descenso de 0,7 °C por cada 100 metros de elevación, la [20.65] se expresa: $T = T_0 - 0{,}007(z - z_0)$.

1.° La temperatura de la capa superior de la troposfera sobre el polo es:

$$T_p = 253 - 0{,}007 \times 8\,000 = 253 - 56 = 197 \text{ K} = -76\,^{\circ}\text{C}$$

2.° La temperatura de la capa superior de la troposfera sobre el ecuador es:

$$T_e = 290 - 0{,}007 \times 16\,000 = 290 - 112 = 178 \text{ K} = -95\,^{\circ}\text{C}$$

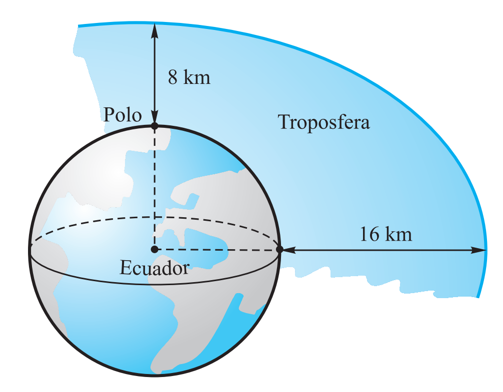


Figura 20.18.



BENJAMIN THOMPSON, CONDE DE RUMFORD

Nació en Massachussets, en 1973, en la localidad de Voburn. Durante la Guerra de Independencia Americana se alió con los británicos y, al final de ella, se trasladó a Europa. El gobernador de Baviera, temeroso de la propagación de la Revolución Francesa, mandó fortificar las fronteras y le encargó la supervisión en la construcción de los cañones. Benjamín Thompson observó que en el torneado del ánima de los cañones se producía gran cantidad de calor, pues se aumentaba la temperatura del cañón, de las virutas y de la propia herramienta de torneado. La producción de calor se hacía de forma continua, de manera que no parecía verificar el principio de conservación y sí, más bien, parecía el resultado del trabajo realizado por las fuerzas de rozamiento en el proceso de torneado. Descartó la teoría del *calórico*, ya que la producción del calor parecía no tener límites, con lo cual no podía ser una sustancia material. Trató de relacionar el trabajo realizado y el calor producido, pero sus experiencias fueron poco precisas, aunque servirían de motivación a Joule, quien, posteriormente, obtuvo el equivalente mecánico del calor. En 1972 fue nombrado conde de Rumford. En 1799 fundó la Royal Society en Londres y creó dos medallas para premiar los descubrimientos científicos pero, transcurridos seis años, nadie se había presentado al premio, lo que motivó que se presentará él mismo, siendo el primer receptor de la medalla por él creada. Murió en 1814.



ENERGÍA: FUENTES, FORMAS Y USOS

La energía puede definirse de forma muy general como *toda causa capaz de producir un efecto*. Etimológicamente la palabra energía proviene de la palabra griega *ενεργεια*.

El funcionamiento de la naturaleza se realiza de acuerdo con el principio de conservación de la energía: *la energía ni se crea ni se destruye*, *solamente se transforma*.

La energía es producida por diferentes fuentes, que pueden clasificarse en *primarias*, cuando no tienen su origen en otras y *secundarias*, cuando provienen de otra fuente de energía. Las fuentes primarias de energía únicamente son: la energía solar, la nuclear, la debida a las mareas y la geotérmica.

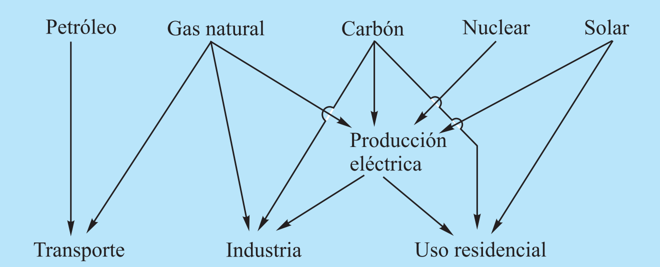
También las fuentes de energía pueden ser clasificadas en *renovables* y *no renovables*. Si la fuente de energía no genera energía a un ritmo igual o superior al de su consumo, la fuente se dice que no es renovable; por el contrario, si la producción de energía se hace a un ritmo igual o superior al de su consumo, la fuente se dice que es renovable. Como fuentes no renovables debemos considerar a los *combustibles fósiles*, a la *energía nuclear* y a la *geotérmica*, si bien en estas dos últimas es posible su uso por un tiempo muy grande sin peligro de que las fuentes se agoten. Las únicas fuentes de energía renovable son el *Sol* y *las mareas*, e incluso aquél tiene su vida limitada, aunque se estima en más de cuatro millones de años. La energía solar puede usarse de forma directa, es decir, como fuente primaria, o de forma indirecta, mediante fuentes secundarias, como se indica a continuación

ENERGÍA SOLAR: **Directa:** Fototérmica
Fotovoltaíca
Indirecta: Hidráulica
Eólica
Biomasa
Olas
Gradientes térmicos

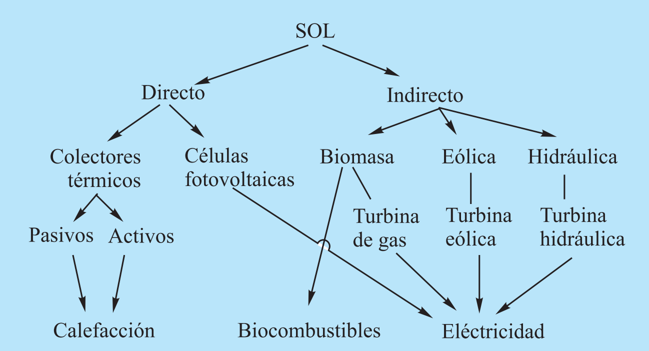
Los combustibles fósiles, fuentes de energía no renovable, tienen su origen remoto en la energía solar, cuya absorción por las plantas fotosintéticas dio lugar a grandes bosques. La acumulación de estos y otros materiales orgánicos, como animales, plantas acuáticas, algas y esporas, durante millones de años, bajo capas de tierra, a altas presiones y temperaturas, dieron lugar, mediante lentos procesos de descomposición por microorganismos anaerobios, a lo que conocemos

como combustibles fósiles: *carbón*, *petróleo* y *gas natural*.

Los usos fundamentales que se dan a las principales fuentes de energía se indican en el siguiente cuadro:



Los diferentes y principales usos de la energía solar son los que a continuación indicamos:



Segundo principio de la Termodinámica

CAPÍTULO 21

21.1 Introducción

El primer principio permite establecer el balance energético en una transformación experimentada por un sistema material, pero no establece restricción alguna a las direcciones de los flujos de energía, ni el sentido en el cual se realiza el proceso. Es decir, el primer principio no se opone a que el calor pase de un cuerpo de inferior temperatura a otro de temperatura superior sin consumo de trabajo, mientras que la experiencia nos confirma la imposibilidad de tal proceso. En la naturaleza los procesos se realizan espontáneamente en un sentido, pero no en el contrario. El calor pasa de los cuerpos de mayor temperatura a los de menor; los gases se expansionan desde las altas presiones a las bajas; las sustancias disueltas se difunden desde las altas concentraciones a las bajas, etc. Los procesos inversos no se realizan espontáneamente, ellos requieren un aporte de energía, y nunca ambos, el sistema y el medio exterior pueden volver al estado inicial.

Asimismo, también la experiencia confirma que un sistema real puede evolucionar cíclicamente recibiendo sólo trabajo y transformándolo íntegramente en calor, mientras que no es posible el proceso cíclico inverso, es decir, transformar completamente en trabajo todo el calor recibido; es necesario devolver una parte de éste.

Todo ello pone de manifiesto la necesidad de un nuevo principio que precise el sentido y la forma en la cual las evoluciones son realmente posibles, y que se denominará segundo principio de la Termodinámica. Este principio es de naturaleza general, y por tanto, de aplicación a todos los campos de la ciencia y a todo tipo de procesos, físicos, químicos, biológicos, industriales o tecnológicos.

Previamente a su enunciado es necesario establecer algunos conceptos nuevos que intervienen en aquél, así, conviene definir *foco térmico* como el sistema capaz de intercambiar calor sin variar su temperatura; en la naturaleza únicamente puede admitirse como tal a los océanos y, en parte, a la atmósfera y las corrientes de grandes caudales.

21.2 Motor termodinámico, máquina refrigerante y bomba de calor

Motor termodinámico

Se llama *motor termodinámico* a todo ingenio que evoluciona cíclicamente produciendo trabajo a partir del calor absorbido.

Rendimiento medio

Un índice de la calidad del motor termodinámico es su *rendimiento*. Se define *rendimiento medio* al cociente entre el trabajo neto producido y la cantidad de calor absorbida del foco caliente:

$$\bar{\eta} = \frac{W}{Q_1} \qquad [21.1]$$

Rendimiento instantáneo

y *rendimiento instantáneo* a ese mismo cociente cuando la cantidad de trabajo neto producido y la de calor absorbida se realizan durante un tiempo muy pequeño:

$$\eta = \frac{dW}{dQ_1} \qquad [21.2]$$

Máquina frigorífica

Eficiencia media

Máquina *refrigerante* o *frigorífica* es todo ingenio que evoluciona cíclicamente consumiendo trabajo y haciendo pasar calor de un foco a otro de mayor temperatura. *La eficiencia media* de la máquina frigorífica se define como la relación entre la cantidad de calor que extrae del foco frío y el trabajo que para ello consume:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{Q_2}{W} \qquad [21.3]$$

Eficiencia instantánea

La *eficiencia instantánea* será el mismo cociente, pero cuando la cantidad de calor extraída del foco frío y el trabajo consumido se han realizado durante un tiempo muy pequeño:

$$\varepsilon = \frac{dQ_2}{dW} \qquad [21.4]$$

Bomba de calor

Eficiencia media

Bomba de calor es, en esencia, una máquina frigorífica que toma como foco frío al Universo y como foco caliente un determinado recinto que se desea calentar. Su *eficiencia media* se define como la cantidad de calor que es capaz de introducir en el foco caliente por unidad de trabajo consumida:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{Q_1}{W} \qquad [21.5]$$

Eficiencia instantánea

y la *eficiencia instantánea* como ese mismo cociente cuando las cantidades de calor y trabajo se han intercambiado durante un tiempo muy pequeño:

$$\varepsilon = \frac{dQ_1}{dW} \qquad [21.6]$$

21.3 Segundo principio de la Termodinámica

Hay dos formas clásicas de enunciar el segundo principio, la debida a Kelvin-Planck y la debida a Clausius, y son las siguientes:

Enunciado de Kelvin-Planck. *No puede existir un motor termodinámico que funcionando cíclicamente produzca trabajo intercambiando calor con un solo foco térmico.*

Enunciado de Clausius. *No puede existir una máquina frigorífica de funcionamiento cíclico que haga pasar calor de un foco a otro de mayor temperatura sin aporte de trabajo exterior.*

Ambos enunciados, aunque aparentemente distintos, son equivalentes, ya que la violación de uno de ellos lleva consigo la violación del otro. En efecto: supongamos un motor termodinámico que no cumpla el enunciado de Kelvin-Planck, produciendo trabajo al intercambiar calor con una sola fuente térmica (Figura 21.1). Imaginemos una máquina frigorífica que, utilizando este trabajo, saque de un foco frío la cantidad de calor Q_2 y ceda al caliente la cantidad de calor $Q_1 + Q_2$. El sistema formado por el conjunto del motor y la máquina transferiría la cantidad de calor Q_2 del foco frío al caliente sin necesidad de aporte exterior de trabajo, lo que contradice el enunciado de Clausius.

Recíprocamente, supongamos que exista una máquina frigorífica que no cumpla el enunciado de Clausius y es capaz de transferir una cantidad de calor, Q_2, del foco frío al caliente, sin necesidad de aporte exterior de trabajo (Figura 21.2). Consideremos ahora un motor termodinámico que funcione tomando la cantidad de calor Q_1 del foco caliente, cediendo al frío la cantidad Q_2 y produciendo el trabajo W. El sistema compuesto por el motor y la máquina, puesto que el balance calorífico del foco frío es nulo, produciría un trabajo intercambiando calor con un solo foco térmico, lo que viola el enunciado de Kelvin-Planck.

El enunciado de Kelvin-Planck establece la imposibilidad del motor térmico de rendimiento unidad y el enunciado de Clausius establece la imposibilidad de la máquina frigorífica de eficiencia infinita. Asimismo, queda establecida la imposibilidad del *móvil perpetuo de segunda especie*, que es el que correspondería a una máquina que violara el segundo principio.

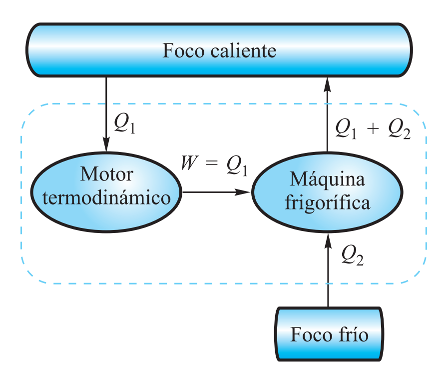


Figura 21.1.

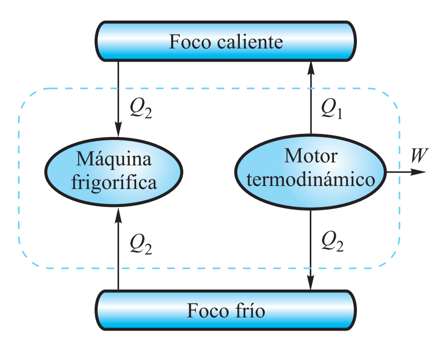


Figura 21.2.

21.4 Rendimientos y eficiencias de motores, máquinas y bombas térmicas

Rendimiento de un motor termodinámico

De acuerdo con el segundo principio, un motor termodinámico debe siempre funcionar intercambiando calor con dos focos térmicos. Su funcionamiento es el indicado en la Figura 21.3: toma la cantidad de calor Q_1 del foco caliente, cede la cantidad de calor Q_2 al foco frío y produce un trabajo W.

La aplicación del primer principio da:

$$Q_1 - Q_2 = W \qquad [21.7]$$

Con ello, el rendimiento puede expresarse de la forma:

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \qquad [21.8]$$

Puesto que siempre debe ser $Q_2 < Q_1$, el rendimiento de un motor termodinámico es mayor que cero. Además, de acuerdo con el segundo principio, debe ser siempre $Q_2 > 0$ y jamás se puede conseguir un motor de rendimiento igual o mayor que la unidad.

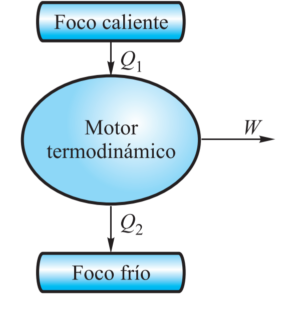


Figura 21.3.

Eficiencia de una máquina frigorífica

Una máquina frigorífica funciona consumiendo trabajo W, extrayendo calor de un foco frío Q_2 y cediendo la cantidad de calor Q_1 a un foco caliente (Figura 21.4). La aplicación del primer principio da:

$$-Q_1 + Q_2 = -W \quad \text{o} \quad Q_1 - Q_2 = W$$

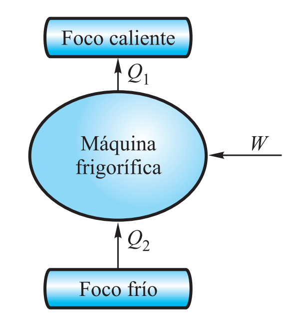


Figura 21.4.

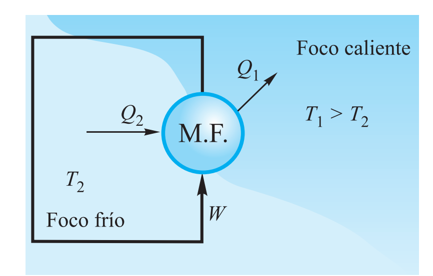


Figura 21.5.

es decir, la misma [21.7] y la eficiencia de la máquina puede expresarse:

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_1 - W}{W} = \frac{Q_1}{W} - 1 = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} \qquad [21.9]$$

La máquina frigorífica enfría un recinto frío y calienta el universo (Figura 21.5)

Eficiencia de una bomba de calor

La bomba de calor funciona de manera análoga a la máquina frigorífica, la aplicación del primer principio da $Q_2 - Q_1 = -W$, que vuelve a ser la [21.7] y la eficiencia de ella se expresa:

$$\varepsilon = \frac{Q_1}{W} = \frac{Q_1}{Q_1 - Q_2} = \frac{W + Q_2}{W} = 1 + \frac{Q_2}{W} > 1 \qquad [21.10]$$

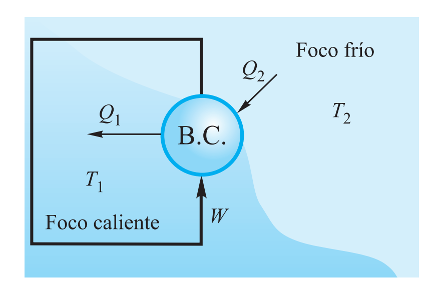


Figura 21.6.

resultando ser siempre superior a la unidad y a la correspondiente a una máquina frigorífica, ya que siempre es $Q_1 > Q_2$.

La bomba de calor calienta un recinto caliente y enfría el universo (Figura 21.6).

21.5 Principales causas de irreversibilidad en las transformaciones reales

Los procesos que sufren los sistemas físicos, tal y como se producen en la naturaleza, no son reversibles. No es posible hacer evolucionar el sistema en sentido contrario al que sigue naturalmente, de forma que pase por los mismos estados que pasó, volviendo, tanto él como el resto del universo, al estado inicial. Los procesos naturales que sufren los sistemas físicos son irreversibles, siendo múltiples las causas de irreversibilidad.

Una de las principales causas de irreversibilidad de los procesos reales es la existencia de *fuerzas de rozamiento*, no sólo entre las superficies de sólidos en contacto sino también internas en los fluidos, debido a su viscosidad, así como las que se oponen en los fluidos al movimiento de sólidos en su seno.

Como resultado de estas fuerzas de rozamiento, la energía mecánica se disipa en forma calorífica. La transformación inversa no es posible, pues el calor producido se debiera transformar íntegramente en trabajo, lo que contradice el segundo principio. Análogamente, son causa de irreversibilidad la deformación inelástica de sólidos, el efecto Joule, la histéresis magnética, etc.

La *transferencia de calor* debida a diferencias finitas de temperaturas es otro fenómeno real irreversible, puesto que pasar calor de un cuerpo a otro más caliente no puede hacerse sin aporte de trabajo, de acuerdo con el enunciado de Clausius del segundo principio.

La *difusión*, que se produce naturalmente al ponerse en contacto dos gases o dos líquidos, es un proceso irreversible, puesto que para la separación de los gases o líquidos, una vez mezclados, hay que suministrar trabajo al sistema, que debe ser aportado por el resto del universo, quedando éste modificado.

Las *reacciones químicas*, los *cambios rápidos de fase*, la *disolución*, etc., son fenómenos naturales que comportan irreversibilidad.

Resumiendo, podemos señalar como causas de irreversibilidad en los procesos naturales, la falta de equilibrio termodinámico (mecánico, térmico o químico) y la existencia de efectos disipativos (rozamiento, viscosidad, inelasticidad, resistencia eléctrica o histéresis magnética). Un sistema puede presentar *irreversibilidad inter-*

na o *intrínseca* cuando las causas de irreversibilidad están en él mismo, o *irreversibilidad externa*, cuando están entre el sistema y el medio.

En definitiva, los procesos reversibles son irreales, pero son una abstracción teórica que suele darnos suficiente aproximación para el estudio de infinidad de procesos reales.

21.6 Ciclo de Carnot

Es un ciclo ideal, establecido por el ingeniero francés Nicolás Sadi Carnot (1769-1832) y compuesto por los siguientes procesos reversibles (Figura 21.7):

1-2. Esta transformación es una isoterma; el sistema se expansiona en contacto con un foco térmico a temperatura constante T_1, absorbiendo la cantidad de calor Q_1 y produciendo un trabajo W_{12}.

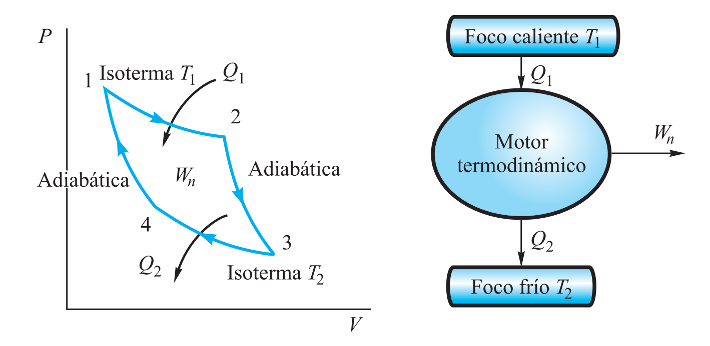


Figura 21.7.

2-3. Es una transformación adiabática; el sistema, aislado térmicamente, sigue expansionándose a cuenta de su energía interna, enfriándose desde la temperatura T_1 hasta la T_2 y produciendo el trabajo W_{23}.

3-4. Se trata de una transformación isoterma durante la cual el sistema está en contacto con un foco frío de temperatura T_2, siendo comprimido por un aporte exterior de trabajo, W_{34}, y cediendo el sistema al foco frío la cantidad de calor Q_2.

4-1. Es una transformación adiabática que devuelve al sistema al estado inicial, comprimiéndolo mediante un aporte exterior de trabajo, W_{41}, y elevando su temperatura desde T_2 hasta la inicial T_1.

El rendimiento térmico del ciclo está dado por:

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \qquad [21.11]$$

El trabajo neto producido por ciclo realizado es numéricamente igual al área del diagrama que representa al ciclo en unos ejes $P - V$:

$$W_n = \int P\,dV = \text{Área}\,(1 - 2 - 3 - 4 - 1) = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} =$$

$$= W_{12} + W_{23} - W_{43} - W_{14} \qquad [21.12]$$

El ciclo de Carnot puede ser realizado por sustancias o sistemas de naturaleza muy diversa: un gas, una mezcla de gases, un líquido y su vapor, etc. Los procesos del ciclo son los mismos, pero su representación varía según la sustancia que evoluciona.

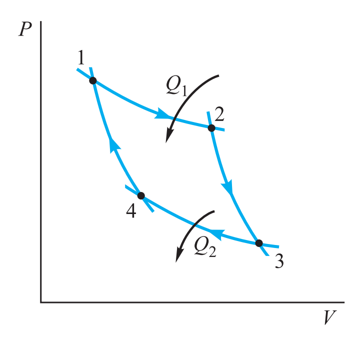


Figura 21.8.

Ciclo de Carnot para un gas ideal

Cada una de las transformaciones que componen el ciclo ha sido ya estudiada en el capítulo anterior, veremos ahora qué relaciones ligan a las coordenadas termodinámicas de cada vértice del ciclo (Figura 21.8):

Ecuación de la isoterma 1-2. $P_1V_1 = P_2V_2$
Ecuación de la adiabática 2-3. $P_2V_2^\gamma = P_3V_3^\gamma$
Ecuación de la isoterma 3-4. $P_3V_3 = P_4V_4$
Ecuación de la adiabática 4-1. $P_1V_1^\gamma = P_4V_4^\gamma$

Dividiendo miembro a miembro las ecuaciones de las adiabáticas resulta:

$$\frac{P_1}{P_2}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma = \frac{P_4}{P_3}\left(\frac{V_4}{V_3}\right)^\gamma$$

que, teniendo en cuenta la ecuación de las isotermas, se escribe:

$$\frac{V_2}{V_1}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma = \frac{V_3}{V_4}\left(\frac{V_4}{V_3}\right)^\gamma \quad \text{o} \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_4}{V_3} \qquad [21.13]$$

Calor intercambiado.

En las transformaciones 2-3 y 4-1 no se intercambia calor. En la transformación 1-2 y 3-4, el calor intercambiado está dado por [20.54], siendo respectivamente:

$$Q_1 = W_{12} = nRT_1 \ln V_2/V_1$$

que es positivo y, por tanto, calor absorbido y:

$$Q_2 = W_{34} = nRT_2 \ln V_4/V_3 = -nRT_2 \ln V_3/V_4$$

que es negativo y, por tanto, calor cedido por el sistema.

Rendimiento.

La expresión del rendimiento del motor, Ecuación [21.11], teniendo en cuenta los valores hallados de Q_1 y Q_2, puede ahora expresarse:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \qquad [21.14]$$

ecuación únicamente válida para el ciclo de Carnot de un gas ideal.

Trabajo realizado.

En las transformaciones 1-2 y 3-4, ya ha sido calculado. En las transformaciones 2-3 y 4-1, está dado por la [20.62]:

$$W_{23} = \frac{nR}{1-\gamma}(T_2 - T_1) = -W_{41}$$

El trabajo producido es $W_p = W_{12} + W_{23}$.
El trabajo consumido es $W_c = W_{34} + W_{41}$.
El trabajo neto es $W_n = W_p - W_c = W_{12} - W_{34} = Q_1 - Q_2 = nR(T_1 - T_2)\ln \dfrac{V_2}{V_1}$.

Variación de energía interna.

A lo largo de las transformaciones isotermas, por ser un gas ideal el que evoluciona, la energía interna no varia. En las transformaciones adiabáticas, la disminución o aumento de energía interna será igual al trabajo producido o consumido, respectivamente, en esas transformaciones:

$$U_3 - U_2 = -W_{23} \quad , \quad U_1 - U_4 = -W_{41} \quad \text{y} \quad U_1 - U_2 = U_2 - U_3 = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_2)$$

Es importante señalar que la variación de energía interna sólo depende de los estados inicial y final, por tanto, en un proceso cíclico la variación total será nula. Para cualquier transformación de un gas ideal la variación de energía interna está dada por la [20.46].

Variación de entalpía.

En el gas perfecto la entalpía también es únicamente función de la temperatura [20.29], por lo que a lo largo de una transformación isoterma su variación es nula, de aquí que a las transformaciones isotermas también se les denomine isentálpicas. Puesto que para el gas perfecto $H = U + PV = U + nRT$, por ser H función de estado, su variación sólo depende de los estados inicial y final y, en un proceso cíclico, la variación total de entalpía será nula:

$$H_2 - H_1 = U_2 - U_1 + nR(T_2 - T_1)$$

Para cualquier transformación de un gas ideal la variación se puede obtener de la Ecuación [20.48].

EJEMPLO 21.1

Un décimo de mol de CO_2 a la presión de 1 atm y temperatura de 270 K, es obligado a realizar un ciclo de Carnot comprimiéndosele a temperatura constante hasta la presión de 2 atm, sometiéndole a una compresión adiabática hasta la presión de 4 atm, expansionándole luego a temperatura constante para seguir, finalmente, una expansión adiabática hasta el estado inicial (Figura 21.9). Admitiendo que el CO_2 se comporta como gas ideal de $\gamma = 1, 3$, determinemos:

a) Las presiones, los volúmenes y las temperaturas en cada vértice del ciclo, representando a éste en el diagrama $P - V$.
b) El trabajo consumido, el producido y el neto.
c) El calor absorbido y el cedido en las transformaciones isotermas.
d) La variación de la energía interna en las transformaciones adiabáticas.
e) Las variaciones de entalpía.

Solución:

a) En el estado inicial, vértice 1 del ciclo, el volumen se deduce de la ecuación de estado $P_1V_1 = nRT_1$, lo que da:

$$V_1 = 0{,}1 \times 0{,}082 \times 270 = 2{,}2148 \text{ l}$$

En el estado 2 son conocidas la presión $P_2 = 2$ atm y la temperatura $T_2 = T_1 = 270$ K. El volumen se determina mediante la ecuación de estado $P_2V_2 = nRT_2$:

$$2V_2 = 0{,}1 \times 0{,}082 \times 270 \quad , \quad V_2 = 1{,}1074 \text{ l}$$

En el estado 3 es conocida la presión $P_3 = 4$ atm; mediante las ecuaciones de las adiabáticas deduciremos V_3 y T_3:

$$P_2V_2^\gamma = P_3V_3^\gamma \quad , \quad 2 \times 1{,}1074^{1,3} = 4 \times V_3^{1,3} \quad , \quad V_3 = 1{,}1074 \times 0{,}5^{1/1,3} = 0{,}65 \text{ l}$$

La temperatura T_3 puede también obtenerse por aplicación de la ecuación de estado:

$$T_3 = P_3V_3/nR = 316{,}84 \text{ K}$$

Finalmente, el estado 4 está determinado como punto de intersección de la isoterma que pasa por el estado 3, cuya temperatura es $T_3 = 316{,}84 \text{ K} = T_4$, y la adiabática que pasa por el estado 1:

$$P_3V_3 = P_4V_4 = 2{,}60$$

$$P_1V_1^\gamma = P_4V_4^\gamma = 2{,}81$$

Dividiendo la segunda entre la primera, resulta:

$$V_4^{0,3} = 1{,}0808 \quad , \quad V_4 = 1{,}296 \text{ l}$$

Con lo cual, de la primera se obtiene $P_4 = 2{,}007$ atm.

En la Figura 21.9 se representa el ciclo en el diagrama $P - V$.

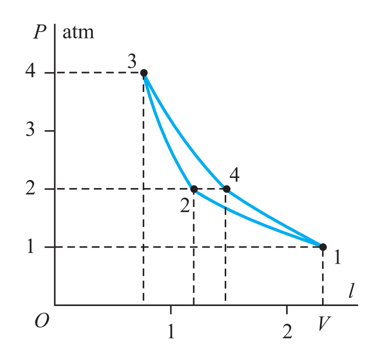


Figura 21.9.

b) El trabajo en la compresión isoterma es:

$$W_{1,2} = \int_{v_1}^{v_2} p\,dV = nRT_2 \ln \frac{V_2}{V_1} = nRT_2 \ln \frac{P_1}{P_2} =$$

$$= 0{,}1 \times 8{,}314472 \times 270 \ln 0{,}5 = -155{,}605 \text{ J}$$

El trabajo en la compresión adiabática es:

$$W_{23} = \frac{nR}{1-\gamma}(T_3 - T_2) = -129{,}817 \text{ J}$$

El trabajo consumido es:

$$W_c = W_{12} + W_{23} = -285{,}422 \text{ J}$$

El trabajo producido en la expansión isoterma es:

$$W_{34} = nRT_3 \ln \frac{P_3}{P_4} = 181{,}68 \text{ J}$$

El trabajo producido en la expansión adiabática es:

$$W_{41} = \frac{nR}{1-\gamma}(T_1 - T_4) = -W_{23} = 129{,}817 \text{ J}$$

El trabajo producido es:

$$W_p = W_{34} + W_{41} = 311{,}497 \text{ J}$$

El trabajo neto producido en el ciclo es:

$$W_n = W_p - W_c = 26{,}075 \text{ J}$$

c) Transformación isoterma 3-4. Por ser una transformación isoterma de un gas perfecto es $dU = 0$ y el primer principio se expresa: $dQ = dW$, cuya integración da:

$$Q_{34} = W_{34} = 181{,}68 \text{ J} = 43{,}423 \text{ cal} = Q_1$$

que es el calor absorbido del foco caliente.

Transformación isoterma 1-2. Por la misma razón anterior, el primer principio da:

$$Q_{12} = W_{12} = -155{,}605 \text{ J} = -37{,}191 \text{ cal} = Q_2$$

que es el calor cedido al foco frío.

d) Transformación adiabática 2-3. En ella $dQ = O$ y, por tanto, el primer principio se escribe $dU + dW = 0$, cuya integración es:

$$U_3 - U_2 + W_{23} = 0 \quad , \quad U_3 - U_2 = -W_{23} = 129{,}817 \text{ J}$$

También podríamos haber aplicado directamente la [20.46]:

$$U_3 - U_2 = n(u_3 - u_2) = 0{,}1 \times 8{,}314472 \times 46{,}84/0{,}3 = 129{,}817 \text{ J}$$

Transformación adiabática 4-1. Por la misma razón anterior:

$$U_1 - U_4 = -W_{41} = -129{,}817 \text{ J}$$

e) A lo largo de las isotermas la variación de entalpia es nula, por ser $H = H(T)$. Veamos cuál es su variación en las transformaciones adiabáticas:

Transformación 2-3:

$$H_3 - H_2 = U_3 - U_2 + nR(T_3 - T_2) =$$
$$= 129{,}817 + 0{,}1 \times 8{,}314472 \times 46{,}84 \text{ J} = 168{,}762 \text{ J}$$

Transformación 4-1:

$$H_1 - H_4 = U_1 - U_4 + nR(T_1 - T_4) =$$
$$= 129{,}817 + 0{,}1 \times 8{,}314472 \times (-46{,}84) = -168{,}762 \text{ J}$$

También podríamos haberlo calculado por aplicación de la [20.48]:

$$H_3 - H_2 = \gamma(U_3 - U_2) = 1{,}3 \times 129{,}817 = 168{,}762 \text{ J}$$

EJEMPLO 21.2

Determinar el trabajo máximo que puede producir un motor que toma Q_1 kilocalorías de un foco a temperatura T_1 K y cede calor a otro cuya temperatura es de T_2 K. Calcular la aplicación al caso $T_1 = 373$ K y $T_2 = 288$ K.

Solución:

El trabajo será máximo si el proceso se realiza mediante un motor de Carnot, para el cual el rendimiento es:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

y cuando, además, las temperaturas de los dos focos permanezcan constantes durante todo el proceso.

El rendimiento instantáneo está dado por la [21.2]:

$$\eta = \frac{dW}{dQ_1}$$

y el trabajo máximo se obtendrá cuando el rendimiento lo sea:

$$dW = \eta\, dQ_1 = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) dQ_1$$

cuya integración da:

$$W = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) Q_1$$

Para los valores de la aplicación son:

$$\eta = 0{,}2279 \quad \text{y} \quad W = 0{,}2279 Q_1$$

EJEMPLO 21.3

Un motor de Carnot funciona entre un foco caliente constituido por un estanque con *m* kg de agua a una temperatura inicial de T_{1i} K y un foco frío constituido por un río cuya agua está a la temperatura de T_2 K, que se supone constante (Figura 21.10). Determinemos la máxima cantidad de trabajo que puede conseguirse, el calor total extraído del foco caliente y el rendimiento medio del motor. Hallemos la aplicación para $T_{1i} = 373$ K y $T_{2i} = 288$ K.

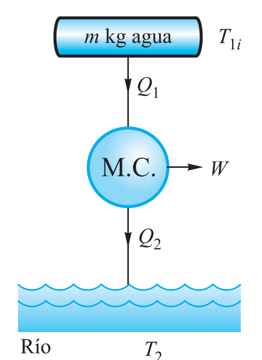


Figura 21.10.

Solución:

Si el motor tiene un rendimiento η, por cada cantidad de calor dQ_1 tomada del foco caliente aquél produce el trabajo:

$$dW = \eta\, dQ_1$$

Por ser un motor ideal, su rendimiento está dado por la [21.14] y el trabajo elemental producido se expresa:

$$dW = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) dQ_1 \qquad \text{(a)}$$

Al tomar el calor dQ_1, el foco caliente disminuye su temperatura en dT_1, cumpliéndose:

$$dQ_1 = -mc\,dT_1 \qquad \text{(b)}$$

siendo *m* la masa de agua del foco caliente y *c* su calor específico.

Como T_2 es constante, el proceso finalizará cuando sea $T_1 = T_2$, en cuyo momento el rendimiento se hará nulo.

Eliminando dQ_1 entre (a) y (b), resulta:

$$dW = -mc\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) dT_1$$

e integrando entre T_{1i} y T_2, queda, admitiendo que c permanece constante:

$$W = -mc[T_1 - T_2 \ln T_1]_{T_{1i}}^{T_2} = -mc\left[T_2 - T_{1i} - T_2 \ln \frac{T_2}{T_{1i}}\right] =$$

$$= mc\left[T_{1i} - T_2 - T_2 \ln \frac{T_{1i}}{T_2}\right]$$

El rendimiento medio del motor es:

$$\bar{\eta} = \frac{W}{Q_1}$$

siendo Q_1 el calor total extraído del foco caliente, cuyo valor es:

$$Q_1 = mc\,(T_{1i} - T_2)$$

Por tanto, el rendimiento medio en función de las temperaturas de los focos es:

$$\bar{\eta} = \frac{T_{1i} - T_2 - T_2 \ln \dfrac{T_{1i}}{T_2}}{T_{1i} - T_2} = 1 - \frac{T_2}{T_{1i} - T_2} \ln \frac{T_{1i}}{T_2}$$

Para los valores de aplicación, resultan ser:

El trabajo total neto producido, $W_n = mc \times 10{,}518 = m \times 10{,}518 \cdot 10^{-3}$ cal = 0,044 m J.

El calor tomado del foco caliente, $Q_1 = mc \times 85 = m \times 0{,}085$ cal = 0,356 m J.

El rendimiento medio es $\eta = 0{,}124$.

EJEMPLO 21.4

Un motor de Carnot funciona entre dos focos térmicos compuestos por sendos recipientes que contienen m kg de agua cada uno y que están a las temperaturas iniciales de T_{1i} K y T_{2i} K, respectivamente, siendo $T_{1i} > T_{2i}$ (Figura 21.11). Determinemos la máxima cantidad de trabajo que puede obtenerse, el calor total extraído del foco caliente y el rendimiento medio del motor. Calcular la aplicación al caso $T_{1i} = 373$ K y $T_{2i} = 273$ K.

Solución:

Cuando el motor tome la cantidad de calor dQ_1 del foco caliente, la temperatura de éste descenderá la cantidad dT_1, cumpliéndose:

$$dQ_1 = -mc\,dT_1$$

Cuando el foco frío reciba la cantidad de calor dQ_2, aumentará su temperatura en dT, verificando:

$$dQ_2 = mc\,dT_2$$

En un instante del proceso, en el cual las temperaturas de los focos caliente y frío son T_1 y T_2, respectivamente, el rendimiento es:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

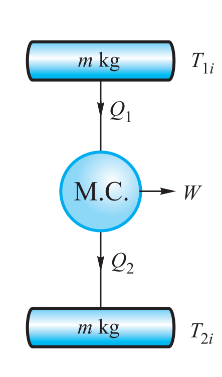


Figura 21.11.

y el trabajo elemental producido:

$$dW = \eta\, dQ_1 = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) dQ_1 = -mc\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) dT_1 \qquad \text{(a)}$$

Para poder integrar, debemos expresar la temperatura T_2, que es variable, en función de T_1. Para ello, utilizaremos la definición de escala termodinámica de temperaturas:

$$\frac{dQ_1}{dQ_2} = \frac{T_1}{T_2} = -\frac{dT_1}{dT_2}$$

cuya integración da:

$$\ln T_1 + \ln T_2 = \ln \text{cte.} \quad \text{o} \quad \ln (T_1 \cdot T_2) = \ln \text{cte.}$$

es decir: $T_1 \cdot T_2 = \text{cte.} = T_{1i} \cdot T_{2i}$.
Con lo cual:

$$T_2 = \frac{T_{1i} \cdot T_{2i}}{T_1} \qquad \text{(b)}$$

El proceso acaba cuando sea $T_2 = T_1 = T_f$, en cuyo caso, al sustituir en la ecuación anterior, resulta para la temperatura final la expresión:

$$T_f^2 = T_{1i} \cdot T_{2i} \quad \text{o} \quad T_f = \sqrt{T_{1i} \cdot T_{2i}}$$

Llevando (b) a (a), el trabajo elemental se expresa:

$$W = -\int_{T_{1i}}^{T_f} mc\left(1 - \frac{T_{1i} \cdot T_{2i}}{T_1^2}\right) dT_1$$

cuya integración da para el trabajo neto producido la expresión:

$$W_n = -mc\left[T_1 + \frac{T_{1i} \cdot T_{2i}}{T_1}\right]_{T_{1i}}^{T_f} = -mc\left(T_f + \frac{T_{1i} \cdot T_{2i}}{T_f} - T_{1i} - T_{2i}\right) =$$

$$= mc\,(T_{1i} + T_{2i} - 2\sqrt{T_{1i} \cdot T_{2i}})$$

El rendimiento medio del motor es:

$$\bar{\eta} = \frac{W_n}{Q_1}$$

siendo Q_1 el calor total extraído del foco caliente, cuyo valor es:

$$Q_1 = -mc\int_{T_{1i}}^{T_f} dT_1 = -mc\,(T_f - T_{1i}) = mc\,(T_{1i} - T_f)$$

y, con ello, el rendimiento medio se expresa en función de las temperaturas:

$$\bar{\eta} = \frac{T_{1i} + T_{2i} - 2T_f}{T_{1i} - T_f}$$

Para los valores de la aplicación resultan ser:

La temperatura final, $T_f = 319{,}107$ K.

El trabajo neto obtenido, $W_n = 0{,}03258$ m J.

El calor absorbido del foco caliente, $Q_1 = 0{,}2255$ m J.

El rendimiento medio, $\eta = 0{,}1445$.

EJEMPLO 21.5

Una bomba de calor funciona tomando calor del ambiente a temperatura T_2, consumiendo un trabajo W y comunicando calor a un recinto a temperatura T_1, $T_1 > T_2$ (Figura 21.12). Admitiendo que la bomba funciona realizando un ciclo de Carnot inverso, determinemos: la eficiencia de la bomba; la relación existente entre los calores, Q_2, tomado del medio, Q_1, comunicado al recinto y el valor de éstos en función de la energía consumida por cada ciclo W. Calcular la aplicación al caso $T_1 = 335$ K y $T_2 = 283$ K.

Solución:

El primer principio permite escribir:

$$-Q_1 + Q_2 = -W \quad \text{o} \quad Q_1 - Q_2 = W$$

La eficiencia de la bomba es:

$$\varepsilon = \frac{Q_1}{W} = \frac{Q_1}{(Q_1 - Q_2)} = \frac{T_1}{(T_1 - T_2)}$$

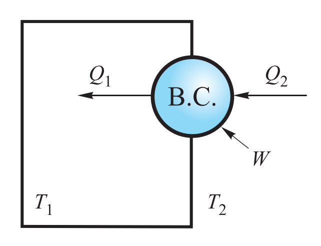


Figura 21.12.

Puesto que:

$$W = \frac{Q_1}{\varepsilon} = Q_1 - Q_2$$

dividiendo por Q_1, resulta:

$$\frac{1}{\varepsilon} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

de donde:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{1}{\varepsilon}$$

El calor cedido al foco caliente en función de la energía consumida es $Q_1 = \varepsilon$ W y el calor absorbido del foco frío:

$$Q_2 = Q_1 - W = \varepsilon W - W = (\varepsilon - 1)W$$

Para los valores de la aplicación son:

$$\text{Eficiencia } \varepsilon = 6{,}44 \quad , \quad \frac{Q_2}{Q_1} = 0{,}845 \quad , \quad Q_1 = 6{,}44\, W \quad \text{y} \quad Q_2 = 5{,}44 \text{ W}$$

21.7 Máquina frigorífica de Carnot

El ciclo de Carnot es un ciclo ideal reversible, puesto que todos los procesos que en él se verifican lo son. Cuando se realiza en sentido contrario al descrito para el motor de Carnot, es decir, tomando del foco frío la cantidad de calor Q_2, consumiendo un trabajo W_n y cediendo al foco caliente la cantidad de calor Q_1, estamos ante una máquina frigorífica que denominamos de Carnot (Figura 21.13). Debemos hacer notar que las cantidades Q_1, Q_2 y W_n son las mismas en valor absoluto, pero cambiadas de signo, que las correspondientes del motor de Carnot.

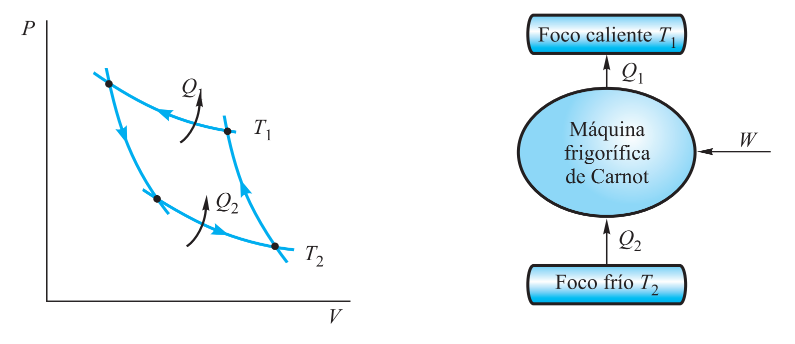


Figura 21.13.

La eficiencia de la máquina frigorífica de Carnot puede expresarse en función de las temperaturas de los focos:

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{W_n} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \qquad [21.15]$$

21.8 Teoremas de Carnot

Son dos importantes teoremas que hacen referencia al rendimiento del ciclo de Carnot y que se enuncian así:

TEOREMA 1. *El motor termodinámico de mayor rendimiento de los que pueden funcionar entre dos focos térmicos es el de Carnot.*

TEOREMA 2. *Todos los motores de Carnot que funcionen entre los mismos focos térmicos tienen el mismo rendimiento.*

TEOREMA 1. Consideremos dos motores, M_1 y M_2, que funcionan entre dos focos térmicos de temperaturas T_1 y T_2, siendo $T_1 > T_2$. Los motores se ajustan en su funcionamiento de forma que la cantidad de calor intercambiada con el foco de temperatura T_2 sea la misma para los dos, a la que llamaremos Q_2. Supongamos que el motor M_1 es reversible. Según el primer principio, debe ser:

$$W_1 = Q_1 - Q_2 \quad ; \quad W_2 = Q'_1 - Q_2$$

y los rendimientos son:

$$\eta_1 = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad ; \quad \eta_2 = 1 - \frac{Q_2}{Q'_1}$$

Si el motor M_2 es irreversible, haciendo funcionar el motor 1 como máquina frigorífica (Figura 21.14), el sistema formado por el conjunto intercambia calor únicamente con el foco caliente y, según el segundo principio, establece que debe ser:

$$W_2 - W_1 \leqslant 0$$

y en consecuencia:

$$Q'_1 - Q_1 \leqslant 0 \quad \text{o} \quad Q'_1 \leqslant Q_1 \quad ; \quad \frac{Q_2}{Q'_1} \geqslant \frac{Q_2}{Q_1} \quad \text{y} \quad \eta_1 \geqslant \eta_2$$

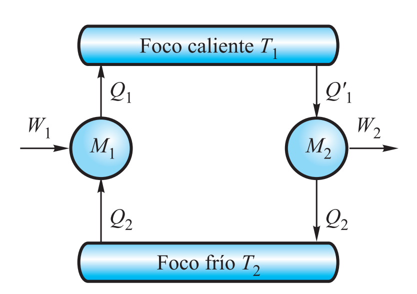


Figura 21.14.

lo que demuestra que el rendimiento del motor de Carnot es superior al de cualquier motor irreversible que funcione entre los mismos dos focos térmicos.

TEOREMA 2. Si el motor M_2 es reversible, el motor formado por el conjunto del M_1 y M_2 es reversible y el segundo principio, según que el motor funcione en uno u otro sentido, da:

$$W_2 - W_1 \leqslant 0 \quad \text{y} \quad W_1 - W_2 \leqslant 0$$

lo que exige que sea $W_1 = W_2$ y, en consecuencia, $\eta_1 = \eta_2$, lo que demuestra que los motores de Carnot que funcionan entre los mismos dos focos térmicos tienen el mismo rendimiento.

21.9 Otros tipos de ciclo

Algunos tipos de motores se aproximan en su funcionamiento a ciertos tipos de ciclo ideal, diferente del de Carnot, que por ello interesa estudiar. Así lo haremos para los ciclos Stirling, Otto, Diesel y Brayton.

Ciclo Stirling

Es un ciclo, ideado por Stirling en 1816, formado por dos isotermas, 1-2 y 3-4, y dos isócoras, 2-3 y 4-1 (Figura 21.15). El trabajo neto útil será el producido en la transformación isoterma 1-2, menos el consumido en la 3-4:

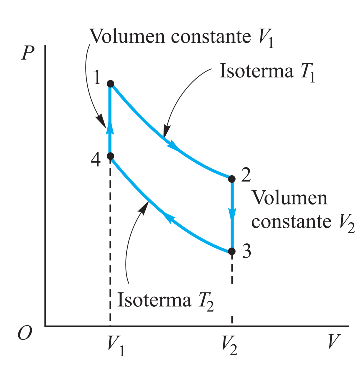


Figura 21.15.

$$W_n = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - nRT_2 \ln \frac{V_2}{V_1} = nR(T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1}$$

La energía absorbida será la suma del calor absorbido en la transformación 1-2, más el absorbido en la 4-1:

$$Q_{12} = W_{12} = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \quad \text{y} \quad Q_{41} = U_1 - U_4 = nc_v(T_1 - T_2)$$

Con ello, el rendimiento de este ciclo puede expresarse de la forma:

$$\eta = \frac{W_n}{Q_1} = \frac{R(T_1 - T_2) \ln \dfrac{V_2}{V_1}}{RT_1 \ln \dfrac{V_2}{V_1} + c_v(T_1 - T_2)}$$

EJEMPLO 21.6

Un número n de moles de un cierto gas realiza un ciclo Stirling como el indicado en la Figura 21.15. La transformación 1-2 se realiza a la temperatura T_1 y la 3-4 a la temperatura T_2, mientras que las 2-3 y 4-1 son isócoras a volumen V_2 y V_1, respectivamente. Admitiendo que el gas se comporta como perfecto, cuyo calor específico molar a volumen constante, c_v, se mantiene constante, calculemos:

1.º Los trabajos realizado, consumido y neto dado por el motor.

2.º La energía total absorbida.

3.º El rendimiento del motor.

4.º La aplicación al caso $n = 0{,}05$ moles; $T_1 = 420$ K; $T_2 = 320$ K; $V_2 = 1$ l; $V_1 = 0{,}25$ l; $c_v = 5$ cal/mol · K; $R = 8{,}314$ J/mol · K; y 1 cal = 4,184 J.

Solución:

1.º El motor realiza trabajo a lo largo de la isoterma 1-2 y su valor es $W_p = nRT_1 \ln (V_2/V_1)$. El motor consume trabajo para la compresión isoterma 3-4, cuyo valor es:

$$W_c = nRT_2 \ln \left(\frac{V_3}{V_4}\right) = nRT_2 \ln \left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

El trabajo neto dado por el motor es:

$$W_n = W_p - W_c = nR(T_1 - T_2) \ln \left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

2.º El motor absorbe energía en las transformaciones 4-1 para aumentar la presión y la energía interna, y en la 1-2, para producir un trabajo, disminuyendo su presión:

$$E = Q_{41} + Q_{12} = nc_v (T_1 - T_2) + nRT_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

3.º El rendimiento es:

$$\eta = \frac{W_n}{E} = \frac{R(T_1 - T_2) \ln \dfrac{V_2}{V_1}}{c_v (T_1 - T_2) + RT_1 \ln \dfrac{V_2}{V_1}}$$

4.º Los valores para la aplicación son:

$W_p = 0{,}05 \cdot 8{,}314 \cdot 420 \cdot \ln 4 = 242{,}039$ J

$W_c = 0{,}05 \cdot 8{,}314 \cdot 320 \cdot \ln 4 = 184{,}410$ J

$W_n = 57{,}629$ J

$E = 0{,}05 \cdot 5 \cdot 4{,}184 \cdot 100 + W_p = 104{,}6 + 242{,}039 = 346{,}639$ J

$$\eta = \frac{57{,}629}{346{,}639} = 0{,}1663 = 16{,}63\ \%$$

Ciclo Otto

Este ciclo, ideado en 1876 por el ingeniero alemán Otto, está formado por dos transformaciones adiabáticas, 1-2 y 3-4, y dos isócoras, 2-3 y 4-1, y se asemeja al realizado por los motores de gasolina (Figura 21.16). El trabajo útil o neto será el producido en la expansión adiabática 1-2, menos el consumido en la compresión adiabática 3-4:

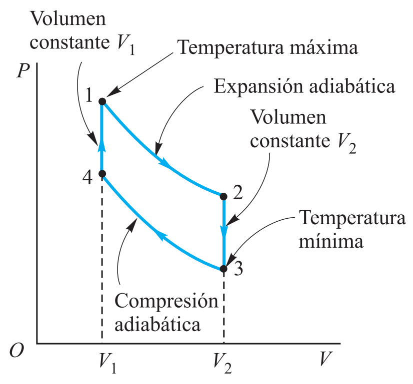


Figura 21.16.

$$W_n = W_{12} + W_{34} = nR(T_2 - T_1)/(1 - \gamma) + nR(T_4 - T_3)/(1 - \gamma) =$$
$$= nR(T_2 + T_4 - T_1 - T_3)/(1 - \gamma)$$

La energía consumida es igual al calor absorbido en la transformación 4-1, que es:

$$Q_1 = nc_v(T_1 - T_4) = nR(T_1 - T_4)/(\gamma - 1)$$

El rendimiento se expresa de la forma:

$$\eta = \frac{W_n}{Q_1} = 1 - \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_4}$$

y puesto que son:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{1-\gamma} = r^{1-\gamma} \quad \text{y} \quad \frac{T_3}{T_4} = r^{1-\gamma}$$

en la que $r = V_2/V_1 = V_3/V_4$ se denomina relación de compresión, el rendimiento puede expresarse:

$$\eta = 1 - \frac{T_1 r^{1-\gamma} - T_4 r^{1-\gamma}}{T_1 - T_4} = 1 - r^{1-\gamma}$$

EJEMPLO 21.7

Un motor de combustión interna sigue un ciclo Otto utilizando $n = 0{,}15$ moles de mezcla, que se supone gas ideal de $\gamma = 1{,}4$. En el estado inicial, el volumen es $V_3 = 4$ l y la temperatura $T_3 = 300$ K. Se le comprime hasta reducir su volumen a $V_4 = 1$ l; manteniendo el volumen constante la presión se eleva a $P_1 = 9$ atm. Tomando para $c_{Mv} = 5$ cal/mol · K, determinemos:

a) Las presiones, los volúmenes y las temperaturas en cada vértice del ciclo.
b) El calor y el trabajo intercambiados en cada transformación.
c) El rendimiento del ciclo.

Solución:

a) En el estado 3, podemos calcular el valor de la presión:

$$P_3 = nRT_3/V_3 = 0{,}15 \times 0{,}082028 \times 300/4 = 0{,}923 \text{ atm}$$

En el estado 4, la presión se obtiene por aplicación de la [20.61]:

$$P_4 V_4^{\gamma} = P_3 V_3^{\gamma} \quad , \quad P_4 = 0{,}923 \times 4^{1,4} = 6{,}43 \text{ atm}$$

La temperatura en 4 se obtiene de la ecuación de estado:

$$T_4 = P_4 \cdot V_4/nR = 522{,}435 \text{ K}$$

En el estado 1, se conoce la presión y el volumen, por lo que la ecuación de estado nos da la temperatura:

$$T_1 = P_1 \cdot V_1/nR = 9/0{,}15 \times 0{,}082028 = 731{,}457 \text{ K}$$

En el estado 2, se conoce el volumen y la Ecuación [20.61] nos permite calcular la presión:

$$9 = P_2 \cdot 4^{1,4}, \text{ de donde: } P_2 = 1{,}292 \text{ atm}$$

La temperatura en 2 se obtiene de la ecuación de estado:

$$T_2 = P_2 \cdot V_2/nR = 1{,}292 \times 4/0{,}15 \times 0{,}082028 = 420{,}112 \text{ K}$$

b) En la transformación 1-2, no hay intercambio de calor y el trabajo está dado por la [20.62]:

$$W_{12} = nR(T_2 - T_1)/(1-\gamma) = 0{,}15 \times 8{,}314472 \times (-311{,}345)/(-0{,}4) = 970{,}75 \text{ J}$$

En la transformación 2-3, no hay intercambio de trabajo y el calor intercambiado está dado por la [20.49]:

$$Q_{23} = 0{,}15 \times 5(-120,\ 112) = -90{,}084 \text{ cal; calor cedido}$$

En la transformación 3-4, no hay intercambio de calor y el trabajo intercambiado es:

$$W_{34} = nR(T_4 - T_3)/(1-\gamma) = 0{,}15 \times 8{,}314472 \times 222{,}435/(-0,\ 4) =$$
$$= -693{,}536 \text{ J; trabajo consumido.}$$

En la transformación 4-1, no hay intercambio de trabajo y el intercambio de calor será:

$$Q_{41} = nc_{Mv}(T_1 - T_4) = 0{,}15 \times 5 \times 209{,}022 = 156{,}767 \text{ cal,}$$

calor absorbido, que es obtenido de la combustión de la gasolina.

c) El rendimiento del motor puede obtenerse del cociente entre el trabajo neto producido y el calor absorbido:

$$W_n = W_{12} - W_{34} = 277{,}214 \text{ J} = 66{,}256 \text{ cal}$$

$$\eta = \frac{66{,}256}{156{,}767} = 0{,}423$$

Ciclo Diesel

Este ciclo, ideado por Diesel en 1890, está formado por dos adiabáticas, 2-3 y 4-1; una isóbara, 1-2, y una isócora, 3-4, y a él se asemejan los motores de combustión interna que utilizan el gasoil como combustible. El trabajo neto producido es igual al intercambio neto de calor $W_n = Q_1 - Q_2$, y el rendimiento se expresa:

$$\eta = \frac{W_n}{Q_1} = \frac{(Q_1 - Q_2)}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

en la que Q_2 es el calor cedido en la transformación isócora: $Q_2 = nc_v(T_3 - T_4)$, y Q_1 es el calor absorbido en la transformación isóbara: $Q_1 = nc_p(T_2 - T_1)$, con lo que el rendimiento se expresa:

$$\eta = 1 - \frac{c_v(T_3 - T_4)}{c_p(T_2 - T_1)} = 1 - \frac{T_3 - T_4}{\gamma(T_2 - T_1)}$$

Puesto que son:

$$\frac{T_3}{T_2} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{1-\gamma} = r_2^{1-\gamma} \quad \text{y} \quad \frac{T_4}{T_1} = \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{1-\gamma} = r_1^{1-\gamma}$$

denominándose a $r_1 = V_3/V_1$ relación de compresión adiabática, y a $r_2 = V_3/V_2$, relación de expansión adiabática, en función de las cuales el rendimiento se expresa:

$$\eta = 1 - \frac{T_2 r_2^{1-\gamma} - T_1 r_1^{1-\gamma}}{\gamma(T_2 - T_1)} = 1 - \frac{V_2 r_2^{1-\gamma} - V_1 r_1^{1-\gamma}}{\gamma(V_2 - V_1)} = 1 - \frac{V_3 r_2^{-\gamma} - V_3 r_1^{-\gamma}}{\gamma(V_2 - V_1)} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{r_2^{-\gamma} - r_1^{-\gamma}}{r_2^{-1} - r_1^{-1}}$$

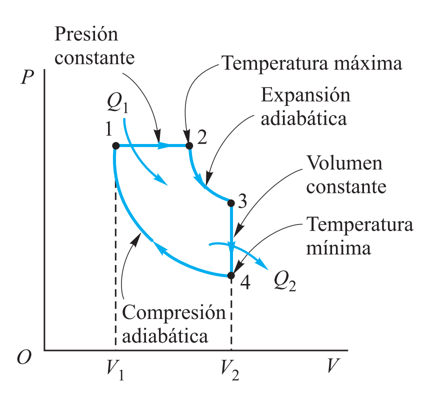


Figura 21.17.

EJEMPLO 21.8

Un motor diesel sigue su ciclo desde el estado 4, en el cual $P_4 = 1$ atm, $V_4 = 1$ l y $T_4 = 300$ K, elevando su presión hasta $P_1 = 35$ atm y recibiendo durante la transformación 1-2, 200 calorías procedentes de la combustión del gasoil. Admitiendo que todos los procesos son reversibles, que el gas se comporta como ideal, y tomando $\gamma = 1{,}4$ y $c_{Mp} = 7$ cal/mol · K, calculemos:

a) Las presiones, los volúmenes y las temperaturas en cada vértice del ciclo.
b) Los intercambios de calor y el trabajo en cada transformación.
c) El rendimiento del ciclo.

Solución:

a) En el estado inicial, estado 4, puede determinarse el número de moles que intervienen en los procesos $P_4V_4 = nRT_4$, $n = 1/0{,}082028 \times 300 = 0{,}0406$ moles.

En el estado 1, conocemos la presión y la Ecuación [20.61] permite calcular el volumen:

$$P_1 \cdot V_1^{\gamma} = P_4 \cdot V_4^{\gamma} \quad , \quad 35\, V_1^{1,4} = 1 \quad \text{y} \quad V_1 = 0{,}0789 \text{ l}$$

La temperatura en este estado es:

$$T_1 = 35 \times 0{,}0789/0{,}0406 \times 0{,}082028 = 829{,}2 \text{ K}$$

En la transformación 1-2, podemos aplicar la Ecuación [20.52] y obtener la temperatura T_2:

$$Q_{12} = nc_{Mp}(T_2 - T_1) \quad , \quad 200 = 0{,}0406 \times 7 \times (T_2 - 829{,}2)$$

de donde:

$$T_2 = 1532{,}93 \text{ K}$$

El volumen en 2 se obtiene de la ecuación de estado $V_2 = 0{,}1459$ l.

En el estado 3, conocemos su volumen; la presión puede deducirse por aplicación de la [20.61]:

$$P_3 = 35 \cdot 0{,}1459^{1,4} = 2{,}365 \text{ atm}$$

y la temperatura, por aplicación de la ecuación de estado: $T_3 = 710$ K.

b) En la transformación 1-2, se produce el trabajo:

$$W_{12} = (V_2 - V_1) P_1 = 0{,}067 \times 35 = 2{,}345 \text{ atm} \cdot 1 = 237{,}69 \text{ J}$$

y se absorbe el calor $Q_{12} = 200$ cal.

En la transformación 2-3, no hay intercambio de calor y el trabajo producido está dado por la [20.62]:

$$W_{23} = 0{,}0406 \times 8{,}314472 (-822{,}93)/-0{,}4) = 694{,}486 \text{ J}$$

En la transformación 3-4, no hay intercambio de trabajo y el calor intercambiado está dado por la [20.49]:

$$Q_{34} = nc_{Mv} (T_4 - T_3) = 0{,}0406 \times 5{,}012784 \times (-410) =$$
$$= -83{,}443 \text{ cal; calor cedido}$$

Finalmente, en la transformación 4-1, no hay intercambio de calor y la cantidad de trabajo intercambiada está dada por la [20.62]:

$$W_{41} = 0{,}0406 \times 8{,}314472 (529{,}2)/(-0{,}4) = -446{,}60 \text{ J}$$

c) El rendimiento del ciclo puede obtenerse como cociente entre el trabajo neto producido y el calor absorbido:

$$W_n = W_{12} + W_{23} - W_{41} = 237{,}69 + 694{,}486 - 446{,}60 =$$
$$= 485{,}576 \text{ J} = 116{,}056 \text{ cal}$$

$$\eta = \frac{116{,}056}{200} = 0{,}58$$

Ciclo Brayton

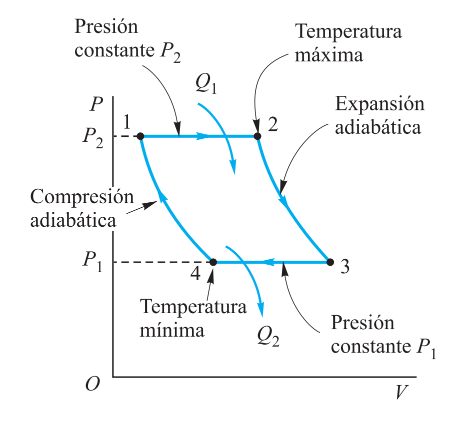


Figura 21.18.

Este ciclo está formado por dos adiabáticas, 2-3 y 4-1, y dos isóbaras, 1-2 y 3-4. El trabajo neto útil será igual al intercambio neto de calor, $W_n = Q_1 - Q_2$; la energía consumida es igual al calor absorbido en la transformación 1-2, $Q_1 = nc_p(T_2 - T_1)$; y el rendimiento se expresa:

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{nc_p(T_3 - T_4)}{nc_p(T_2 - T_1)} = 1 - \frac{T_3 - T_4}{T_2 - T_1}$$

21.10 Escala termodinámica de temperaturas

Hemos visto cómo el rendimiento del ciclo de Carnot depende únicamente de las temperaturas de los focos térmicos entre los que actúa, es decir, es función únicamente de las temperaturas de éstos, pudiendo escribirse:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = f(t_1, t_2)$$

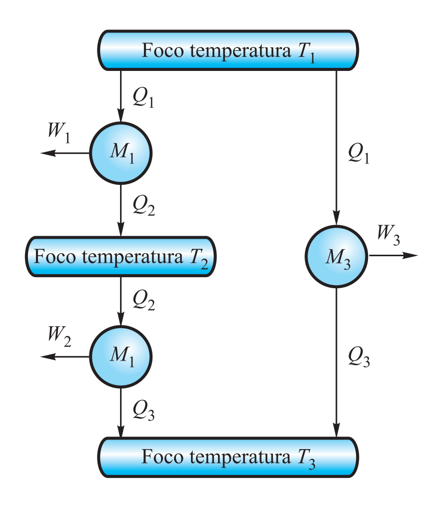


Figura 21.19.

Consideremos tres focos térmicos de temperaturas t_1, t_2 y t_3, siendo $t_1 > t_2 > t_3$, y tres motores termodinámicos que funcionen como se indica en la Figura 21.19; para cada motor puede expresarse:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = f(t_1, t_2) \quad ; \quad \frac{Q_2}{Q_3} = f(t_2, t_3) \quad \text{y} \quad \frac{Q_1}{Q_3} = f(t_1, t_3)$$

Puesto que siempre es:

$$\frac{Q_1}{Q_3} = \frac{Q_1}{Q_2} \cdot \frac{Q_2}{Q_3}$$

también será:

$$f(t_1, t_3) = f(t_1, t_2) f(t_2, t_3)$$

El primer miembro no es función de t_2 y tampoco deberá serlo el segundo, de lo que se deduce que las funciones que aparecen en éste deben ser de la forma:

$$f(t_1, t_2) = \frac{\varphi(t_1)}{\varphi(t_2)} \quad \text{y} \quad f(t_2, t_3) = \frac{\varphi(t_2)}{\varphi(t_3)}$$

En consecuencia:

$$f(t_1, t_3) = \frac{\varphi(t_1)}{\varphi(t_3)} = \frac{Q_1}{Q_3}$$

Para definir la escalar de temperaturas termodinámicas Lord Kelvin propuso la relación más sencilla:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

estableciendo que la relación entre dos temperaturas, en la escala de temperaturas termodinámicas, es igual a la relación entre las cantidades de calor absorbida y cedida por un motor de Carnot que funcionase entre dos focos a esas temperaturas, lo que ha sido demostrado para el gas ideal en el Epígrafe 21.5.

Para establecer los intervalos de temperatura en esta escala, imaginemos una serie de motores de Carnot escalonados, de forma que cada uno de ellos funcione con el calor cedido por el anterior y que todos produzcan el mismo trabajo (Figura 21.20). Veamos cómo, en estas condiciones, los intervalos de temperatura entre los focos térmicos de funcionamiento de cada uno de los motores son iguales. En efecto:

Para el primer motor es:

$$W = Q_1 - Q_2 = \frac{Q_1}{T_1}\left(T_1 - \frac{Q_2}{Q_1} T_1\right) = \frac{Q_1}{T_1}(T_1 - T_2)$$

Análogamente, para el motor que funciona entre las temperaturas T_n y T_{n+1}, es:

$$W = \frac{Q_n}{T_n}(T_n - T_{n+1})$$

y, puesto que todos los motores dan el mismo trabajo, puede establecerse:

$$\frac{Q_1}{T_1}(T_1 - T_2) = \frac{Q_2}{T_2}(T_2 - T_3) = \cdots = \frac{Q_n}{T_n}(T_n - T_{n+1}) = \cdots$$

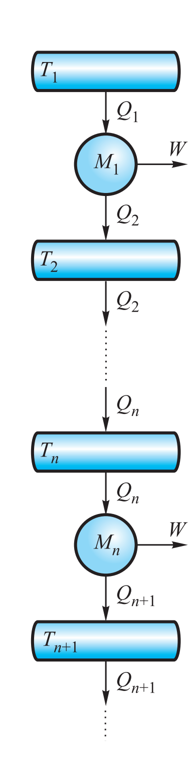


Figura 21.20.

De acuerdo con el escalonamiento de los motores, la aplicación de [21.16] da:

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} = \cdots = \frac{Q_n}{T_n} = \cdots$$

Con lo que resulta ser:

$$T_1 - T_2 = T_2 - T_3 = \cdots = T_n - T_{n+1}$$

según se quería demostrar.

Para establecer la escala de temperaturas termodinámicas sólo queda tomar una temperatura como punto fijo de referencia. En la Conferencia de Pesas y Medidas de 1954, se acordó que esta temperatura fuese la del punto triple del agua, al que se asignó el valor 273,16 K, con lo cual se hace coincidir la escala termodinámica de temperaturas con la absoluta.

Para determinar la temperatura de un sistema en la escala de temperaturas absolutas termodinámicas, es necesario hacer funcionar un motor de Carnot tomando como focos caloríficos el sistema y el punto triple del agua, y determinando el rendimiento del mismo. Utilizando la [21.16], el rendimiento, según que la temperatura del sistema sea superior o inferior a la del punto triple del agua, se expresa, respectivamente:

$$\eta = 1 - \frac{T_s}{T_{pt}} \quad \text{o} \quad \eta = 1 - \frac{T_{pt}}{T_s}$$

Y, si el rendimiento ha sido calculado, queda determinada la temperatura del sistema. El valor exacto de ésta no se puede determinar, debido a la imposibilidad de realizar un ciclo de Carnot perfectamente reversible, pero podemos aproximamos a él cuanto seamos capaces, dependiendo de nuestro refinamiento técnico.

Para determinar el cero absoluto deberíamos hacer funcionar un motor de Carnot entre una temperatura T_1 y el cero absoluto $T_2 = 0$ K; el rendimiento de este ciclo sería:

$$\eta = 1 - \frac{0}{T_1} = 1$$

lo que va en contra del segundo principio, de aquí la inaccesibilidad del cero absoluto. No obstante, como hemos indicado, podemos aproximarnos a él cuanto nos permita nuestro refinamiento técnico, así, se han llegado a determinar temperaturas de 0,001 K.

21.11 Desigualdad de Clausius

Consideremos dos motores termodinámicos, uno reversible y el otro no, funcionando entre los dos mismos focos térmicos de temperaturas T_1 y T_2. Según el teorema de Carnot, el rendimiento del reversible será mayor:

$$\eta_R \geqslant \eta_I \quad \text{o} \quad 1 - \frac{T_2}{T_1} \geqslant 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} \leqslant \frac{Q_2}{Q_1} \quad \text{o} \quad \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \leqslant 0$$

Se trata de expresiones en las que la igualdad es para el proceso reversible y la desigualdad para el irreversible.

Todo proceso cíclico reversible puede verse como una suma de infinitos ciclos de Carnot infinitamente pequeños. Supongamos un proceso reversible, que está representado por el ciclo de la Figura 21.21, realizado en el sentido que se indica. El ciclo puede dividirse mediante una serie de adiabáticas infinitamente próximas. Consideremos dos de éstas, la *AD* y la *BC*; por *A* tracemos la isoterma AB' y por *C* la isoterma CD', habremos así construido el ciclo de Carnot $AB'CD'A$.

Consideremos la transformación cíclica $ABB'A$ y sea δQ_1 el calor absorbido por el sistema en la transformación elemental *AB*, y $\delta Q_1'$ el cedido en la $B'A$. Por el primer principio, la cantidad neta de calor consumida en el ciclo es igual al trabajo producido en él:

$$\delta Q_1 - \delta Q_1' = \delta W = \text{Área}\,(ABB'A)$$

y en el límite, cuando cada adiabática esté infinitamente próxima a la contigua, será $dQ_1 = dQ_1'$.

Lo mismo sucede en la transformación cíclica $CDD'C$, que en el límite será $dQ_2 = dQ_2'$.

Para el ciclo de Carnot $AB'CD'A$, podemos escribir:

$$\frac{\delta Q_1'}{T_1} - \frac{\delta Q_2'}{T_2} = 0$$

y al tender cada adiabática a la contigua es:

$$\frac{dQ_1}{T_1} - \frac{dQ_2}{T_2} = 0$$

lo que sumado para todos los ciclos infinitamente pequeños da:

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0$$

Si el ciclo fuera irreversible se verificará, análogamente:

$$\oint \frac{dQ}{T} < 0$$

puesto que ahora habrá pérdidas de calor debidas a los efectos disipativos causantes de la irreversibilidad.

En general, puede establecerse que para cualquier ciclo se verifica la inecuación llamada de Clausius:

$$\oint \frac{dQ}{T} \leqslant 0 \qquad [21.16]$$

debiéndo tomar el signo *igual* para los ciclos reversibles y el *menor que* para los irreversibles.

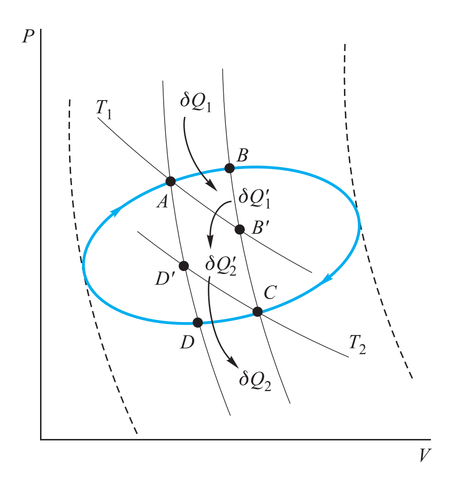


Figura 21.21.

21.12 Entropía

Consideremos un sistema que realiza una transformación reversible del estado 1 al 2, siguiendo una evolución representada por la línea *A*, y que completa el ciclo,

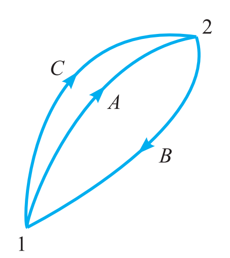


Figura 21.22.

volviendo al estado 1, siguiendo la evolución reversible representada por la línea B (Figura 21.22). Puesto que el ciclo es reversible, podemos escribir:

$$\int_{A\,1}^{2} \frac{dQ}{T} + \int_{B\,2}^{1} \frac{dQ}{T} = 0$$

Si el sistema realiza el paso de 1 a 2 por la trayectoria reversible C y completa el ciclo volviendo a 1 por la línea B, el ciclo será reversible y se verificará:

$$\int_{C\,1}^{2} \frac{dQ}{T} + \int_{B\,2}^{1} \frac{dQ}{T} = 0$$

Restando las dos últimas ecuaciones resulta:

$$\int_{A\,1}^{2} \frac{dQ}{T} = \int_{C\,1}^{2} \frac{dQ}{T}$$

luego el valor de la integral curvilínea $\int_{1}^{2} \frac{dQ}{T}$ es independiente de la curva seguida para pasar de 1 a 2 y, en consecuencia, la cantidad subintegral es una diferencial exacta de una función de estado. A esta función de estado o propiedad del sistema se le llama *entropía*, y se designa con S, siendo:

$$dS = \frac{dQ}{T} \qquad [21.17]$$

y la variación de entropía entre dos estados:

Variación de entropía

$$S_2 - S_1 = \int_{R\,1}^{2} \frac{dQ}{T}$$

La ecuación de dimensiones de la entropía será $[S] = ML^2T^{-2}\,\mathrm{K}^{-1}$ y sus posibles unidades carecen de nombre especial, siendo en el S.I. el J/K y, también, muy usual, la cal/K.

Consideramos muy importante señalar que la variación de entropía entre dos estados no depende más que de éstos y no de si el proceso seguido para pasar de uno a otro es reversible o no. Ahora bien, la última integral solamente puede calcularse a lo largo de una trayectoria reversible. El cambio de entropía en una transformación irreversible puede calcularse ideando un proceso reversible entre los mismos estados inicial y final, y calculando la variación de entropía a lo largo de éste según las ecuaciones establecidas.

Consideremos de nuevo el sistema que realiza el ciclo reversible $1A2B1$; para él podemos escribir:

$$\int_{A\,1}^{2} \frac{dQ}{T} + \int_{B\,2}^{1} \frac{dQ}{T} = 0$$

Sea ahora la transformación de 1 a 2 por C irreversible, también lo será el ciclo $1C2B1$ y se verificará:

$$\int_{C\,1}^{2} \frac{dQ}{T} + \int_{B\,2}^{1} \frac{dQ}{T} < 0$$

restando ambas ecuaciones:

$$\int_{A\,1}^{2} \frac{dQ}{T} > \int_{C\,1}^{2} \frac{dQ}{T}$$

y, puesto que la entropía es función de estado y la trayectoria A es reversible, resulta:

$$\int_{A\,1}^{2} \frac{dQ}{T} = \int_{A\,1}^{2} dS > \int_{C\,1}^{2} dS = \int_{C\,1}^{2} \frac{dQ}{T}$$

es decir:

$$S_2 - S_1 > \int_{C\,1}^{2} \frac{dQ}{T}$$

Al ser la entropía función de estado, su variación al pasar del estado 1 al estado 2, $S_2 - S_1$, no depende del camino seguido, ni de si éste es reversible o irreversible, únicamente depende de los estados inicial y final, 1 y 2. Ahora bien, para calcular la variación de entropía, hay que hacerlo siempre a lo largo de un proceso reversible, ya que de lo contrario obtendríamos un valor menor. Por tanto, si el paso del estado 1 al 2 se hace por un camino irreversible, hay que crear formalmente un camino reversible entre estos estados y calcular a lo largo de él la variación de entropía.

21.13 Principio de aumento de entropía

Este principio establece que *solamente son posibles aquellos procesos reales que comportan un aumento de entropía del universo* o *no es posible un proceso real que conlleve disminución de la entropía del universo*.

Consideremos un sistema a temperatura T_s y el medio exterior a temperatura T_m. Solamente pueden presentarse dos situaciones, $T_s > T_m$ o $T_s < T_m$.

En la primera de ellas, el flujo de calor va desde el sistema al medio (Figura 21.23) y las variaciones de entropía de cada uno son:

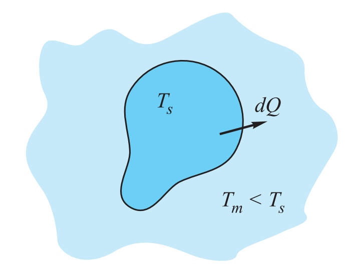


Figura 21.23.

$$dS_s = -\frac{dQ}{T_s} \quad \text{y} \quad dS_m = \frac{dQ}{T_m}$$

y sumando resulta, para la variación de entropía del universo:

$$dS_u = dS_s + dS_m = \left(\frac{1}{T_m} - \frac{1}{T_s}\right) dQ > 0$$

por ser $T_s > T_m$.

En el segundo supuesto posible, $T_s < T_m$, el flujo de calor irá desde el medio al sistema (Figura 21.24), y las variaciones de entropía serán ahora:

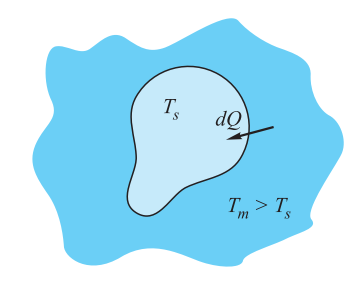


Figura 21.24.

$$dS_s = \frac{dQ}{T_s} \quad \text{y} \quad dS_m = -\frac{dQ}{T_m}$$

resultando para la variación de entropía del universo

$$dS_u = dS_s + dS_m = \left(\frac{1}{T_s} - \frac{1}{T_m}\right) dQ > 0$$

por ser ahora $T_m > T_s$.

En definitiva, siempre es:

$$dS_u = dS_s + dS_m > 0 \qquad [21.18]$$

que expresa el principio de aumento de entropía, indicándonos que solamente son posibles aquellos procesos que comporten una suma positiva de variaciones de entropía del sistema y del medio exterior. Nos indica, en consecuencia, qué proceso o en qué sentido los procesos son posibles, viniendo a ser un enunciado muy general del segundo principio, de forma que un proceso que violase el segundo principio violaría el principio de aumento de entropía.

Si el sistema está aislado del medio, el principio de aumento de entropía se reduce a $dS_s > 0$ y, en consecuencia, *en un sistema aislado solamente pueden ocurrir procesos que comporten un aumento de entropía*, resultando que un sistema térmicamente aislado estará en equilibrio cuando su entropía esté en un máximo.

Al ceder el medio al sistema, o éste a aquél, una cantidad de calor dQ, no hay variación en la cantidad de energía del universo, lo que sí se produce es una uniformidad en las temperaturas, es decir, una disminución del salto térmico y, puesto que éste puede utilizarse para producir trabajo, habremos perdido la oportunidad de hacerlo. En consecuencia, el aumento de entropía de universo nada tiene que ver con la energía total de éste, que permanece constante; su verdadero significado físico es la disminución de la posibilidad de aprovechar la energía térmica para producir trabajo, ya que el salto térmico disminuye. Por tanto, al aumentar la entropía, la energía térmica se hace menos utilizable, y se dice que se ha degradado.

La entropía del universo, de acuerdo con el principio de aumento de entropía, crece constantemente y las temperaturas tienden a hacerse uniformes. Parece, pues, que el universo se encamina hacia un estado de temperatura uniforme en el cual toda la energía estará completamente degradada y la entropía habrá alcanzado su máximo, no siendo posible proceso real alguno. A esta situación se le denomina muerte térmica del universo.

Siguiendo un razonamiento inverso, la entropía del universo fue nula en el origen del tiempo, es decir, cuando se inició el universo y comenzaron los procesos físicos, lo cual exige una causa primera que dé comienzo a la vida y a la producción de entropía, lo que puede constituir una demostración de la existencia de Dios, independiente de las teológicas.

21.14 Diagrama entrópico

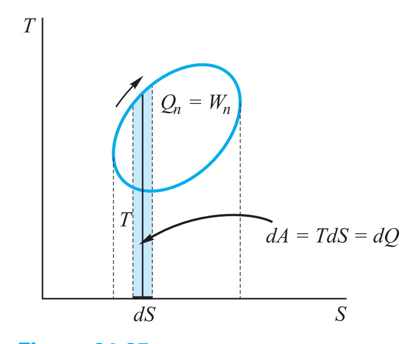
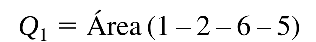


Figura 21.25.

Es el realizado tomando en abscisas la entropía y en ordenadas la temperatura. Consideremos el diagrama entrópico de un cierto proceso cíclico reversible como el indicado en la Figura 21.25, en el cual el área sombreada $T\,dS = dQ$, es el calor intercambiado en la transformación elemental. En consecuencia, el calor neto absorbido por el sistema al realizar el ciclo es el área encerrada por éste en su diagrama entrópico que, de acuerdo con el primer principio, será igual al trabajo neto intercambiado.

Las transformaciones isotermas tendrán como representación en el diagrama entrópico una recta paralela al eje de abscisas y las transformaciones adiabáticas reversibles estarán representadas por una recta paralela al eje de ordenadas, de aquí que el diagrama entrópico de un ciclo de Carnot sea un rectángulo (Figura 21.26). El sistema de temperatura T_1 pasa del estado 1 al 2, absorbiendo la cantidad de calor:



$$Q_1 = \text{Área}\,(1-2-6-5)$$

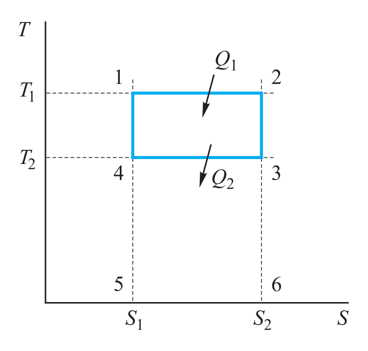


Figura 21.26.

y sufriendo el aumento de entropía:

$$S_2 - S_1 = \frac{Q_1}{T_1}$$

En el paso del 2 al 3 no hay intercambio de calor ni variación de entropía, y la temperatura disminuye de T_1 a T_2. El paso del 3 al 4 es una isoterma de temperatura T_2, cediendo el sistema la cantidad de calor:

$$Q_2 = \text{Área}\,(4-3-6-5)$$

y disminuyendo la entropía en:

$$S_2 - S_1 = \frac{Q_2}{T_2}$$

El paso del 4 al 1 es una nueva adiabática; no hay, pues, cambio de entropía ni intercambio de calor, y la temperatura se eleva hasta T_1.

El área encerrada por el diagrama entrópico del ciclo de Carmot es numéricamente igual a la cantidad de calor transformado en trabajo exterior:

$$Q_1 - Q_2 = W_n = (S_2 - S_1)\cdot(T_1 - T_2)$$




EJEMPLO 21.9

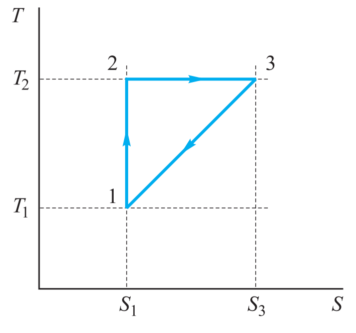


Figura 21.27.

Dos moles de un gas ideal siguen las transformaciones indicadas en el diagrama de la Figura 21.27. Del estado 1 al 2 se duplica la temperatura, manteniéndose la entropía constante, y del 2 al 3 se duplica la entropía, manteniéndose la temperatura constante. Calculemos:

1.º El trabajo neto producido en el ciclo.

2.º El calor absorbido.

3.º El rendimiento del ciclo.

4.º El rendimiento de un ciclo de Carnot que funcionara entre las temperaturas extremas.

5.º La variación de energía interna en cada transformación.

6.º La aplicación al caso: $S_1 = 4$ cal/K, $T_1 = 300$ K, $c_v = 3$ cal/mol · K y $n = 2$ moles.


Solución:

1.º De acuerdo con el primer principio, a lo largo de un ciclo el trabajo neto es igual al calor neto:

$$W = \int dQ = \int T\,dS = \text{Área}\,(1\,231) = \frac{1}{2}\,(S_3 - S_1)(T_2 - T_1) = \frac{1}{2}\,S_1 T_1$$

2.º El calor se absorbe en la transformación 2-3:

$$Q_a = T_2\,(S_3 - S_1) = 2\,S_1 T_1$$

3.º El rendimiento es:

$$\eta = \frac{W}{Q_a} = \frac{1}{2}\frac{S_1T_1}{2S_1T_1} = \frac{1}{4}$$

4.º El rendimiento de un ciclo de Carnot entre las temperaturas T_1 y T_2 es:

$$\eta = \frac{(T_2 - T_1)}{T_2} = \frac{1}{2}$$

5.º La variación de energía interna en el proceso 2-3 es nula por ser a temperatura constante:

En el proceso 1-2 es $U_2 - U_1 = nc_v(T_2 - T_1)$.
En el proceso 3-1 es $U_1 - U_3 = nc_v(T_1 - T_2)$.

6.º Aplicación: 1.º $W = \frac{1}{2}\ 4 \times 300 = 600$ cal; 2.º $Q_a = 2 \times 4 \times 300 = 2\,400$ cal; 5.º $U_2 - U_1 = 2 \times 3 \times 300 = 1\,800$ cal y $U_1 - U_3 = 2 \times 3 \times (-300) = -1\,800$ cal.

21.15 Algunas relaciones de la entropía con otras propiedades termodinámicas

Al sustituir en la expresión del primer principio $dQ = dU + P\,dV$, establecida con las restricciones que se indicaron, dQ por $T\,dS$, resulta:

$$T\,dS = dU + P\,dV$$

expresión de la que se deduce:

$$dS = \frac{1}{T}\,dU + \frac{p}{T}\,dV \qquad [21.19]$$

Análogamente, al sustituir dQ por $T\,dS$ en la Expresión [20.22] del primer principio, $dQ = dH - V\,dP$, obtenemos:

$$T\,dS = dH - V\,dP$$

de donde:

$$dS = \frac{dH}{T} - \frac{V}{T}\,dP \qquad [21.20]$$

Las dos expresiones que hemos obtenido relacionan la entropía con otras propiedades termodinámicas y, aun cuando han sido deducidas utilizando relaciones válidas únicamente para procesos reversibles, son válidas para cualquier proceso reversible o no, puesto que son relaciones entre propiedades de estado y no dependen más que de éste, no importando la trayectoria seguida para pasar de uno a otro.

21.16 Variación de entropía en algunos procesos reversibles

Veamos cómo se determina la variación de entropía en algunas transformaciones reversibles:

a) *Transformación adiabática.*

En una transformación adiabática, por definición, $dQ = 0$ y la variación de entropía también es nula:

$$S_2 - S_1 = 0$$

motivo por el cual a los procesos adiabáticos también se les denomina isentrópicos.

b) *Transformación isoterma.*

En esta transformación es $T =$ cte., lo que facilita la integración de [21.17] y la variación de entropía se expresa:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int_1^2 dQ = \frac{Q_{12}}{T} \qquad [21.21]$$

Si el sistema absorbe calor, la entropía aumenta, y si cede calor, disminuye su entropía. A este tipo pertenecen las variaciones de entropía durante los cambios de estado, ya que mientras éstos se verifican la temperatura permanece constante. Si denominamos c_L al calor latente de cambio de estado, o cantidad de calor que el sistema toma o cede para cambiar de estado un gramo del mismo, será $Q_{12} = mc_L$ y, con ello:

$$S_2 - S_1 = \frac{mc_L}{T} \qquad [21.22]$$

siendo T la temperatura de cambio de estado.

c) *Transformación a volumen constante.*

En un proceso a volumen constante es $dQ = c_v\,dT$ y, con ello, la variación de entropía para un gramo de sustancia está dada por:

$$s_2 - s_1 = \int \frac{dQ}{T} = \int c_v \frac{dT}{T} \qquad [21.23]$$

y para un mol:

$$S_2 - S_1 = \int c_{Mv} \frac{dT}{T} \qquad [21.24]$$

La integración de estas expresiones exige conocer $c_v = f(T)$ o $c_{MV} = F(T)$. Si admitimos que entre los estados 1 y 2 el calor específico se mantiene constante, resulta:

Para un gramo: $$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} \qquad [21.25]$$

y para un mol: $$S_2 - S_1 = c_{Mv} \ln \frac{T_2}{T_1} \qquad [21.26]$$

d) *Transformación a presión constante.*

En un proceso a presión constante es $dQ = c_p\,dT$ y, con ello, la variación de entropía para un gramo de sustancia está dada por:

$$s_2 - s_1 = \int \frac{dQ}{T} = \int c_p \frac{dT}{T} \qquad [21.27]$$

y para un mol:
$$S_2 - S_1 = \int c_{Mp} \frac{dT}{T} \qquad [21.28]$$

La integración de estas expresiones exige conocer $c_p = f(T)$ o $c_{Mp} = f(T)$. Si admitimos que durante la transformación el calor específico se mantiene constante, la integración da:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} \qquad [21.29]$$

y

$$S_2 - S_1 = c_{Mp} \ln \frac{T_2}{T_1} \qquad [21.30]$$

EJEMPLO 21.10

Una barra de hielo de 2 kg, que está a la temperatura de −20 ºC, se pone en contacto con el medio ambiente que está a la temperatura de 26 ºC. El hielo se funde completamente y el agua acaba en equilibrio térmico con el medio. Calculemos la variación de entropía que sufre el sistema, la variación de entropía del medio y la del universo.

Solución:

Aunque evidentemente los procesos descritos son irreversibles, calcularemos las variaciones de entropía siguiendo procesos reversibles entre los mismos estados inicial y final.

La variación de entropía del sistema será la suma de las variaciones de entropía del hielo hasta llegar a 0 ºC, más la debida a la fusión del hielo, más la variación de la entropía del agua hasta llegar a la temperatura ambiente:

$$dS_s = \frac{dQ}{T} = \frac{mc_p\,dT}{T} + \frac{mL}{T_m} + \frac{mc\,dT}{T}$$

que integrada da:

$$\Delta S_s = mc_p \ln \frac{273{,}15}{253{,}15} + \frac{mL}{273{,}15} + mc \ln \frac{299{,}15}{273{,}15} = 2 \times 10^3 \times 0{,}5 \times 0{,}07604 +$$

$$+ \frac{2 \times 10^3 \times 80}{273{,}15} + 2 \times 10^3 \times 0{,}09092 = 76{,}04 + 585{,}76 + 181{,}84 = 843{,}64 \text{ cal/K}$$

La variación de entropía del medio, puesto que éste se mantiene a temperatura constante, será:

$$dS_m = \frac{dQ}{T_m} = \frac{-mc_p\,dT - mL - mc\,dT}{T_m}$$

que integrada da:

$$\Delta S_m = -\frac{2 \times 10^3}{299{,}15}[0{,}5(273{,}15 - 253{,}15) + 80 + 26] = -775{,}53 \text{ cal/K}$$

La variación de entropía del universo será la suma de las entropías correspondientes al sistema y al medio ambiente: $\Delta S_u = 68{,}11$ cal/K.

21.17 Variaciones de entropía en un gas perfecto

Para un mol de gas perfecto se verifica $PV = RT$, $dU = \bar{c}^*_{Mv}\,dT$ y $dH = \bar{c}^*_{Mp}\,dT$, lo que llevado a las Ecuaciones [21.19] y [21.20] transforma a éstas, respectivamente, en

$$dS = \bar{c}^*_{Mv}\frac{dT}{T} + R\frac{dV}{V} \qquad [21.31]$$

$$dS = \bar{c}^*_{Mp}\frac{dT}{T} - R\frac{dP}{P} \qquad [21.32]$$

y, al integrar entre los estados 1 y 2, se obtiene:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \bar{c}^*_{Mv}\frac{dT}{T} + R\ln\frac{V_2}{V_1} \qquad [21.33]$$

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \bar{c}^*_{Mp}\frac{dT}{T} - R\ln\frac{P_2}{P_1} \qquad [21.34]$$

para poder realizar las integraciones indicadas deben conocerse las funciones que ligan los calores específicos con la temperatura, $\bar{c}^*_{Mv} = f(T)$ y $\bar{c}^*_{Mp} = f(T)$. Admitiendo la constancia de los calores en el intervalo del estado 1 al 2, la integración de las dos últimas expresiones, respectivamente, da:

$$S_2 - S_1 = \bar{c}^*_{Mv}\ln\frac{T_2}{T_1} + R\ln\frac{V_2}{V_1} \qquad [21.35]$$

$$S_2 - S_1 = \bar{c}^*_{Mp}\ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{P_2}{P_1} \qquad [21.36]$$

Una tercera relación puede deducirse sin más que multiplicar la primera por $\bar{c}^*_{Mp}$, la segunda por $\bar{c}^*_{Mv}$, restar, y tener en cuenta la relación de Mayer, resultando:

$$dS = \bar{c}^*_{Mp}\frac{dV}{V} + \bar{c}^*_{Mv}\frac{dP}{P} \qquad [21.37]$$

cuya integración, supuestos constantes los calores específicos entre los estados 1 y 2, da:

$$S_2 - S_1 = \bar{c}^*_{Mp}\ln\frac{V_2}{V_1} + \bar{c}^*_{Mv}\ln\frac{P_2}{P_1} \qquad [21.38]$$

EJEMPLO 21.11

Medio mol de un gas ideal se encuentra a la presión $p_1 = 8$ atm y temperatura $T_1 = 400$ K, y se expansiona de forma adiabática hasta la temperatura $T_2 = 302$ K. Luego, se le somete a un proceso a volumen constante hasta reducir su presión a la atmosférica $P_3 = 1$ atm; a continuación, se le comprime a presión constante hasta reducir su volumen al inicial, $V_4 = V_1$, momento en el cual se le calienta a volumen constante hasta llevar su presión a la inicial.

El gas realiza un ciclo que se ha representado en la Figura 21.28; vamos a determinar las variaciones de entropía que sufre el gas en cada una de las transformaciones y en el conjunto del ciclo.

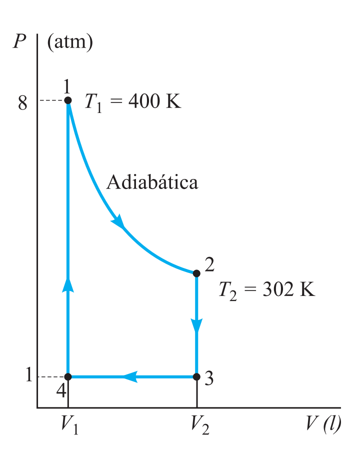


Figura 21.28.

Solución:

En la transformación 1-2, por ser adiabática, es dQ = 0 y dS = 0; la entropía no sufre variación.

Para el cálculo de las variaciones de entropía necesitamos conocer las temperaturas en cada uno de los vértices, lo que podemos calcular de la siguiente forma:

$$P_1V_1 = nRT_1 \quad , \quad V_1 = 0{,}5 \times 0{,}082 \times 400/8 = 2{,}05 \text{ l}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\gamma} \quad , \quad V_2 = 2{,}05\left(\frac{400}{302}\right)^{1/0{,}4} = 4{,}15 \text{ l}$$

$$P_3V_3 = nRT_3 \quad , \quad T_3 = 4{,}14/0{,}5 \times 0{,}082 = 100{,}98 \text{ K}$$

$$P_4V_4 = nRT_4 \quad , \quad T_4 = 2{,}05/0{,}5 \times 0{,}082 = 50 \text{ K}$$

La variación de entropía en el proceso 2-3, a volumen constante, será:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{nc_v\,dT}{T} \quad , \quad S_3 - S_2 = nc_v \ln\frac{T_3}{T_2} = 0{,}5 \times 5 \times \ln\frac{100{,}98}{302} = -2{,}739 \text{ cal/K}$$

La variación de entropía en la transformación 3-4, por ser a presión constante, será:

$$S_4 - S_3 = nc_p \ln\frac{T_4}{T_3} = 0{,}5 \times 7 \times \ln\frac{50}{100{,}98} = -2{,}460 \text{ cal/K}$$

Análogamente, la variación de entropía en el proceso 4-1 será:

$$S_1 - S_4 = nc_v \ln\frac{T_1}{T_4} = 0{,}5 \times 5 \times \ln\frac{400}{50} = 5{,}199 \text{ cal/K}$$

La variación de entropía del gas cuando ha realizado un ciclo completo debe ser nula, por ser la entropía función de estado:

$$\Delta S = -2{,}739 - 2{,}460 + 5{,}199 = 0$$

EJEMPLO 21.12

Dos moles de un gas ideal, inicialmente a la temperatura de 273 K y presión de 2 atm, sufren un proceso reversible durante el cual la relación P/V se mantiene constante, hasta alcanzar la presión final de 4 atm (Figura 21.29). Calculemos la variación de entropía que ha sufrido el gas en esa transformación.

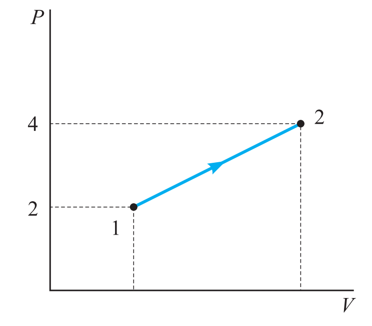


Figura 21.29.

Solución:

Para el cálculo aplicaremos la Ecuación [21.36], siendo necesario calcular previamente la temperatura del estado final.

El volumen inicial es:

$$P_1V_1 = nRT_1 \quad , \quad V_1 = 2 \times 0{,}082 \times 273/2 = 22{,}386 \text{ l}$$

El volumen final se obtiene de la relación:

$$\frac{P_1}{V_1} = \frac{P_2}{V_2} \quad , \quad V_2 = 2 \cdot V_1 = 44{,}772 \text{ l}$$

La temperatura en el estado 2 será:

$$T_2 = \frac{4 \times 44{,}772}{2 \times 0{,}082} = 1\,092 \text{ K}$$

Con todo ello, la [21.36] se expresa:

$$\Delta S = 2 \times 5 \times \ln \frac{1\,092}{273} - 2 \times 2 \times \ln \frac{4}{2} = 11{,}09 \text{ cal/K}$$

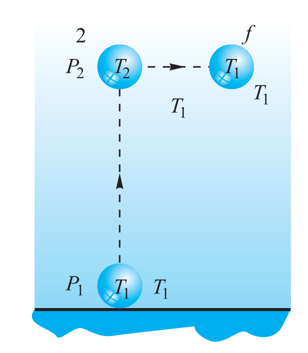
EJEMPLO 21.13

Una burbuja, que contiene n moles de aire, se encuentra en el fondo del mar a la presión P_1 y temperatura T_1. La burbuja asciende hasta una altura tal que la presión es P_2, y allí queda estacionada (Figura 21.30). Considerando que este proceso es reversible, que se realiza sin intercambio de calor y que el aire se comporta como gas ideal de calor específico molar a presión constante c_p, calculemos:

1.º El volumen de la burbuja en el estado inicial, estado 1.
2.º El volumen y la temperatura en el estado 2.
3.º La variación de energía interna del aire de la burbuja.

Después de transcurrir un tiempo suficientemente grande con la burbuja estacionada, se llega a un estado final de equilibrio. Determinemos:

4.º La temperatura y el volumen de la burbuja en el estado de equilibrio.
5.º Las variaciones de entropía del aire de la burbuja, del mar y del universo desde el estado 2 al estado final de equilibrio.



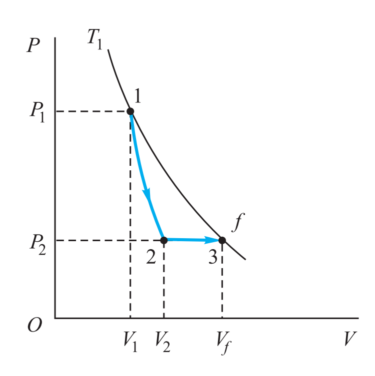


Figura 21.30.

Solución:

1.º El volumen inicial es $V_1 = nR\,\dfrac{T_1}{P_1}$.

2.º El proceso que sufre el aire de la burbuja es adiabático reversible. El volumen en el estado 2 será:

$$V_2 = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1/\gamma} V_1 = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1/\gamma} nR\,\frac{T_1}{P_1}$$

y la temperatura:

$$T_2 = P_2\,\frac{V_2}{nR} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{(1-\gamma)/\gamma} T_1$$

siendo necesario determinar γ en función del dato c_p, cuyo valor es:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_p - R}$$

3.º $\Delta U = nc_v(T_2 - T_1) = n(c_p - R)\left[\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{(1-\gamma)/\gamma} - 1\right]T_1$.

4.º El mar se comporta como un foco térmico y la burbuja en el estado final de equilibrio adquiere la temperatura T_1. El volumen en este estado será:

$$V_2 = nR\,\frac{T_1}{P_2}$$

5.º La variación de entropía del aire de la burbuja desde el estado 2 al estado final de equilibrio es:

$$\Delta S = \int_{T_2}^{T_1} \frac{nc_p\,dT}{T} = nc_p \ln \frac{T_1}{T_2}$$

La variación de entropía del mar, por ser éste un foco térmico a la temperatura T_1 es:

$$\Delta S = -\frac{Q}{T_1} = -\,nc_p\,\frac{(T_1 - T_2)}{T_1}$$

y la variación de entropía del universo es:

$$\Delta S = nc_p \ln \frac{T_1}{T_2} - nc_p\,\frac{(T_1 - T_2)}{T_1}$$

21.18 Variaciones de entropía en algunos procesos irreversibles

Ya vimos cómo la entropía es una función de estado y, en consecuencia, su variación entre dos estados no depende del camino para pasar de uno a otro, únicamente depende de cuáles son éstos. Asimismo, hemos visto cómo la variación de entropía siempre debe calcularse a lo largo de un camino reversible que una los estados inicial y final, ya que, de lo contrario, se obtendrá una cantidad menor que la variación real de entropía. Veamos su cálculo en algunos procesos irreversibles concretos:

a) *Flujo de calor de un foco térmico a un cuerpo.*

Consideremos un cuerpo de masa m, temperatura T_1 y calor específico c, que se pone en contacto con un foco térmico de temperatura $T_2 > T_1$. El cuerpo se calentará tomando calor de foco hasta que su temperatura llegue a ser también T_2. El proceso es, evidentemente, irreversible.

La cantidad de calor tomado del foco, para incrementar la temperatura del cuerpo en dT, es:

$$dQ = mc\,dT$$

En un proceso reversible que una los estados inicial y final, la variación de entropía es:

$$S_2 - S_1 = \int \frac{dQ}{T} = m\int_{T_1}^{T_2} c\,\frac{dT}{T}$$

admitiendo que c es constante entre T_1 y T_2, resulta:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = mc \ln \frac{T_2}{T_1}$$

La variación de entropía del foco es:

$$\Delta S' = S_2' - S_1' = -\int \frac{dQ}{T_2} = -\frac{m}{T_2}\int_{T_1}^{T_2} c\,dT = mc\,\frac{T_1 - T_2}{T_2}$$

La variación de entropía del universo es:

$$\Delta S_u = \Delta S + \Delta S' = mc\left(\ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{T_1}{T_2} - 1\right)$$

cantidad que siempre es mayor que cero, salvo cuando $T_1 = T_2$, en cuyo caso es $dS_u = 0$, ya que no hay intercambio de calor al ser la temperatura del cuerpo igual a la del foco.

b) *Expansión de un gas.*

El gas, encerrado inicialmente en el volumen V_1, se deja expansionar libremente hasta ocupar el volumen total de los dos recipientes, V_2 (Figura 21.31). El sistema está inicialmente en equilibrio térmico con el medio y el estado final es aquél en el cual se ha llegado de nuevo al equilibrio térmico con el medio. Por tanto, las temperaturas inicial y final son las mismas, y la variación de energía interna del gas será nula.

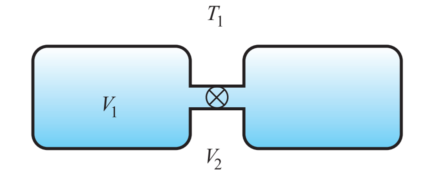


Figura 21.31.

El proceso es, evidentemente, irreversible, y para calcular la variación de entropía del gas, debemos crear un proceso reversible que una los estados inicial y final. Sea éste un proceso isotermo, desde el estado (V_1, T_1) al estado (V_2, T_1). El primer principio, aplicado al proceso, da:

$$dQ = dW = P\,dV = nRT_1\,\frac{dV}{V}$$

y la variación de entropía es:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = nR\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = nR\ln\frac{V_2}{V_1} > 0$$

El sistema formado por los dos recipientes es rígido y no hay intercambio de trabajo con el medio exterior. Puesto que la temperatura inicial y final es la misma, no hay variación de la energía interna y, por tanto, de acuerdo con el primer principio, no hay intercambio neto de calor entre el gas y el medio exterior. En consecuencia, la variación de entropía del medio exterior es nula, $\Delta S' = 0$.

La variación de entropía del universo es:

$$\Delta S_u = \Delta S + \Delta S' = nR\ln\frac{V_2}{V_1} > 0$$

c) *Flujo de calor entre dos focos térmicos a través de un conductor.*

Sean dos focos térmicos de temperaturas T_1 y T_2, $T_1 > T_2$. Determinemos la variación de entropía en el paso irreversible de la cantidad de calor Q, desde el foco 1 al 2, a través de un conductor térmico (Figura 21.32).

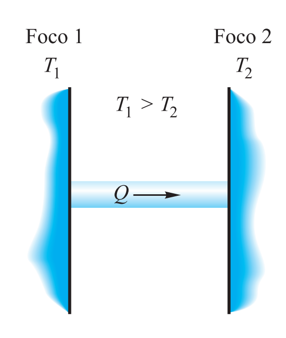


Figura 21.32.

El proceso es irreversible, y para calcular la variación de entropía debemos idear un proceso reversible entre los mismos estados inicial y final, y en el cual se transfiera la cantidad de calor Q del foco 1 al foco 2. Este proceso puede ser el siguiente:

Primera etapa: un gas a temperatura T_1 en contacto con el foco térmico 1, realiza una expansión isoterma hasta absorber la cantidad de calor Q. En este proceso,

la variación de entropía del foco 1 es igual y de signo contrario a la variación de entropía del gas:

$$\Delta S_1 = -\Delta S = -\frac{Q}{T_1}$$

Segunda etapa: el gas se expansionará de forma reversible y adiabática hasta que su temperatura sea T_2. En esta etapa, la variación de entropía es nula.

Tercera etapa: el gas, en contacto térmico con el foco 2, es comprimido isoterma y reversiblemente hasta que cede el calor Q al foco 2. En esta etapa, la variación de entropía del gas es igual y de signo contrario a la variación de entropía del foco 2:

$$\Delta S_2 = -\Delta S = \frac{Q}{T_2}$$

La variación total de entropía del sistema es:

$$\Delta S_1 + \Delta S_2 = Q\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) > 0$$

La variación de entropía del universo es esta misma.

d) *Entropía de una mezcla.*

d.1) *Mezcla de gases ideales:* consideremos un recipiente aislado térmicamente del exterior y dividido en dos compartimentos mediante una lámina. Uno de los compartimentos de volumen V_1 está ocupado por n_1 moles de un gas ideal y el otro, de volumen V_2, por n_2 moles de otro gas ideal (Figura 21.33). Ambos gases están a la misma temperatura. Al retirar la lámina que los separa, los gases se mezclan produciéndose una variación en la entropía de cada uno de los gases y en la del sistema.

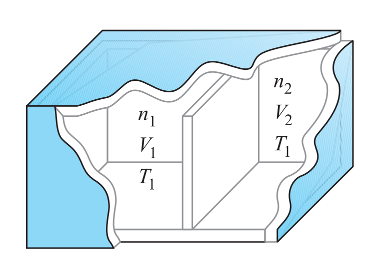


Figura 21.33.

La variación de entropía del gas 1 será:

$$\Delta S_1 = n_1 R \ln \frac{(V_1 + V_2)}{V_1}$$

La variación de entropía del gas 2 será:

$$\Delta S_2 = n_2 R \ln \frac{(V_1 + V_2)}{V_2}$$

La variación de entropía del conjunto será la suma de ambas variaciones de entropía:

$$\Delta S = R\left[n_1 \ln \frac{(V_1 + V_2)}{V_1} + n_2 \ln \frac{(V_1 + V_2)}{V_2}\right]$$

EJEMPLO 21.14

Un recipiente aislado térmicamente del exterior está dividido en dos compartimentos mediante una lámina. El compartimento 1, de volumen 6 l, contiene 3 moles de un gas ideal, y el compartimento 2, de volumen 4 l, contiene 2 moles de otro gas ideal (Figura 21.34). Ambos gases están a la misma temperatura. Retiremos la lámina que los separa y, una vez mezclados, determinemos:

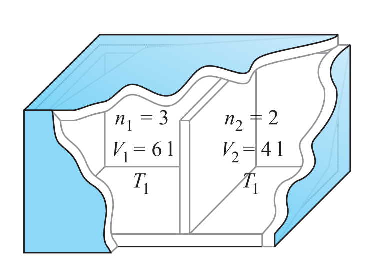


Figura 21.34.

1.º La variación de entropía de cada uno de los gases.

2.º La variación de entropía del conjunto.

Solución:

1.º La variación de entropía del gas 1 es:

$$\Delta S = 3 \times 8{,}314 \times \ln \frac{10}{6} = 12{,}741 \text{ J/K}$$

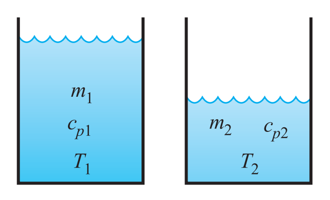
La variación de entropía del gas 2 es:

$$\Delta S = 2 \times 8{,}314 \times \ln \frac{10}{4} = 15{,}236 \text{ J/K}$$

2.º La variación de entropía del conjunto es $\Delta S = 27{,}977$ J/K.

d.2) *Mezcla de dos líquidos.*

Un recipiente contiene m_1 (kg) de un cierto líquido a la temperatura T_1, siendo su calor específico a presión constante, c_{p1} (J/kg · K). Un segundo recipiente contiene m_2 (kg) de otro líquido a la temperatura T_2, cuyo calor específico a presión constante es c_{p2} (J/kg · K) (Figura 21.35). Si mezclamos ambos líquidos en un único recipiente, de forma que no haya disipación de calor, se producirá una variación de entropía en cada uno de los líquidos y en el conjunto. Para su cálculo debemos, primeramente, obtener la temperatura final de la mezcla, lo que se consigue por aplicación de la conservación de la energía, ya que el calor cedido por el líquido más caliente es el recibido por el más frío, es decir:



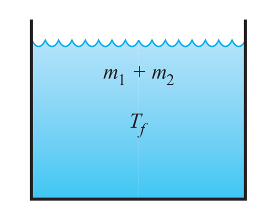


Figura 21.35.

$$m_1 c_{p1} (T_1 - T_f) = m_2 c_{p2} (T_f - T_2)$$

de donde:

$$T_f = \frac{(m_1 c_{p1} T_1 + m_2 c_{p2} T_2)}{(m_1 c_{p1} + m_2 c_{p2})}$$

La variación de entropía del líquido 1 es:

$$\Delta S_1 = \int \frac{dQ}{T} = m_1 c_{p1} \int \frac{dT}{T} = m_1 c_{p1} \ln \frac{T_f}{T_1}$$

La variación de entropía del líquido 2 es:

$$\Delta S_2 = m_2 c_{p2} \ln \frac{T_f}{T_2}$$

La variación de entropía del conjunto es:

$$\Delta S = m_1 c_{p1} \ln \frac{T_f}{T_1} + m_2 c_{p2} \ln \frac{T_f}{T_2}$$

EJEMPLO 21.15

Un recipiente contiene 0,6 kg de agua a la temperatura de 90 ºC. Un segundo recipiente contiene 0,4 kg, también de agua, a la temperatura de 20 ºC. Tomando para el calor específico del agua a presión constante el valor $c_p = 4{,}2$ kJ/kg · K, calculemos:

1.º La temperatura final de la mezcla.
2.º La variación de entropía del agua contenida en cada uno de los recipientes.
3.º La variación de entropía del conjunto.

Solución:

1.º La temperatura final de la mezcla es:

$$T_f = 0{,}6 \times 90 + 0{,}4 \times 20 = 62\,^{\circ}\mathrm{C}$$

2.º La variación de entropía del agua del recipiente 1 es:

$$\Delta S_1 = 0{,}6 \times 4{,}2 \times 10^3 \times \ln \frac{335{,}15}{363{,}15} = -202{,}2 \text{ J/K}$$

La variación de entropía del agua del recipiente 2 es:

$$\Delta S_2 = 0{,}4 \times 4{,}2 \times 10^3 \ln \frac{335{,}15}{293{,}15} = 224{,}94 \text{ J/K}$$

3.º La variación de entropía del conjunto es:

$$\Delta S = 224{,}94 - 202{,}2 = 22{,}74 \text{ J/K}$$

21.19 Energía libre o función de Helmholtz

Definimos la energía libre, F, mediante la expresión:

$$F = U - TS \qquad [21.39]$$

Por tanto, su ecuación de dimensiones corresponde a una energía y la unidad de medida en el S.I. es el julio. Además, la energía libre será una función de estado, por ser combinación lineal de funciones de estado.

Diferenciando la expresión de la energía libre se obtiene:

$$dF = dU - T\,dS - S\,dT$$

y, teniendo en cuenta la Ecuación [21.19], se transforma en:

$$dF = -P\,dV - S\,dT \qquad [21.40]$$

Suponiendo F función de las variables de estado V y T, $F = F(V, T)$, su diferencial debe ser de la forma:

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V dT$$

que, al compararla con la anterior, da:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -P \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S$$

Teniendo en cuenta que es $dS \geqslant \frac{dQ}{T}$ y el primer principio $dW = dQ - dU$, se escribe:

$$dW \leqslant T\,dS - dU \qquad [21.41]$$

Para procesos a temperatura constante, la integración de esta ecuación da:

$$W_{12} \leqslant T(S_2 - S_1) - (U_2 - U_1) \qquad [21.42]$$

o bien:

$$W_{12} \leqslant F_1 - F_2$$

quedando establecido que *el trabajo máximo que puede realizar un sistema en una transformación isoterma es igual a la disminución de la energía libre*.

Si, además de la temperatura, también permanece constante el volumen, al ser por esto el trabajo exterior nulo, la [21.42] se escribe para las transformaciones naturales:

$$F_2 - F_1 < 0$$

es decir, *en todo sistema a temperatura y volumen constantes las transformaciones reales que pueden producirse comportan siempre una disminución de energía libre*. En consecuencia, un sistema a temperatura y volumen constantes estará en equilibrio cuando su energía libre esté en un mínimo, de aquí que, por analogía con la Mecánica, a la energía libre se le denomina *potencial termodinámico isostérico*.

21.20 Entalpía libre o función de Gibbs

Definimos la entalpía libre, G, mediante la expresión:

$$G = H - TS \qquad [21.43]$$

Por tanto, su ecuación de dimensiones corresponde a una energía y su unidad de medida en el S.I. es el julio. Además, la entalpía libre es una función de estado, por ser combinación lineal de funciones de estado.

Diferenciando la expresión de la entalpía libre, se obtiene:

$$dG = dH - T\,dS - S\,dT \qquad [21.44]$$

y, teniendo en cuenta la Ecuación [21.20], se transforma en:

$$dG = V\,dP - S\,dT \qquad [21.45]$$

Suponiendo G función de las variables de estado P y T, $G = G(P, T)$, su diferencial debe ser de la forma:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T dp + \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p dT$$

que, al compararla con la anterior, da:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T = V \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = -S$$

Teniendo en cuenta la desigualdad de Clausius, $dS \geqslant \frac{dQ}{T}$, y el primer principio, $dQ = dH - V\,dP$, se escribe:

$$T\,dS \geqslant dH - V\,dP \quad \text{o bien:} \quad dH - T\,dS \leqslant V\,dP$$

lo que llevado a la [21.44] da:

$$dG \leqslant V\,dP - S\,dT$$

En un proceso a temperatura y presión constantes será:

$$dG \leqslant 0 \quad \text{o} \quad G_2 - G_1 \leqslant 0$$

es decir: *en todo sistema, a temperatura y presión constantes, las transformaciones reales que pueden producirse comportan siempre una disminución de la entalpía libre*. En consecuencia, un sistema real a temperatura y presión constantes estará en equilibrio cuando su entalpía libre esté en un mínimo, denominándose también a ésta *potencial termodinámico isobárico*.

MÁQUINAS DE VAPOR

Herón de Alejandría, en el siglo I antes de Cristo, describió, en su obra *Neumática*, un dispositivo que ponía de manifiesto la fuerza generada por la expansión del vapor y construyó un aparato llamado *aeolipila*, que usando el vapor generado en un recipiente con agua calentado por acción directa del fuego, hacía girar unos brazos acodados.

En el siglo XIII, Alberto Magno describe un *sufflator* o soplador que, basado en la aeolipila, es capaz de producir fuertes corrientes de vapor. Muy a finales del siglo XV, Leonardo da Vinci diseñó un cañón, que usaba la fuerza expansiva del vapor para lanzar el proyectil, pero su uso no resultaba eficaz.

El primero en obtener energía mecánica del vapor fue el español Jerónimo de Ayanz (1553-1613), que en 1606 patentó la primera máquina que, usando la fuerza del vapor, elevaba agua. Ayanz describe con todo detalle sus máquinas, la forma de construirlas y su funcionamiento; incluso describe sistemas de doble efecto y doble etapa. Ayanz también diseñó un *eyector de vapor*. En éste, la salida del vapor la reducía para conseguir alta velocidad y la rodeaba de un tubo conectado a un recinto. La depresión originada en la tubería al salir el vapor a alta velocidad arrastraba el aire, ventilando el recinto, lo cual era de gran utilidad en la ventilación de minas y bodegas. Ayanz fue a más, pues pensó que por este procedimiento podía extraerse aire fresco y húmedo de un sótano o pozo e introducirlo en una habitación para mejorar el ambiente de la misma. Este sistema lo instaló Ayanz en su vivienda de Valladolid, lo que impresionó gratamente a los doctores Arias y Ferrofino, que encontraron el ambiente fresco, agradable y perfumado, pues Ayanz había colocado la salida de su eyector entre una maceta con flores.

El marqués de Worcester (1601-1667), en 1663, en su libro *A century of de names and scantlings of such inventios*, describe una máquina de vapor similar a la de Ayanz, pero no resulta claro ni el funcionamiento ni la forma de fabricarla.

El ingeniero francés Denis Papin (1647-1714), en su obra *Descripción y empleo de la nueva máquina para elevar agua*, publicada en 1687, describe el funcionamiento de su *máquina neumática*, cuya esencia era un cilindro en la base del cual se colocaba agua, que al ser calentada, la expansión del vapor producido elevaba un pistón que se movía ajustado al cilindro. A continuación se enfriaba el cilindro y el pistón caía a la base de aquél, para repetir la operación.

En 1698, Thomas Savery (1650-1715) patentó una máquina de vapor, similar a la más sencilla de Ayanz, que describe en su libro *The mines's friend*, publicado en 1702. Su intento de aplicación para extraer agua de las minas de Cornualles parece que no fue muy positivo, pues la máquina no aguantó las presiones exigidas. Además el vapor debía enfriarse en el interior del depósito, para lo cual se debía esperar a que se enfriasen las paredes de éste, lo que hacía la operación muy lenta.

En 1705, Thomas Newcome (1663-1729) perfeccionó la máquina de vapor de Savery, de forma que cuando el pistón llegaba al final de su recorrido se abría automáticamente una válvula y a través de ella pasaba al interior del cilindro un chorro de agua fría que condensaba el vapor, cayendo bruscamente la presión y descendiendo el pistón a la base del cilindro; el extremo del pistón estaba unido a una biela que accionaba una bomba. Esta máquina de vapor también se usó para el bombeo de agua. La máquina realizaba 12 revoluciones por minuto, sacaba unos 540 litros de agua de una profundidad de 46 metros y su rendimiento aproximado era de 0,5%. En España se instalaron máquinas de este tipo en los astilleros de El Ferrol y de La Carraca (Cádiz), para el bombeo de agua en los diques.

Parece ser que también fue Denis Papin quien, en 1707, aplicó por primera vez la fuerza de la expansión del vapor a la navegación fluvial.

Un escocés, James Watt (1736-1819), que reparaba equipos, entre ellos la máquina de Newcome, se dio cuenta de que el bajo rendimiento de ésta era debido al enfriamiento del vapor en el propio cilindro y para evitarlo diseñó un dispositivo especial: *el condensador*, que patentó en 1769. Con ello podía mantener caliente el cilindro y aumentar el rendimiento. Otra mejora realizada por Watt fue que el vapor pudiera entrar en el cilindro por ambas bases y empujar al pistón en uno u otro sentido, lo que se denominó *máquina de doble efecto*. Sin embargo, Watt no mejoró el sistema de producción de vapor, que siguió realizando a la presión atmosférica y, en general, mediante combustión de carbón.

La industria comenzó a desarrollarse gracias a las aplicaciones de las máquinas de vapor, siendo la textil la primera que se benefició de ello. En 1764, Hargreaves realizó la primera máquina de hilar mecánica y en 1785 se aplicó la máquina de vapor a los telares mecánicos ideados por Cartwright.

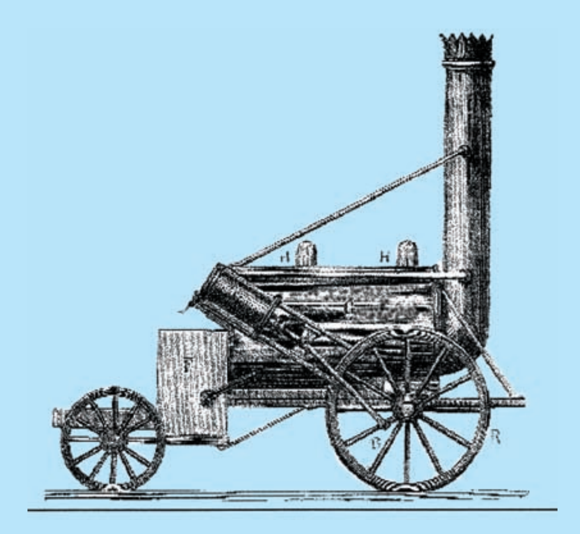
El conocimiento de la máquina de vapor de Watt y su forma de funcionamiento fue extendido por toda Europa merced al ingeniero español Agustín de Betancourt y Molina, nacido en Las Palmas de Gran Canaria, en 1758, y fallecido en San Petesburgo, en 1824, el cual, en 1789 presentó una memoria a la Real Academia de Ciencias de París con el título *Memoria sobre las fuerzas expansivas del vapor de agua*, en la cual hacía una descripción pormenorizada de la citada máquina y su funcionamiento.

El norteamericano Oliver Evans (1755-1819) y el ingles Trevithick (1771-1833) idearon la caldera a presión para generar vapor a presiones superiores a la atmosférica, cuyos orígenes pueden situarse en la marmita de Papin de 1707. En 1802, Evans fabricó, en Filadelfia, la primera máquina de vapor a presión, cuya caldera alcanzó 3,5 bares, consiguiendo reducir considerablemente el tamaño de las máquinas; de hecho, la citada tenía un cilindro de solo 15 mm de diámetro y 46 cm de longitud. El error de Evans fue suprimir el condensador; en su máquina, el vapor, después de haberse expandido era expulsado al exterior. Trevithick, de forma independiente pero completamente análoga, realizó su máquina de vapor a presión alcanzando su caldera los 10 bares. Posteriormente, los ingenieros se dieron cuenta de que era más beneficioso utilizar las calderas a presión y también el condensador de Watt. En España, la primera máquina de vapor a presión se instaló en 1805, en la fábrica de hilados de Jacinto Ramón, realizada por Francisco Sant Ponc (Barcelona 1756-1821).

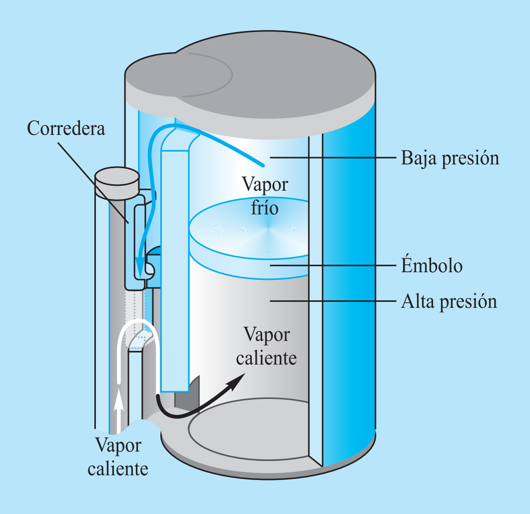
En 1807, el norteamericano Fulton, aplicó la maquina de vapor a presión a un barco con una rueda de paletas, lo que llamó poderosamente la atención. En España, el primer barco de vapor se construyó en 1817, en Sevilla, y navegó por el Guadalquivir hasta Cádiz a la velocidad de 6 nudos.

La primera locomotora a vapor para ferrocarril fue diseñada por Trevithick, en 1804 y arrastró, a 8 km/h, 5 vagones cargados con mineral de hierro. En 1814, George Stephenson diseñó una nueva locomotora de vapor a presión, la *Blucher*. Posteriormente, en 1829, su hijo Robert (1803-1859) diseñaría la *Rocket*, en la cual las ruedas estaban unidas mediante una biela que las hacía solidarias en la tracción. Esta locomotora fue usada en la primera línea de pasajeros, inaugurada en 1830 entre Liverpool y Manchester, en la que alcanzó la velocidad de 50 km/h. En España la primera línea férrea se inauguró en 1837, en Cuba, entonces provincia insular, y unió Güimes con La Habana. En la península, diversas vicisitudes retrasaron la implantación del ferrocarril, que se inauguró en octubre de 1848, entre Barcelona y Mataró, impulsado por Miguel Biada, industrial de esta última ciudad, que había conocido su utilidad en Cuba. La locomotora utilizada fue un modelo de Robert Stephenson.

Con la aplicación de la máquina de vapor se da comienzo a la llamada Revolución Industrial, que conllevó grandes cambios en la vida del hombre. Tuvo una gran influencia en la producción industrial y en el transporte, lo que facilitó la comunicación y el comercio. Pero quizás la influencia más importante fue el cambio de mentalidad que llevó consigo, pues el hombre comenzó a darse cuenta de que podía crear su propio futuro y comenzó a tener esperanza en un futuro mejor, que podía conseguir con su esfuerzo personal. Los ídolos de la época comenzaron a ser los inventores.



Locomotora Rocket de Stephenson (1829)



Máquina de doble efecto

Sistemas de un solo componente

CAPÍTULO 22

22.1 Introducción

Según ya definimos, llamamos sistema de un solo componente al formado por una sola especie química. El sistema puede ser *homogéneo*, cuando en todos sus puntos la sustancia que lo forma presenta el mismo estado de agregación, o *heterogéneo*, cuando la sustancia presenta más de una de las posibles formas de agregación, a las que denominaremos *fases*. Un sistema homogéneo está formado por una sola fase y un sistema heterogéneo por un conjunto de ellas, pero éste no puede considerarse como un conjunto de sistemas homogéneos cerrados, ya que las superficies que limitan las diferentes fases son permeables a la materia.

Los sistemas materiales se pueden presentar en cuatro formas de agregación o fases: *sólido*, *líquido*, *gas* y *plasma*. En el *sólido*, las moléculas o átomos que lo componen están en posiciones prácticamente fijas y, por ello, tienen forma y volumen propios y fijos. El *líquido* está formado por moléculas o paquetes de moléculas, en contacto unos con otros, adaptándose a la forma del recipiente que los contiene, pero con volumen fijo, el cual puede variar con la temperatura. El *gas* no tiene ni forma ni volumen propio, ocupa todo el espacio disponible y las distancias intermoleculares son unas mil veces el tamaño de ellas. El estado de plasma se presenta cuando los átomos o moléculas pierden parte de sus electrones y forman un conjunto gaseoso de electrones e iones.

Las diferentes sustancias pueden presentarse en los diferentes estados de agregación según las condiciones de presión y temperatura y, en consecuencia, en función de estas variables, pueden presentar muy diferentes propiedades.

Ya definimos el equilibrio físico de un sistema, el cual se verifica cuando todos los parámetros necesarios para su descripción (presión, temperatura, volumen o cantidad de materia) se mantienen constantes en el tiempo. A una pequeña variación de uno de estos parámetros el sistema reaccionará provocando una modificación que se manifestará por su evolución hacia un nuevo estado de equilibrio. A las magnitudes cuyas variaciones pueden provocar la transformación de un sistema sin modificar su constitución las denominamos factores de equilibrio. En un sistema en equilibrio podrá haber un número cualquiera de fases sólidas y líquidas, pero sólo una gaseosa, dada la homogeneidad de la mezcla de gases; sin embargo, un mismo sólido puede dar lugar a fases distintas si se encuentra cristalizado en sistemas diferente, e incluso alguna sustancia en estado líquido puede presentar más de una fase, como el helio líquido, el cual puede estar en fase I o fase II.

Para analizar las propiedades de un sistema constituido por un solo componente o especie química, dado que aquéllas son función de tres variables, procederemos a estudiar cómo varía una de éstas en función de otra, cuando la tercera permanece constante; la representación de estas variaciones se hace mediante los llamados *diagramas temodinámicos*. Por el gran interés que presenta el agua en sus tres fases, la elegimos como ejemplo y, sobre ella, estableceremos los conceptos fundamentales, que serán análogos a los de cualquier otro sistema de un solo componente, indicando las anomalías que pueda presentar el agua con respecto a otras sustancias. Emplearemos, según los casos, los diagramas termodinámicos $P - T$, $P - V$ o $T - V$, según convenga.

22.2 Regla de las fases

Consideremos un sistema formado por F fases en equilibrio y supongamos que está constituido por C componentes, no siendo necesario que aparezcan todos en cada una de las fases.

El estado de cada fase está definido por tres variables, por ejemplo, la temperatura, la presión, y el número de moles o la fracción molar. En cada fase es necesario conocer solamente $C - 1$ fracciones molares, puesto que la restante se obtiene de la ecuación $\Sigma x_i = 1$. Por tanto, en cada fase es necesario conocer $C + 1$ parámetros, que son $C - 1$ fracciones molares, más la presión y la temperatura.

La determinación del estado del sistema exige el conocimiento de $F(C + 1)$ parámetros. Veamos cuantas ecuaciones tenemos para ello. El equilibrio térmico entre las diferentes fases (igualdad de temperatura) nos permite escribir $F - 1$ ecuaciones; el equilibrio mecánico (igualdad de presión) nos da otras $F - 1$ ecuaciones, y la concentración de cada componente en cada fase nos da $C(F - 1)$ ecuaciones. En total, tenemos $(C + 2)(F - 1)$ ecuaciones.

El número de grados de libertad se obtiene restando al número de variables el número de ecuaciones que las ligan, obteniéndose:

$$l = F(C + 1) - (C + 2)(F - 1) = C - F + 2$$

que es la conocida *regla de las fases* de Gibbs: *el número de grados de libertad de un sistema en equilibrio es igual al número de componentes menos el número de fases más dos*.

En un sistema formado por un solo componente ($C = 1$), como en el caso del presente capítulo, el número de incógnitas dependerá del número de fases presentes en el estado. Así, en un estado con una sola fase, el número de incógnitas es de dos; en un estado con dos fases presentes, el número de incógnitas es de una, y en un estado con las tres fases presentes, el número de grados de libertad es cero, por lo cual esta situación sólo se puede dar para valores concretos y únicos de la presión, el volumen y la temperatura del sistema en ese estado.



22.3 Diagrama de fases

El diagrama de los posibles estados de una sustancia en función de las variables presión y temperatura se llama *diagrama de fases*. En la Figura 22.1 se ha representado el diagrama de fases para el agua. La curva que limita las fases líquido y vapor es el lugar de los valores de P y T, para los cuales ambas fases coexisten en equilibrio; esta curva se llama *curva de vaporización* o *de ebullición*. La pendiente de esta curva es positiva para toda sustancia compresible, lo que significa que la temperatura a la cual un líquido hierve aumenta con la presión.

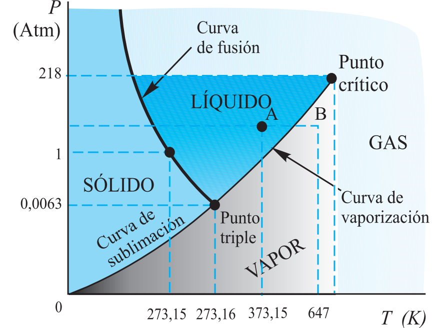


Figura 22.1.

La curva que limita las fases líquido y sólido es la representación de los valores de P y T, para los cuales coexisten en equilibrio ambas fases, y se llama *curva de fusión* o *de congelación*. En el agua esta curva tiene pendiente negativa, lo que constituye una anomalía del agua, ya que ésta aumenta de volumen al congelarse. En general, en las diferentes sustancias, la curva de fusión tiene pendiente positiva, lo que indica que la sustancia se contrae al congelarse y que el punto de congelación aumenta con la presión. Por el contrario, en el agua el punto de congelación disminuye al aumentar la presión. En la Figura 22.2 hemos representado el diagrama de fases para el dióxido de carbono.

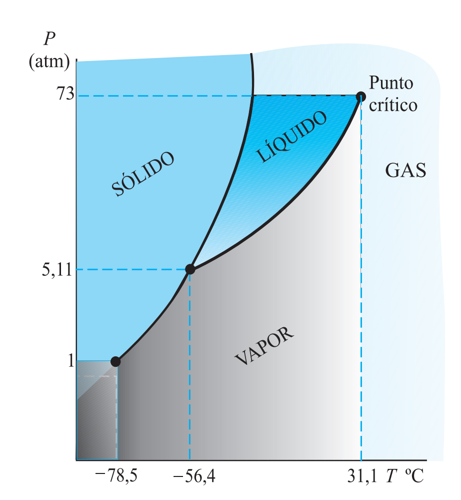
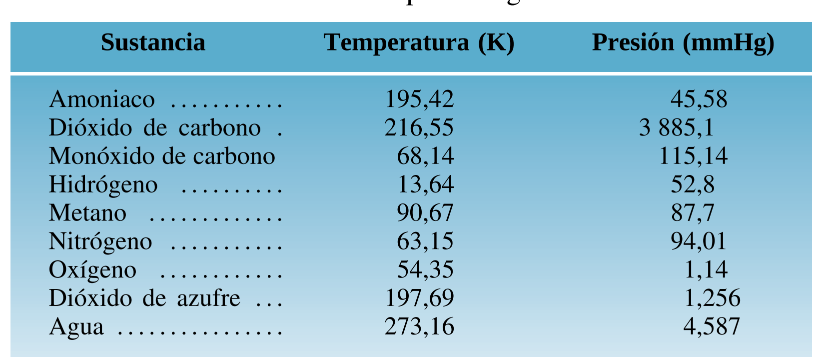


Figura 22.2.

La curva que limita las fases vapor y sólido se llama *curva de sublimación*, y representa los valores de P y T a los cuales el sólido pasa directamente a vapor y viceversa, sin pasar por la fase de líquido. La pendiente de esta curva es siempre positiva para todas las sustancias compresibles. La sublimación tiene importantes aplicaciones, tanto en la alta tecnología, para deposito de capas finas, como en la vida diaria, para la producción de alimentos deshidratados.

En el diagrama de fases hay dos puntos singulares: el *punto triple*, que es donde se cortan las tres citadas curvas, y el *punto crítico*, que es donde acaba la curva de vaporización. El punto triple son los valores de P y T a los cuales pueden coexistir en equilibrio las tres fases; para el agua son $P_t = 6{,}03 \cdot 10^{-3}$ atm y $T = 273{,}16$ K. En la Tabla 22.1 se recogen los valores del punto triple para algunas sustancias.

Tabla 22.1. Punto triple de algunas sustancias.



Sustancia	Temperatura (K)	Presión (mmHg)
Amoniaco	195,42	45,58
Dióxido de carbono .	216,55	3 885,1
Monóxido de carbono	68,14	115,14
Hidrógeno	13,64	52,8
Metano	90,67	87,7
Nitrógeno	63,15	94,01
Oxígeno	54,35	1,14
Dióxido de azufre ...	197,69	1,256
Agua	273,16	4,587

El punto crítico son los valores de P y T, por encima de los cuales el gas y el líquido no pueden distinguirse. Las propiedades diferenciales, como la densidad, compresibilidad y transparencia, se hacen prácticamente iguales por encima de los valores de presión y temperatura correspondientes a los del punto crítico. En la Tabla 22.2 se recogen los valores de P y T para el punto crítico de algunas sustancias.

Tabla 22.2. Punto crítico de algunas sustancias.

Sustancia	P_c (atm)	T_c (K)
Hidrógeno	12,8	33,2
Nitrógeno	33,55	126,2
Monóxido de carbono	34,5	133,0
Aire	37,2	132,4
Propano	42,1	370,0
Metano	45,8	190,7
Oxígeno	9,77	154,6
Dióxido de carbono	72,9	304,2
Amoniaco	112,5	405,6
Agua	218,3	647,3

22.4 Curva de saturación

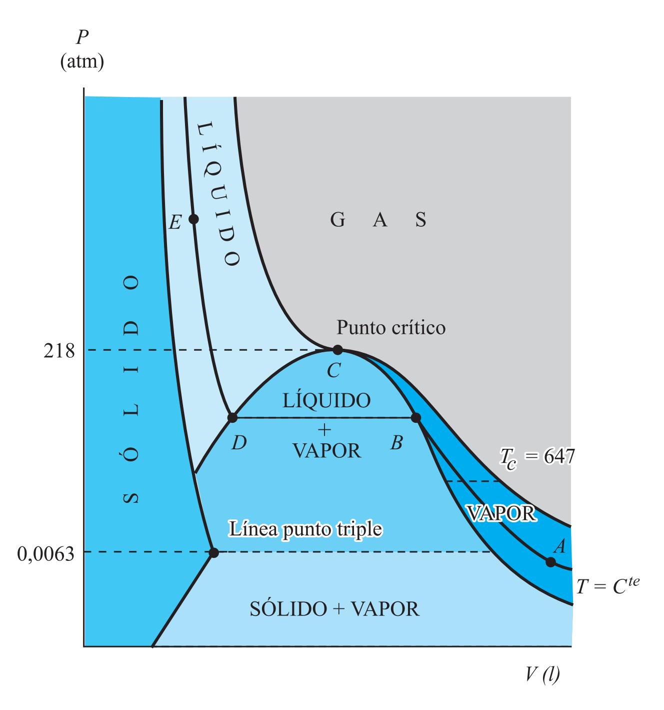


Figura 22.3.

Consideremos un vapor cuyo estado queda representado en el diagrama $P - V$ de la Figura 22.3 por el punto *A*. Al ir comprimiéndole de forma isoterma y muy lentamente, su presión irá aumentando y su volumen disminuyendo. Así, llegaremos a un punto, como el *B*, a partir del cual comienza a aparecer la fase líquido. En este punto *B* se dice que el vapor está saturado.

Durante el tiempo que dura la licuación, se realiza la transformación *BD*, permaneciendo constantes la temperatura y la presión. A este valor de la presión se le denomina *presión de vapor* o *presión de saturación* y es la máxima presión que puede soportar el vapor sin comenzar a licuarse, siendo variable con la temperatura.

En el punto *D* ya no existe vapor, todo él se ha licuado y únicamente hay liquido saturado, a partir de ahora se necesitarán grandes aumentos en la presión para reducir muy poco el volumen, de aquí la gran pendiente de la línea *DE*.

A diferentes temperaturas se obtienen curvas isotermas análogas a la *ABDE*, disminuyendo el tramo *BD*, vaporización-licuefacción, a medida que aumenta la temperatura, y llegando a un valor de ésta denominada *temperatura crítica*, para la cual el citado tramo queda reducido a un solo punto, que es el *punto crítico*. La isoterma correspondiente a la temperatura crítica se llama *isoterma crítica*.

El lugar geométrico de los puntos *D* es la llamada *curva de saturación del líquido* y el lugar geométrico de los puntos *B* es la *curva de saturación de vapor* o *de rocío*, denominándose simplemente *curva de saturación* a la curva *BCD*.

La región comprendida entre la isoterma crítica, la curva de saturación del líquido y la de fusión representa la fase líquido. La región comprendida entre la isoterma crítica y la curva de saturación del vapor se denomina región de *vapor sobrecalentado*, pues en ella la temperatura es superior a la correspondiente de saturación de vapor, a la presión a la que se encuentre. La región líquido más vapor se dice que es de *líquido subenfriado*, pues en ella la temperatura es inferior a la correspondiente de saturación, a la misma presión a la que se encuentre. En ambas regiones es necesario conocer dos variables para determinar la tercera y fijar el estado del sistema; éste tiene dos grados de libertad.

En el interior de la curva de saturación el sistema representado es bifásico, coexistiendo en equilibrio la fase líquido y la fase vapor. Para una temperatura dada, las líneas como la *DB* representan todos los estados en los cuales el equilibrio es posible, evidenciándose que tanto la presión como la temperatura son independientes del volumen y que la presión es únicamente función de la temperatura.

22.5 Calores latentes de fusión y vaporización

Para su estudio emplearemos el diagrama $T - V$. Consideremos una masa de hielo que está a la presión atmosférica y temperatura inferior a su punto de congelación; estado A en la Figura 22.4. Manteniendo la presión constante, suministrémosle calor. El hielo se dilatará y aumentará su temperatura hasta los 273,15 K, temperatura a la que comienza a fundirse y que permanecerá constante durante todo el proceso de fusión. Si seguimos calentando, la temperatura del sistema no aumentará mientras quede hielo por fundir, ya que el calor suministrado se utilizará para realizar la fusión, denominándose *calor latente de fusión* a la cantidad de calor necesa-

ria para fundir una masa unidad a la temperatura de fusión, manteniendo la presión constante.

Durante la fusión del hielo, se produce una anómala contracción de volumen específico, que se sigue realizando hasta que la temperatura llega a los 4 ºC, a partir de la cual el calentamiento produce una dilatación del agua líquida, a la vez que va elevando su temperatura hasta alcanzar el punto de ebullición (373,15 K), en el cual el agua se vaporiza, manteniendo la temperatura constante hasta que toda ella ha pasado a fase de vapor; durante este proceso el volumen del sistema aumenta de forma considerable. La cantidad de calor necesaria para vaporizar la unidad de masa del líquido a la temperatura de vaporización se denomina *calor latente de vaporización*. Cuando el sistema se encuentra en fase de vapor, su volumen aumenta con la temperatura. En la Tabla 22.3 se recogen los calores latentes, y los puntos de fusión y ebullición a 1 atmósfera, para diversas sustancias.

Tabla 22.3. Calores latentes y puntos de fusión y ebullición a 1 atmósfera.

Sustancia	Punto fusión ºC	Punto ebullición ºC	Calores latentes	
			Fusión 10^3 J/kg	Vaporización 10^3 J/kg
Hidrógeno	−259,3	−252,9	58,6	452
Nitrógeno	−210,0	−195,8	25,5	201
Oxígeno	−218,8	−183,0	13,8	213
Alcohol Etílico ...	−114,0	78,0	104,2	854
Amoniaco	−77,8	−33,4	33,0	137
Agua	0,0	100,0	334,0	2 256
Plata	960,8	2193,0	88,3	2336
Oro	1 063,0	2 660,0	64,5	1 578
Tungsteno	3 410,0	5 900,0	184,0	4 800

El proceso descrito se representa en el diagrama $T - V$ de la Figura 22.4 por una línea isóbara de presión 1 atm. Al ir disminuyendo la presión, las isóbaras representativas del proceso van teniendo sus rectas de fusión y vaporización cada vez más próximas, hasta llegar a la de 0,00603 atm, en la cual se superponen, sucediendo esto a la temperatura de 273,16 K. Únicamente en las condiciones de presión y temperatura indicadas pueden coexistir en equilibrio termodinámico las tres fases: hielo, agua y vapor de ésta, que es el punto triple.

Si disminuimos la presión por debajo de la correspondiente al punto triple, el hielo se funde pasando directamente a vapor, es decir, ha realizado un proceso de sublimación.

Al ir aumentando la presión por encima de la normal, las isóbaras representativas del proceso conservan su tramo recto al comienzo de la fusión, pero van disminuyendo el correspondiente a la vaporización, que se reduce a un punto cuando la presión llega al valor de 218,3 atm, correspondiente al *punto crítico*, cuya temperatura, según ya hemos indicado, es de 647,3 K.

Las sustancias normales no presentan la anómala contracción de volumen que sufre el agua en la fusión, comportándose en todo lo demás de forma análoga. Esta anomalía de dilatarse en la solidificación la presentan también el antimonio, el bismuto y algunos otros materiales. En la Figura 22.5 se representa esta anomalía mediante el tramo 2-3, frente a la evolución de una sustancia normal, tramo 2′-3′.

La temperatura de vaporización aumenta con la presión desde la línea del punto triple hasta la línea del punto crítico. La temperatura de fusión disminuye al aumentar la presión en el caso de las sustancias anómalas, pero aumenta en las normales, lo que se observa claramente en el diagrama $P - T$.

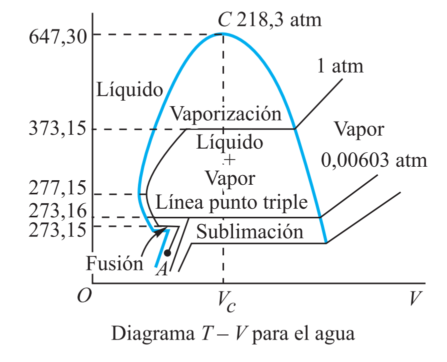


Figura 22.4.

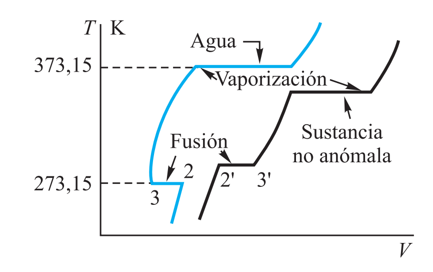


Figura 22.5.

22.6 Curvas de vaporización, fusión y sublimación

La presión de vaporización de un cuerpo puro es función de la temperatura $P = P(T)$ y su representación en unos ejes $P - T$ constituye la *curva de vaporización*. Ésta vendrá limitada por los puntos triple y crítico. Por debajo del primero se produce la sublimación, y por encima del crítico no pueden distinguirse las fases vapor y líquido.

Los puntos de la curva de vaporización son los únicos para los cuales pueden coexistir los estados vapor saturado y líquido. El estado del sistema líquido-vapor saturado corresponde a un punto A de la curva de vaporización. Si a partir de un tal estado se comprime al sistema de forma isoterma, la fase vapor se licua, ya que a la temperatura T_A solamente existe equilibrio líquido-vapor para la presión P_A y por encima de ésta, según el diagrama $P - V$, pasa al estado líquido. Análogamente, si se expansiona al sistema de forma isoterma, pasará a un estado de vapor no saturado, a una presión inferior a la correspondiente de saturación para la temperatura T_A.

Figura 22.6.

Consideremos un vapor cuyo estado está representado por el punto V, del diagrama $P - T$ de la Figura 22.6, suministrémosle calor hasta una temperatura superior a la crítica, pasando al estado B; ahora, lo comprimimos de forma isoterma hasta una presión superior a la crítica, pasando al estado C; a continuación, enfriémoslo siguiendo un proceso isóbaro hasta la temperatura inicial, pasando al estado D y, finalmente, lo expansionamos de forma isoterma hasta una presión inferior a la crítica, llegando al estado L en fase líquida. De esta forma, hemos pasado al sistema del estado de vapor al de líquido, sin que en el transcurso de las transformaciones se haya producido discontinuidad alguna en el mismo. De aquí que ambos estados, líquido y vapor, puedan ser considerados como dos formas de un solo estado, que llamaremos fluido, y cuya única diferencia es la variación de las propiedades macroscópicas que caracterizan a los fluidos, como la densidad, la viscosidad, el coeficiente de compresibilidad o la absorción de la radiación.

Se han propuesto algunas fórmulas empíricas para la curva de vaporización $P_{vs} = P(T)$; así, para el agua, Duperray propuso la función:

$$P_{vs} = \left(\frac{t}{100}\right)^4 \qquad [22.1]$$

en la que t debe ir en grados centígrados y da P_{vs} en bares. La aplicación de esta función está limitada al rango de temperaturas entre 100 y 200 °C.

En general, la presión de vaporización es función de la temperatura y debe obedecer, según Dupre, a una expresión del tipo:

$$\ln P_{vs} = A - \frac{B}{T} - C \ln T \qquad [22.2]$$

En la actualidad, se utiliza la expresión:

$$\ln P_{vs} = 1{,}3915 - \frac{5800{,}2206}{T} - 0{,}04864\,T + 0{,}41765 \times 10^{-4} T^2 - $$
$$- 0{,}14452 \times 10^{-7} T^3 + 6{,}54597 \ln T \qquad [22.3]$$

que da P_{vs} en pascales cuando se expresa T en K.

El lugar geométrico de los puntos (P, T) en los cuales pueden coexistir los estados líquido y sólido se denomina *curva de fusión*. La influencia de la presión en la temperatura de fusión es muy pequeña y la curva de fusión es prácticamente una recta casi paralela al eje de las presiones. Como ejemplo, citaremos que para

disminuir un grado el punto de fusión del agua es necesario aumentar la presión en 135 atmósferas. La pendiente de la curva de fusión es negativa para el agua y las sustancias anómalas que, como ella, disminuyen su volumen con la fusión. Para las sustancias normales, la fusión va acompañada de dilatación y la pendiente de la curva de fusión es positiva.

Al enfriar un líquido puede sobrepasarse la temperatura de solidificación sin que éste se solidifique; en este estado se dice que el líquido está en *subfusión*. Cualquier vibración o la adición de un cristal de la misma sustancia es suficiente para que el líquido en subfusión se solidifique, denominándose al cristal añadido *germen de cristalización*. Éste es el proceso seguido en la formación del granizo: las nubes que contienen agua subfundida se ponen en contacto con nubes formadas por pequeños cristalitos de hielo, éstos hacen de germen de cristalización, produciéndose el granizo.

El proceso de solidificación lleva consigo un desprendimiento de calor que eleva la temperatura del líquido subfundido y, si hay suficiente cantidad de éste, se alcanza la temperatura del punto de fusión. Al seguir enfriando un líquido en subfusión, su viscosidad va aumentando, pudiendo llegar a adquirir una consistencia igual a la del estado sólido sin dejar de pertenecer al estado líquido.

Las curvas de vaporización y de fusión se cortan en el denominado punto triple, según ya hemos visto, cuyas condiciones (P, V, T) son las únicas en las cuales pueden coexistir las tres fases, sólido, líquido y gas, de una sustancia pura. Para presiones inferiores a la del punto triple, no puede existir el estado líquido, pasándose directamente del estado sólido al vapor fenómeno que, según ya hemos indicado, se denomina sublimación. El lugar geométrico de los valores (P,T) para los cuales están en equilibrio el sólido y su vapor, es la curva de sublimación, que se corta en el punto triple con las curvas de vaporización y fusión. En el punto triple el calor de sublimación será la suma de los calores de fusión y vaporización.

Para que la sublimación de una sustancia pueda producirse es necesario y suficiente que la presión y la temperatura sean inferiores a las correspondientes al punto triple de ella. Si a un sólido que esté a una presión inferior a la de su punto triple se le calienta, aumentará su temperatura hasta adquirir la correspondiente a su presión en la curva de sublimación. A partir de entonces, aunque el calentamiento prosiga, la temperatura permanecerá constante hasta que todo el sólido se haya sublimado. El *calor latente de sublimación* será la cantidad de calor absorbida por unidad de masa en el proceso de sublimación, el cual será función de la temperatura a la que se realice el proceso.

Si la presión correspondiente al punto triple de un cuerpo es superior a la presión atmosférica, no podrá aparecer aquél en la naturaleza en estado líquido. Es condición necesaria, para que una sustancia pueda aparecer en la naturaleza en estado liquido, que la presión correspondiente a su punto triple sea inferior a la atmosférica.

En el caso particular del agua, a la curva de fusión se le denomina *curva de hielo*, y a la de sublimación, *curva de escarcha*.

22.7 Ecuación de Clapeyron

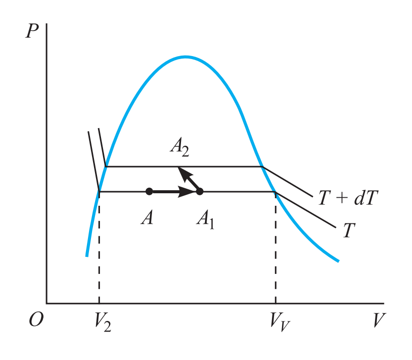


Figura 22.7.

Consideremos un sistema de masa unidad, formado por una masa x de vapor y una masa $1 - x$ de líquido, a la temperatura T y presión $P_v(T)$. Su punto representativo en el diagrama $P - V$ será uno tal como el A (Figura 22.7). Sometamos el sistema a la transformación AA_1A_2, pasando del estado $A(x, T)$ al $A_1(x + dx, T)$ y, de éste, al $A_2(x + dx, T + dT)$. Llamando L al calor latente de vaporización; c_1 al calor específico del líquido saturado, definido como la cantidad de calor necesaria para

hacer pasar unidad de líquido saturado de la temperatura T a la $T + dT$ sobre la curva de saturación; y c_v al calor específico del vapor saturado, definido análogamente al anterior, podemos expresar el calor consumido por el sistema en la citada transformación de la forma:

$$dQ = L\,dx + [c_v x + c_1(1 - x)]\,dT$$

La variación de entalpía, de acuerdo con el primer principio, es:

$$dH = dQ + V\,dP = L\,dx + [c_1 + (c_v - c_1)\,x]\,dT + V\,dP$$

Puesto que la presión es únicamente función de la temperatura, la fórmula anterior se expresa:

$$dH = L\,dx + \left[c_1 + (c_v - c_1)\,x + V\,\frac{dP}{dT}\right]dT$$

Al ser dH una diferencial exacta, deben ser:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = L \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial H}{\partial T} = c_1 + (c_v - c_1)\,x + V\,\frac{dP}{dT}$$

cuyas derivadas cruzadas deben ser iguales, $\partial^2 H/\partial x \partial T = \partial^2 H/\partial T \partial x$, lo que da:

$$\frac{\partial L}{\partial T} = c_v - c_1 + \frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial P}{\partial T} = c_v - c_1 + (V_v - V_1)\,\frac{\partial P}{\partial T} \qquad [22.4]$$

La variación de entropía en el proceso es:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{L}{T}\,dx + [c_v x + c_1(1 - x)]\,\frac{dT}{T} = \frac{L}{T}\,dx + [c_1 + (c_v - c_1)\,x]\,\frac{dT}{T}$$

Al ser dS una diferencial exacta, deben ser:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{L}{T} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial H}{\partial T} = \frac{[c_1 + (c_v - c_1)\,x]}{T}$$

La igualdad de las derivadas cruzadas nos da:

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{L}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{[c_1 + (c_v - c_1)\,x]}{T}\right\}$$

que es:

$$\frac{\partial L}{\partial T} - \frac{L}{T} = c_v - c_1 \qquad [22.5]$$

Igualando los valores de $\dfrac{\partial L}{\partial T}$ dados por [22.4] y [22.5] se obtiene:

$$L = (V_v - V_1)\;T\,\frac{dP}{dT} \qquad [22.6]$$

que es la conocida ecuación de Clapeyron.

En el paso de líquido a vapor, el volumen específico del vapor es mucho mayor que el correspondiente al líquido, verificandose:

$$V_v - V_1 \cong V_v = R_v\,\frac{T}{P}$$

Con lo cual, la ecuación de Clapeyron se expresa:

$$L = R_v \frac{T^2}{P} \cdot \frac{dP}{dT} \qquad [22.7]$$

Utilizando la ecuación de Dupre [22.2] se obtiene:

$$\frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dT} = BT^{-2} - CT^{-1}$$

y, con ello, el calor latente de vaporización en función de la temperatura se expresa:

$$L = R_v (B - CT)$$

Se han realizado varios ajustes de la Ecuación [22.2] a los valores dados por la Expresión [22.3] y se han determinado diferentes parejas de valores de *B* y *C*. A continuación, exponemos la Tabla 22.4 con los valores de *L* obtenidos experimentalmente a diferentes temperaturas.

Tabla 22.4. Calor latente de vaporización del agua.

Temperatura °C	L kJ/kg	Temperatura °C	L kJ/kg
0	2 500,80		
10	2 519,12	60	2 357,64
20	2 453,48	70	2 332,99
30	2 429,80	80	2 307,93
40	2 405,98	90	2 282,39
50	2 381,94	100	2 256,28

Valores dados por Ashrae Fundamentals.

22.8 Evaporación. Humedad atmosférica

Cuando la vaporización tiene lugar únicamente en la superficie libre del líquido, se denomina *evaporación*. Todo lo establecido para aquélla tiene plena vigencia para ésta.

Si en un recinto cerrado, en unas ciertas condiciones de presión y temperatura representadas en la Figura 22.8 por el punto A_1, colocamos una pequeña cantidad de un cierto líquido, puesto que en esas condiciones éste no puede existir más que en forma de vapor, se evaporará, aumentando la presión del recinto, pasando al estado representado por el punto A_2. Si en esta situación añadimos al recinto más líquido, volverá a evaporarse, puesto que en las condiciones del recinto sólo puede existir en forma de vapor y si la cantidad de líquido añadida es suficiente, se llegará a un estado, representado por el punto A_s, en el cual se habrá alcanzado la presión máxima de vapor correspondiente a la temperatura del recinto y coexistirán en equilibrio el líquido y su vapor. Al evaporarse, el líquido absorbe calor de su entorno, enfriándolo. Los cuerpos muy volátiles, como el cloruro de etilo, producen un enfriamiento tan grande que son utilizados como anestésicos locales.

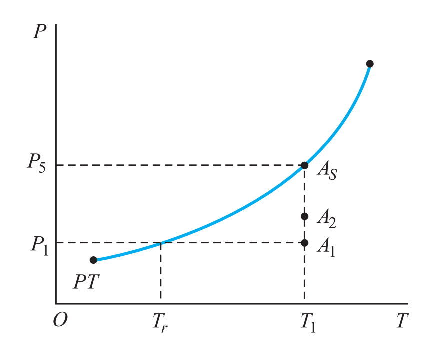


Figura 22.8.

Los procesos de evaporación son fundamentales en la regulación de la temperatura de la atmósfera terrestre y pueden absorber hasta un 75 % de la energía de la radiación solar.

Si la evaporación se produce en un recinto cerrado en el cual hay otros gases, de acuerdo con la ley de Dalton, el líquido se evaporará hasta que su presión

parcial en la mezcla de gases sea igual a su presión máxima de vapor a la temperatura del recinto.

Si la evaporación se produce al aire libre, raramente éste se encontrará saturado y el líquido se evaporará completamente. Experimentalmente se ha estudiado la velocidad de evaporación del agua en la atmósfera, resultando ser directamente proporcional a la superficie libre S y a la diferencia entre la presión de vapor saturante, P_s, y la presión de vapor, P_v, en la atmósfera contigua, siendo inversamente proporcional a la presión atmosférica, P:

$$v_E = KS\frac{P_s - P_v}{P} \qquad [22.8]$$

Si aumenta la temperatura, crece P_s y, para un mismo valor de P_v, aumenta la velocidad de evaporación.

Las variaciones de presión y temperatura que se producen en el vapor de agua existente en la atmósfera son causa de fenómenos atmosféricos como las nubes, la lluvia, el rocío, la escarcha, el granizo, etc. Cuando la presión parcial del vapor de agua en la atmósfera alcanza el valor correspondiente a la presión de saturación, a la temperatura a que se encuentre, se produce la condensación, formandose las nubes. La presión de saturación y, por tanto, la condensación, puede conseguirse bien porque se aumente el contenido de vapor de agua en la atmósfera y con ello su presión parcial hasta conseguir la presión de saturación, bien porque disminuya la temperatura y con ello la presión de saturación de acuerdo con la curva de saturación, hasta igualar a la presión parcial del vapor de agua, o bien porque los dos hechos se produzcan simultáneamente. La temperatura T_r, a la que es necesario descender, manteniendo constante la presión, para que el vapor de agua de una masa de aire se condense, se denomina *punto de rocío*.

Punto de rocío

Al descender la temperatura por debajo de los 0 °C, el agua, para los valores entre los que oscila la presión atmosférica, no puede estar en forma líquida y se solidifica, produciéndose el fenómeno conocido con el nombre de *escarcha*.

Escarcha

Puede admitirse que el vapor de agua en la atmósfera se comporta como un gas perfecto. Por tanto, el aire húmedo es una mezcla de dos gases: uno, el aire seco, y otro, el vapor de agua, a los cuales será de aplicación la ley de Dalton, por lo que la presión P a la temperatura T, en un volumen V, será la suma de las presiones parciales del aire seco P_a y del vapor de agua P_v:

$$P = P_a + P_v \qquad [22.9]$$

Las correspondientes ecuaciones de estado son:

$$P_v V = m_v R_v T \quad \text{y} \quad P_a V = m_a R_a T \qquad [22.10]$$

En la que $R_v = 461{,}52$ J/kg · K y $R_a = 287{,}05$ J/kg · K, habiendo tomado para los pesos moleculares los valores $M_v = 18{,}015$ g/mol y $M_a = 28{,}965$ g/mol.

Humedad específica

Se define la *humedad específica*, q, como la masa de vapor de agua contenida en la unidad de masa de aire húmedo:

$$q = \frac{m_v}{m} = \frac{m_v}{(m_v + m_a)} = \frac{1}{\left(\dfrac{1 + m_a}{m_v}\right)} \qquad [22.11]$$

Utilizando la Expresión [22.10]:

$$\frac{m_a}{m_v} = \frac{P_a R_v}{P_v R_a} = 1{,}6078\,\frac{P_a}{P_v} \qquad [22.12]$$

con lo cual, la humedad específica se expresa:

$$q = \frac{1}{1 + 1{,}6078\,\dfrac{P_a}{P_v}} = \frac{P_v}{P_v + 1{,}6078 P_a} = \frac{P_v}{1{,}6078 P - 0{,}6078 P_v} = \qquad [22.13]$$

$$= 0{,}622\,\frac{P_v}{P - 0{,}378 P_v}$$

Se denomina *grado de humedad* o *relación de mezcla*, r, al cociente entre la masa de vapor contenida en un volumen de aire húmedo y la masa de aire seco de ese mismo volumen:

Grado de humedad

$$r = \frac{m_v}{m_a} \qquad [22.14]$$

Utilizando la Expresión [22.12], resulta:

$$r = 0{,}622\,\frac{P_v}{P_a} = 0{,}622\,\frac{P_v}{(P - P_v)} \qquad [22.15]$$

En general, P_v es despreciable frente a P, ya que no suele sobrepasar los 50 hPa, mientras que P es siempre superior a 1 000 hPa, motivo por el cual en la práctica se suelen confundir q y r.

Se denomina *humedad relativa*, h_r, al cociente entre la presión parcial del vapor de agua y la presión correspondiente a la saturación a la misma temperatura; también puede denominarse *estado higrométrico*:

Humedad relativa

$$h_r = \frac{P_v}{P_{vs}} \qquad [22.16]$$

De su propia definición se desprende que la humedad relativa siempre es menor que la unidad, por lo que usualmente se da en tanto por ciento:

$$h_r = 100\,\frac{P_v}{P_{vs}}$$

En consecuencia, para el aire seco es $h_r = 0$, y para el aire saturado de vapor de agua es $h_r = 100$.

El *grado de saturación* es el cociente entre la masa de vapor y la masa de vapor que puede contener el aire en estado saturado a la misma temperatura:

Grado de saturación

$$\mu = \frac{m_v}{m_{vs}} \qquad [22.17]$$

obviamente, para el aire seco es $\mu = 0$ y para el aire saturado de vapor $\mu = 1$.

También suele usarse el concepto de *déficit de saturación* como la diferencia entre la presión de saturación y la presión existente, siempre a la misma temperatura:

Déficit de saturación

$$\Delta P_1 = P_{vs}(T_1) - P(T_1) \qquad [22.18]$$

La *humedad absoluta* del aire se define como la masa de vapor de agua por unidad de volumen de aire. Su expresión puede obtenerse usando la primera de [22.10]:

Humedad absoluta

$$h_A = \frac{m_v}{V} = \frac{P_v}{R_v T} = \frac{P_v}{461{,}52 T} = 2{,}167 \times 10^{-3}\,\frac{P_v}{T} \qquad [22.19]$$

La humedad absoluta variará desde cero cuando el aire no contenga vapor de agua, hasta el valor correspondiente a la presión de vapor de saturación a la temperatura del aire $0 < h_A < h_{As}$, siendo $h_{As} = 2{,}167 \cdot 10^{-3} \dfrac{P_{vs}}{T}$.

La humedad relativa puede verse como el cociente entre la humedad absoluta y la humedad absoluta en estado saturado, ya que:

$$h_r = \frac{h_A}{h_{As}} = \frac{P_v}{P_{vs}}$$

22.9 Psicrómetro

El psicrómetro es un instrumento usado para medir la humedad relativa del aire. Está formado por dos termómetros: uno, llamado termómetro seco, que mide la temperatura del aire, y otro, llamado termómetro húmedo, pues su bulbo está envuelto en una muselina empapada en agua, que absorbe por capilaridad desde un depósito. La evaporación del agua de la muselina consume calor y hace descender la temperatura, por lo cual la temperatura del termómetro húmedo es siempre inferior a la del seco.

Consideremos que el aire ambiente a la temperatura del termómetro seco, T_s, contiene una cantidad de vapor m_v. En la muselina el aire se saturará y se evaporará la cantidad $m_{vs} - m_v$, para lo cual necesita utilizar el calor $Q = L(m_{vs} - m_v)$.

Esta cantidad de calor hace descender la temperatura del termómetro húmedo hasta T_h, debiendo verificarse:

$$Q = (m_a c_{pa} + m_v c_{pv})(T_s - T_h) = L(m_{vs} - m_v)$$

Siendo c_{pa} y c_{pv} los calores específicos a presión constante del aire seco y del vapor de agua, respectivamente: $c_{pa} = 1\,005$ J/kg · K y $c_{pv} = 1\,846$ J/kg · K.

Dividiendo la expresión anterior por m_a:

$$\left(c_{pa} + \frac{m_v}{m_a} c_{pv}\right)(T_s - T_h) = L\left(\frac{m_{vs}}{m_a} - \frac{m_v}{m_a}\right)$$

y, en función del grado de humedad, se escribe:

$$(c_{pa} + r c_{pv})(T_s - T_h) = L(r_s - r)$$

expresión de la que podemos despejar r:

$$r\,[c_{pv}(T_s - T_h) + L] = L\,r_s - c_{pa}(T_s - T_h)$$

Puesto que L es mucho mayor que c_{pv}, podemos escribir con error despreciable:

$$r = r_s - c_{pa}\frac{(T_s - T_h)}{L}$$

Sustituyendo en ésta los valores de r dados por la [22.15]:

$$\frac{0{,}622 P_v}{(P - P_v)} = \frac{0{,}622 P_{vs}}{(P - P_{vs})} - c_{pa}\frac{(T_s - T_h)}{L}$$

Haciendo la aproximación $P - P_v = P - P_{vs} = P$, obtenemos:

$$P_v = P_{vs} - \gamma(T_s - T_h) \qquad [22.20]$$

siendo $\gamma = \dfrac{P \cdot c_{pa}}{0{,}622 \cdot L}$, el *coeficiente psicrométrico*, cuyo valor será función de T por serlo L y c_{pa}, pero que dentro de las temperaturas ambiente normales puede considerarse constante, $\gamma = 66{,}7$ Pa/K.

Coeficiente psicrométrico.

La humedad relativa se expresa dividiendo la [22.20] entre P_{vs} y multiplicando por 100, si se quiere dar en tanto por ciento:

$$h_r = 100\left[1 - \gamma\,\frac{(T_s - T_h)}{P_{vs}}\right] \qquad [22.21]$$

EJEMPLO 22.1

Las temperaturas que marcan los termómetros seco y húmedo son, respectivamente, $T_s = 30\,^{\circ}\mathrm{C}$ y $T_h = 20\,^{\circ}\mathrm{C}$. Determinemos la humedad relativa del aire.

Solución:

La presión de vapor de saturación puede obtenerse de la Expresión [22.3], $P_{vs} = 4246{,}5\ Pa$, y la humedad relativa de la Expresión [22.21]

$$h_r = 100\left[1 - 66{,}7 \cdot \frac{10}{4246{,}5}\right] = 84{,}29\,\%$$

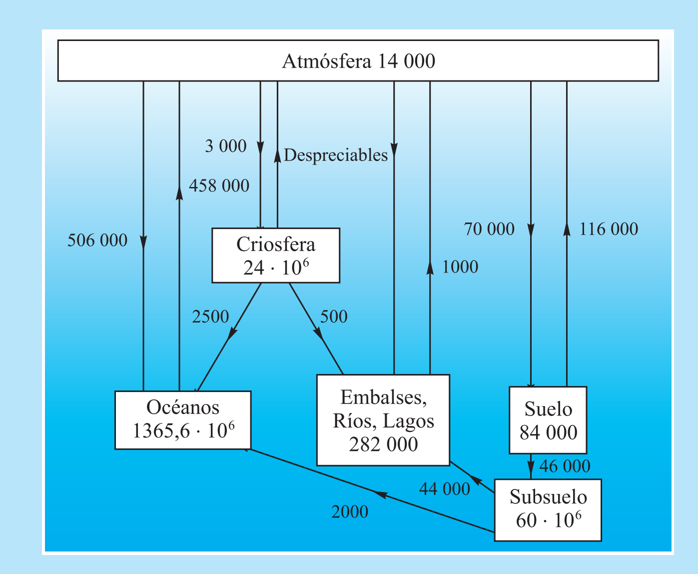


EL CICLO HIDROLÓGICO

Al ciclo realizado por el agua, en sus diferentes estados, dentro de la naturaleza, se le denomina *ciclo hidrológico*. El agua en la naturaleza se presenta en sus tres posibles estados: en forma líquida, constituyendo la *hidrosfera*, que está formada por océanos, mares, lagos y ríos; en forma sólida o *criosfera*, formada por las zonas polares ártica y antártida y por las zonas de nieves perpetuas, y en forma de vapor de agua en la atmósfera.

La hidrosfera ocupa aproximadamente el 71% de la superficie terrestre y el vapor de agua que puede enviar a la atmósfera se estima en $4{,}25 \times 10^5$ Gigatones/año. La criosfera ocupa aproximadamente el 5,7% de la superficie terrestre, presentando una fuerte variación estacional, tanto en las zonas polares como en la de nieves perpetuas, pasando por un mínimo en septiembre y alcanzando su máximo en marzo.

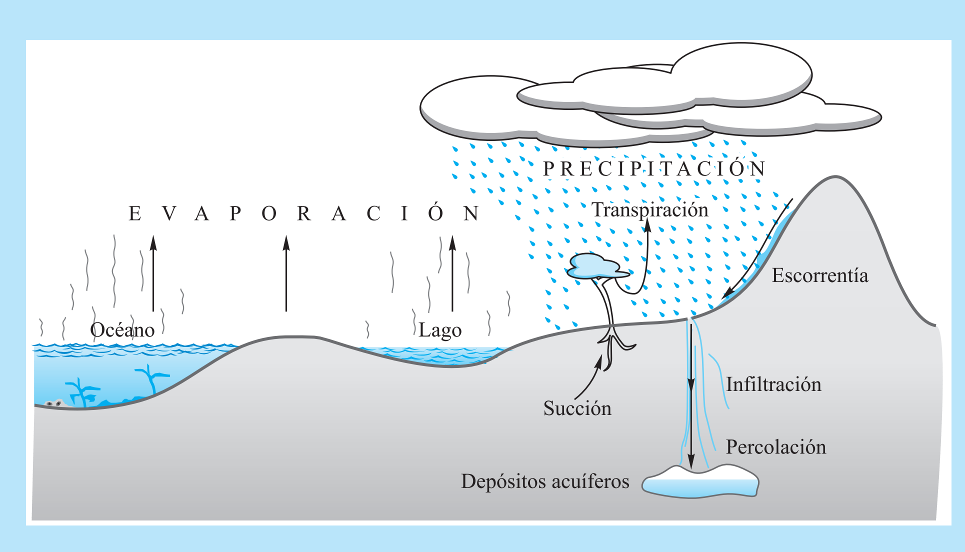
La atmósfera adquiere su vapor de agua por evaporación desde la hidrosfera y también por *evapotranspiración* desde el suelo y su cubierta vegetal. El paso de vapor de agua desde el suelo a la atmósfera está facilitado por la estructura alveolar de aquél, por lo que presenta una gran superficie de evaporación, y también por su capilaridad, que hace subir agua de zonas más profundas a la superficie. Además las plantas transpiran, enviando a la atmósfera gran cantidad de agua que extraen del suelo mediante sus raíces y emiten por sus estomas. Al mecanismo conjunto de evaporación desde el suelo y transpiración por las plantas se denomina *evapotranspiración*. Se estima que la atmósfera renueva su vapor de agua cada diez días.



El proceso contrario a la evaporación es la *precipitación*; el vapor de agua de la atmósfera se condensa y cae formando la lluvia. Las corrientes de aire pueden llevar el vapor de agua a grandes distancias y llover en puntos muy alejados de la zona de evaporación. El agua de lluvia puede seguir tres caminos: infiltrarse en el suelo y formar depósitos en el subsuelo; moverse por la superficie dando lugar a *escorrentías*, que a su vez pueden acabar en depósitos superficiales(lagos) o encontrando un cauce(rios) que la devuelven al mar.

La totalidad del agua almacenada en la hidrosfera se estima en 1 450 millones de km^3, de los cuales sólo 84,38 millones son de agua dulce. De estos, puede estimarse que 60 millones están en el subsuelo, 24 en la criosfera, 0,28 millones en lagos y embalses, 84 000 km^3 en la humedad del suelo, 14 000 km^3 en vapor de agua de la atmósfera y 2 000 km^3 en rios.

En el siguiente esquema se establece un balance aproximado de depósitos y flujos anuales de agua en la naturaleza, expresados ambos en km^3.



Teoría cinética de los gases

CAPÍTULO 23

23.1 Introducción

La teoría cinética de los gases establece que las moléculas de éstos se encuentran en continuo movimiento, modificándose constantemente su velocidad por choques entre ellas y con las paredes del recipiente continente. La primera hipótesis en tal sentido se debe a Bernoulli y apareció en 1783 en su libro *Hydrodynamics*, en el que deducía, a partir de ella, la ley de Boyle. En 1827, Robert Brown comprobó experimentalmente los citados movimientos al descubrir en los líquidos el que se llamó *movimiento browniano*, observado por De Broglie en los gases, en 1908. El desarrollo de la teoría cinética de los gases tuvo lugar en la segunda mitad del siglo XIX y fue debido, principalmente, a los trabajos de Maxwell, Clausius y Boltzmann.

El movimiento de cada una de las moléculas del sistema, además de contribuir con sus distintos tipos de energía, a los que ya hicimos referencia, al mantenimiento de una cierta energía interna del mismo, es causa de algunos efectos observables del sistema, como la presión que el gas ejerce o la conducción de calor que se produce a través de la superficie de contacto de dos cuerpos a distinta temperatura, debido al intercambio de energía al chocar las moléculas de un cuerpo con las del otro.

El problema planteado es determinar las propiedades macroscópicas del sistema en función de las características de su movimiento molecular. La Mecánica clásica nos permite describir el movimiento de las moléculas del gas, pero no es posible materialmente describir el de todas y cada una de ellas; es necesario acudir a métodos estadísticos para relacionar el comportamiento observable del sistema con las características de su movimiento molecular. La ciencia que para tal fin conjuga los métodos estadísticos con los de la Mecánica clásica constituye la Mecánica estadística.

La teoría cuántica de Planck, emitida en 1901, la Mecánica cuántica y las estadísticas de Bose-Einstein y Fermi-Dirac han ido desarrollando las primitivas hipótesis aportando bagaje teórico que permite establecer las propiedades de un sistema en función de las características de las partículas (moléculas, átomos o partículas atómicas) que lo componen.

23.2 Modelo cinético del gas perfecto

Las hipótesis fundamentales, que configuran el modelo cinético de gas perfecto y que permiten relacionar sus propiedades macroscópicas con las características de su movimiento molecular, son las siguientes:

1. Una sustancia pura en estado gaseoso está formada por un gran número de partículas idénticas, denominadas moléculas. En condiciones normales, un centímetro cúbico contiene $2{,}69 \times 10^{19}$ moléculas.

2. El volumen ocupado por las moléculas es muy pequeño comparado con el ocupado por el gas. La distancia que separa a las moléculas del gas es muy grande comparado con su tamaño, por tanto, a escala molecular, el gas no es homogéneo ni continuo.

3. Las moléculas no se ejercen entre sí acción alguna más que en el tiempo que dura su choque, durante el cual actúan fuerzas repulsivas.

4. El tiempo que dura una colisión es despreciable frente al tiempo que transcurre entre dos colisiones subsiguientes de una misma molécula. Éste es del orden de 10^{-10} segundos.

5. Los choques se suponen perfectamente elásticos y se admite la validez de las leyes de la Mecánica clásica a escala microscópica.

6. El número de moléculas por unidad de volumen permanece constante a pesar del continuo movimiento de aquéllas.

7. Son igualmente probables todas las velocidades moleculares posibles.

8. Entre dos choques, una molécula está animada de movimiento rectilíneo y uniforme.

En este gas perfecto, cinéticamente definido por las hipótesis anteriores, pueden estadísticamente determinarse los valores medios de las magnitudes mecánicas de sus moléculas y la relación de éstos con las propiedades macroscópicas de aquél.

En un mol de gas hay aproximadamente 6×10^{23} moléculas que, en condiciones normales de presión y temperatura, ocupan un volumen aproximado de $22{,}4 \times 10^{-3}$ m^3. Suponiendo las moléculas esféricas de radio $r = 10^{-10}$ m (Figura 23.1), el volumen de cada una de ellas es $V_1 = \frac{4}{3}\pi 10^{-30}$, que multiplicado por el número de moléculas, nos da el volumen realmente ocupado por éstas:

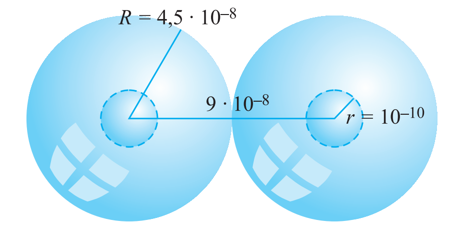


Figura 23.1.

$$V = V_1 6 \times 10^{23} = 8\pi 10^{-7} = 25 \times 10^{-7} \text{ m}^3$$

Este volumen es un pequeño porcentaje del volumen total ocupado por el mol:

$$\frac{25 \times 10^{-7}}{22{,}4 \times 10^{-3}} \times 100 \approx 1{,}12 \times 10^{-2}\,\%$$

luego el volumen realmente ocupado por las moléculas del gas es una parte muy pequeña del volumen disponible. Para ocupar el mayor espacio posible del espacio disponible, las moléculas deben estar unas tangente a las otras, para lo cual el radio que deberían tener debe verificar $\frac{4}{3}\pi R^3 \times 6 \times 10^{23} = 22{,}4 \times 10^{-3}$, de donde $R = 4{,}47 \times 10^{-8}$ m. En este caso, la separación media entre moléculas es, aproximadamente, de 9×10^{-8} m , casi 1 000 veces su verdadero radio. Por ello, la situación real del gas cumple con el modelo cinético de gas perfecto.

Valores medios

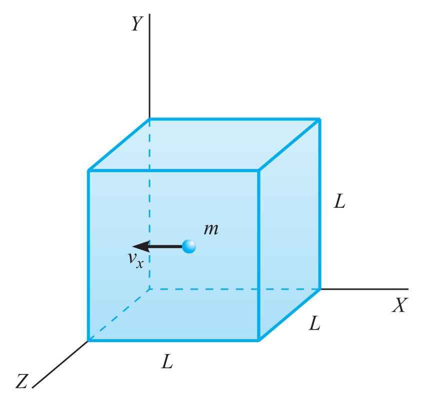


Figura 23.2.

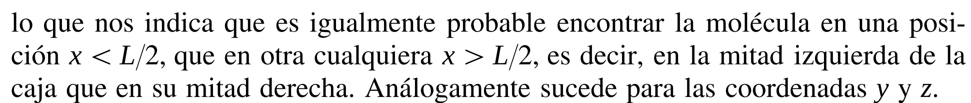
Consideremos un gas perfecto formado por N moléculas, de masa m, ocupando el volumen de un cubo de arista L, volumen $V = L^3$, y paredes perfectamente elásticas, al cual se ha asociado el sistema de referencia que se indica en la Figura 23.2.

El valor medio de la posición de una partícula sobre el eje de las equis es:

$$\langle x \rangle = \frac{\sum x_i}{N}$$

y, puesto que todos los valores de x, entre 0 y L, son igualmente probables, la probabilidad de que una molécula se encuentre en un intervalo dx, es dx/L, y el valor medio de x es:

$$\langle x \rangle = \frac{N \displaystyle\int_0^L x \frac{dx}{L}}{N} = \frac{1}{2} L$$



lo que nos indica que es igualmente probable encontrar la molécula en una posición $x < L/2$, que en otra cualquiera $x > L/2$, es decir, en la mitad izquierda de la caja que en su mitad derecha. Análogamente sucede para las coordenadas y y z.

Al ser el gas isótropo, la velocidad de las moléculas podrá tomar cualquier dirección con la misma probabilidad e igualmente todos los módulos posibles de la velocidad serán igualmente probables y, en consecuencia, el valor medio del vector velocidad será nulo, $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$, lo que obliga a que sean nulos los valores medios de sus componentes: $\langle \mathbf{v}_x \rangle = \langle \mathbf{v}_y \rangle = \langle \mathbf{v}_z > = 0$. No sucede esto con el valor medio del módulo, $\langle v \rangle$, que tendrá un valor concreto siempre positivo, dado por:

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N} \int v\, dn$$

El valor medio del cuadrado del módulo de la velocidad, $\langle v^2 \rangle$, es un valor siempre positivo que tiene gran importancia para poder relacionar el estado microscópico del sistema con sus magnitudes macroscópicas. Su valor es:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\sum v_i^2}{N} = \frac{\sum (v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2)}{N} = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle$$

Como el gas es isótropo, las componentes de la velocidad sobre cada uno de los ejes son igualmente probables y los valores medios de sus cuadrados deben ser iguales:

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle \qquad [23.1]$$

Velocidad eficaz

Se define el *valor cuadrático medio de la velocidad* o *velocidad eficaz* como la raíz cuadrada del valor medio de su cuadrado, es decir:

$$v_{rms} = v_e = \sqrt{\langle v^2 \rangle} \qquad [23.2]$$

23.3 Presión ejercida por un gas perfecto

La presión que ejerce un gas sobre las paredes del recipiente que lo contiene es causada por los impactos de las moléculas del gas sobre dichas paredes, a las

cuales transfieren cantidad de movimiento. Para calcular su valor, debemos obtener la variación de la cantidad de movimiento de las moléculas del gas, en la unidad de tiempo y por unidad de superficie, cuando aquéllas chocan contra éstas. Para ello, vamos a obtener la cantidad de movimiento que transfiere a la pared en su choque una molécula; lo multiplicaremos por los choques que realiza en la unidad de tiempo y por el número de moléculas, dividiéndolo por el área de la pared:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{F}}{A} = \frac{1}{A}\frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Consideremos un choque elástico frontal de una molécula con la pared del recipiente situada en $x = 0$. Antes del choque, la cantidad de movimiento era $\mathbf{p}_1 = -mv_x\mathbf{i}$ y, después del choque, es $\mathbf{p}_2 = mv_x\mathbf{i}$, por tanto, la variación de la cantidad de movimiento ha sido $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = 2mv_x\mathbf{i}$.

El tiempo que tarda esta molécula en volver a colisionar con esta cara es el que tarda en ir a la cara $x = L$, rebotar y volver a $x = 0$, es decir, $2L/v_x$. En consecuencia, el número de colisiones en la unidad de tiempo sobre la cara $x = 0$ será $v_x/2L$ y la cantidad de movimiento transferida a la pared por unidad de tiempo será:

$$2mv_x\frac{v_x}{2L} = \frac{m}{L}v_x^2$$

Sumando para todas las moléculas y dividiendo por el área de la pared, obtenemos la presión:

$$P = \frac{m}{L}\sum v_{ix}^2 \cdot \frac{1}{L^2} = \frac{mN}{L^3}\cdot\frac{\sum v_{ix}^2}{N} = \rho\,\langle v_x^2\rangle = \frac{1}{3}\,\rho\,\langle v^2\rangle = \frac{1}{3}\,\rho v_e^2 \qquad [23.3]$$

en la que ρ es la densidad del gas y que relaciona la presión del gas, P, con la velocidad cuadrática media de sus moléculas, v_e.

No hemos considerado choques entre moléculas, aunque desde la cara $x = 0$ hasta la cara $x = L$ y vuelta, la molécula puede colisionar con otras y variar su componente $p_x = mv_x$; pero la cantidad de movimiento sobre el eje x, ganada o perdida por una molécula, es igual a la perdida o ganada, respectivamente, por la molécula contra la que ha chocado y, al sumar para todas las moléculas, el resultado es como si no hubieran chocado.

Asimismo, si el choque con la pared no es perfectamente frontal, puede chocar con alguna de las otras caras del recipiente, pero ello, al ser el choque perfectamente elástico, no cambia p_x y el resultado obtenido tampoco cambia.

23.4 Interpretación cinética de la temperatura. Energía interna

La Ecuación [23.3] multiplicada por el volumen, V, se expresa:

$$PV = \frac{1}{3}\,\rho V\langle v^2\rangle = \frac{1}{3}\,mN\langle v^2\rangle$$

Y, puesto que la energía cinética media de una molécula es:

$$\langle E_c\rangle = \frac{1}{2}\,m\langle v^2\rangle \qquad [23.4]$$

la expresión anterior se escribe:

$$PV = \frac{2}{3} N \langle E_c \rangle \qquad [23.5]$$

Comparando ésta con la ecuación de estado del gas perfecto [19.2], $PV = NkT$, resulta:

$$\langle E_c \rangle = \frac{3}{2} kT \qquad [23.6]$$

Energía cinética media

lo que nos dice que *la energía cinética media de traslación de una molécula de gas perfecto es proporcional a su temperatura absoluta, siendo la constante de proporcionalidad 3/2 de la constante de Boltzmann.* En consecuencia, a igualdad de temperatura la energía cinética media de una molécula de cualquier gas es la misma.

En un gas perfecto, la energía interna es únicamente la debida a la energía cinética de sus moléculas y su valor será:

$$U = N \langle E_c \rangle \qquad [23.7]$$

que, teniendo en cuenta la [23.6], se expresa:

$$U = \frac{3}{2} NkT \qquad [23.8]$$

Energía interna

Por tanto, *la energía interna de un gas perfecto es proporcional al número de moléculas del mismo y función únicamente de su temperatura absoluta, siendo la constante de proporcionalidad 3/2 de la constante de Boltzmann.*

La Expresión [23.5], teniendo en cuenta la [23.7], se expresa de la forma:

$$PV = \frac{2}{3} U \qquad [23.9]$$

que nos relaciona la energía interna con las variables macroscópicas presión y volumen. Esta expresión también puede deducirse a partir de la [23.8], puesto que el número de moléculas será el número de moles multiplicado por el número de Avogadro $N = nN_A$:

$$U = \frac{3}{2} nN_A kT$$

Y, puesto que el producto de la constante de Boltzmann por el número de Avogadro es la constante de los gases perfectos, se expresa:

$$U = \frac{3}{2} nRT = \frac{3}{2} PV \qquad [23.10]$$

EJEMPLO 23.1

a) Calculemos la energía cinética media de una molécula de gas perfecto a la temperatura de 30 ºC.

Para ello, apliquemos la [23.6]:

$$\langle E_c \rangle = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \times 1{,}38065 \times 10^{-23} \times 303{,}15 = 6{,}278 \times 10^{-21}\ \text{J}$$

b) Podemos determinar la velocidad cuadrática media de las moléculas del gas si conocemos el gas. Así, para el oxígeno, aplicando la [23.4] obtenemos:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{2}{m} \langle E_c \rangle = \frac{2}{32} \times 6{,}022 \times 10^{23} \times 6{,}278 \times 10^{-21} = 236{,}3\ (\text{m/s})^2$$

y la velocidad cuadrática media es $v_e = 15{,}37$ m/s.

c) Si la cantidad de oxígeno a la temperatura de 30 ºC es de 1 mol, la energía interna del gas se obtiene por aplicación de la [23.7]:

$$U = N_A \langle E_c \rangle = 6{,}022 \times 10^{23} \times 6{,}278 \times 10^{-21} = 37{,}806 \times 10^2\ \text{J}$$

d) Si el sistema está en equilibrio con la presión atmosférica, el volumen que ocupará se obtiene por aplicación de [23.9]:

$$1{,}013 \times 10^5\, V = \frac{2}{3} \times 37{,}806 \times 10^2$$

de donde $V = 22{,}88 \times 10^{-3}\ \text{m}^3 = 22{,}88$ l.

Como comprobación, podemos calcular este volumen por aplicación directa de la ley de los gases perfectos:

$$1{,}013 \times 10^5\, V = 1 \times 8{,}315 \times 303{,}15 \quad \text{de donde:} \quad V = 22{,}88\ \text{l}$$

23.5 Principio de equipartición de la energía

Multiplicando todas las ecuaciones de [23.1] por 1/2 m, resulta:

$$\frac{1}{2}\, m \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{2}\, m \langle v_y^2 \rangle = \frac{1}{2}\, m \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{6}\, m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{3}\, E_c$$

lo que constituye el principio de equipartición de la energía cinética de traslación molecular, que puede enunciarse diciendo que *la energía cinética media de traslación molecular es la misma para cada uno de los tres grados de libertad e igual a la tercera parte de la energía cinética media total de traslación molecular*.

De acuerdo con este principio y con la Expresión [23.6], el movimiento, según cada uno de los tres grados de libertad, contribuye con la misma cantidad de energía cinética al valor total molecular medio de ésta, siendo la energía aportada por cada grado de libertad igual a 1/2 kT:

$$\langle E_{cx} \rangle = \langle E_{cy} \rangle = \langle E_{cz} \rangle = \frac{1}{3} \langle E_c \rangle = \frac{1}{2}\, kT \qquad [23.11]$$

Las moléculas, debido a los choques que sufren, estarán sometidas a movimientos de rotación y tendrán una cierta energía cinética debido a este movimiento. Si consideramos rígida la molécula, los grados de libertad en la rotación serán tres y el número de grados de libertad, en total, serán seis. En la realidad, las moléculas no se comportan rígidamente y debido a los choques entran en vibración, lo que contribuye a aumentar su energía cinética y el número de sus grados de libertad.

En Mecánica estadística se demuestra que si la energía asociada a un cierto grado de libertad es función cuadrática de la variable que determina ese grado de

libertad, el aporte de energía, según este grado de libertad, es 1/2 kT. Así, la energía cinética de rotación alrededor de un eje tiene por expresión 1/2 Iw^2 y su contribución a la energía cinética media molecular será de 1/2 kT.

Lo mismo sucede con la energía potencial elástica, cuya expresión es 1/2 Cx^2 que aportará a la energía potencial molecular media la cantidad 1/2 kT. Si todos los grados de libertad son del tipo indicado, la energía media total molecular estará repartida entre todas ellas en partes iguales, e iguales a 1/2 kT, lo que constituye un enunciado general del principio de equipartición de la energía. *La contribución de cada grado de libertad a la energía media de una molécula es 1/2 kT.* Para una molécula de g grados de libertad, su energía cinética media será:

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{2} gkT \qquad [23.12]$$

Energía cinética media

y su energía interna valdrá:

$$U = \frac{1}{2} gNkT = \frac{1}{2} gnRT = \frac{1}{2} gPV \qquad [23.13]$$

Energía interna

23.6 Calores específicos de los gases perfectos

Consideremos un gas cuyas moléculas tengan g grados de libertad. La energía interna del gas por mol vendrá dado por la [23.13], y su valor será:

$$U = \frac{1}{2} gRT$$

El calor específico molar a volumen constante será:

$$c_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_v = \frac{1}{2} gR \qquad [23.14]$$

Calor molar a volumen constante

que resulta ser independiente de la temperatura.

La aplicación de la relación de Mayer permite calcular el calor específico molar a presión constante:

$$c_p = c_v + R = \frac{g}{2} R + R = \frac{R}{2} (g + 2) \qquad [23.15]$$

Calor molar a presión constante

y la relación de ambos calores específicos valdrá:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{g + 2}{g} \qquad [23.16]$$

Coeficiente adiabático

que es una constante independiente de la temperatura, lo cual sólo se verifica en los gases ideales.

En un gas monoatómico cuyas moléculas únicamente estén sometidas a movimiento de traslación, el número de grados de libertad es de tres y, por tanto, serán:

$$c_v = \frac{3}{2} R \quad , \quad c_p = \frac{5}{2} R \quad \text{y} \quad \gamma = \frac{5}{3}$$

lo que concuerda prácticamente con los valores obtenidos experimentalmente.

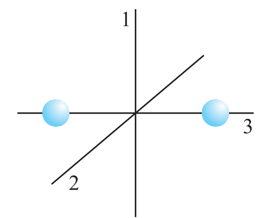


Figura 23.3.

En una molécula biatómica, además de los tres grados de libertad para su centro de gravedad, debemos considerar dos más de rotación, pues despreciaremos la rotación alrededor del eje 3 que une ambos átomos, por ser su contribución a la energía cinética despreciable frente a la que aporta la rotación alrededor de los ejes 1 y 2 (Figura 23.3).

En esta situación, el número de grados de libertad es de cinco y los calores específicos molares son:

$$c_v = \frac{5}{2}R \quad \text{y} \quad c_p = \frac{7}{2}R \quad \text{siendo:} \quad \gamma = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

Asimismo, podíamos considerar dos grados más de libertad, ya que los átomos pueden vibrar en la dirección del eje que los une, resultando, en total, siete grados de libertad y, en consecuencia, debían ser:

$$c_v = \frac{7}{2}R \quad , \quad c_p = \frac{9}{2}R \quad \text{y} \quad \gamma = \frac{9}{7} = 1{,}286$$

valores que no concuerdan con los obtenidos experimentalmente.

Los valores experimentales, algunos de los cuales aparecen en la Tabla 23.1, parecen indicarnos que la molécula biatómica a temperatura ambiente tiene únicamente cinco grados de libertad, es decir, los tres de traslación y dos de rotación, mientras que las moléculas poliatómicas tienen los siete indicados.

Tabla 23.1. Calores específicos molares a presión constante y valores de γ.

Gases	c_p J/mol·K	γ
Monoatómicos:		
He	20,952	1,658
Ne	21,294	1,64
Ar	20,927	1,66
Kr	20,406	1,687
Xe	20,912	1,66
Valor teórico		1,667
Diatómicos:		
H_2	28,585	1,410
N_2	28,895	1,404
O_2	29,049	1,401
Cl_2	31,410	1,36
CO	28,895	1,404
Valor teórico		1,400
Triatómicos:		
CO_2	35,605	1,304
SO_2	36,985	1,29
H_2O (100 °C)	34,297	1,32
Valor teórico		1,286
Poliatómicos:		
NH_3	35,135	1,31
C_2H_4	41,572	1,25
C_2H_6	52,075	1,19
Valor teórico		1,286

En la realidad, los calores específicos son función de la temperatura. Cuando ésta es baja, las moléculas únicamente tienen energía cinética de traslación y sus

grados de libertad son solamente tres. Al elevarse la temperatura, los choques entre moléculas se hacen más fuertes y ocasionan movimientos de rotación, apareciendo, en general, dos grados más de libertad. A temperaturas más elevadas los choques se hacen más violentos y las moléculas pueden entrar en vibración, apareciendo nuevos grados de libertad. En la Figura 23.4 se ha reflejado la variación de los grados de libertad de la molécula de hidrógeno en función de la temperatura absoluta.

Para un estudio más profundo de estos temas se hace necesario el concurso de las Mecánicas estadística y cuántica, lo que abordaremos en el segundo tomo de esta obra.

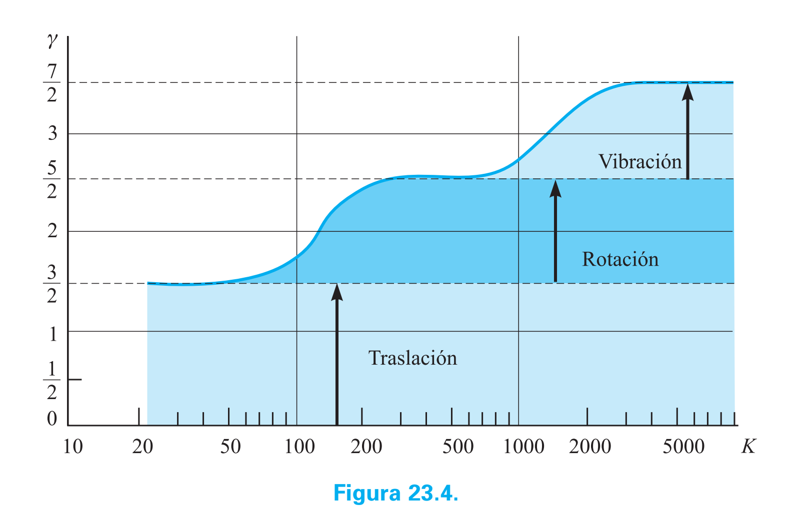


Figura 23.4.

23.7 Recorrido libre medio

La distancia media que recorre una molécula entre dos choques sucesivos se denomina *recorrido libre medio*; evidentemente, dependerá de la densidad del gas, del número de moléculas en la unidad de volumen y del tamaño de éstas.

Para facilitar el razonamiento, supongamos que en un cierto instante todas las moléculas del gas quedan inmóviles, menos una que se mueve con la velocidad media $\langle \mathbf{v} \rangle$. En el instante del choque, si todas las moléculas son iguales y de radio r, la distancia entre los centros de las dos moléculas que chocan es $2r$. Para el cálculo que vamos a realizar puede suponerse que la molécula móvil tiene un radio $2r$ y las fijas quedan reducidas a puntos geométricos, ya que igual número de choques se producirán en ambas situaciones. La sección diametral de la molécula de radio $2r$ será la *sección eficaz* de choque y su valor es $\sigma = 4\pi r^2$. En el tiempo unidad, la molécula móvil recorre la distancia $\langle v \rangle$ y barre un volumen eficaz igual a $\sigma \langle v \rangle$, chocando contra todas las moléculas puntuales que haya en él. Si el número de moléculas por unidad de volumen es n, el número de moléculas en el volumen barrido por la molécula móvil en la unidad de tiempo, es decir, el número de choques efectuado por la molécula móvil en la unidad de tiempo es: Sección eficaz

$$v = n\sigma \langle v \rangle$$

El recorrido libre medio será, por definición, el cociente entre el recorrido total en un cierto tiempo y el número de choques producidos en él, por tanto, es:

$$\lambda = \frac{\langle v \rangle}{n\sigma \langle v \rangle} = \frac{1}{n\sigma} = \frac{1}{n 4\pi r^2} \qquad [23.17]$$

Una teoría más perfecta se desarrolla considerando que todas las moléculas son móviles, y que el número de colisiones por unidad de tiempo depende de la velocidad relativa entre las moléculas, lo que conduce a las siguientes expresiones para la frecuencia de choque y el recorrido libre medio:

$$v = n\sqrt{2}\sigma\langle v\rangle \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,n\sigma} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}\,nr^2} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}\,n\,d^2} \qquad [23.18]$$

siendo d el diámetro de la molécula.

El número de moléculas en la unidad de volumen, utilizando la [19.2], puede expresarse:

Número de moléculas por unidad de volumen

$$n = \frac{N}{V} = \frac{NP}{NkT} = \frac{P}{kT} \qquad [23.19]$$

y, con ello, la Ecuación [23.18] se expresa:

Recorrido libre medio

$$\lambda = \frac{kT}{\pi\sqrt{2}\,d^2P} \qquad [23.20]$$

El número de moléculas por unidad de volumen depende de las condiciones de presión y temperatura [23.19], puesto que las dimensiones moleculares de todos los gases son prácticamente iguales, el recorrido libre medio es, aproximadamente el mismo para todos los gases en las mismas condiciones de presión y temperatura [23.20].

EJEMPLO 23.2

Calculemos el recorrido libre medio de una molécula de aire a la presión de una atmósfera y temperatura de 30 °C.

El número de moléculas por unidad de volumen está dado por la [23.19]:

$$n = \frac{1{,}013 \times 10^5}{1{,}38065 \times 10^{-23} \times 303{,}15} = 2{,}42 \times 10^{25}\ \text{moléculas/m}^3$$

Considerando las moléculas de aire esféricas de radio $r = 10^{-10}$ m, el recorrido libre medio se obtiene por aplicación de la [23.18]:

$$\lambda = \frac{1}{4\pi\sqrt{2} \times 2{,}42 \times 10^{25} \times 10^{-20}} = 2{,}33 \times 10^{-7}\ \text{m}$$

Si disminuimos la presión hasta 10^{-7} Pa, a la misma temperatura, el recorrido libre medio aumenta hasta λ', siendo:

$$\lambda' = \frac{P}{P'}\lambda = \frac{1}{10^{-7}} \times 2{,}33 \times 10^{-7} = 2{,}33\ \text{m}$$

y las moléculas pueden recorrer varios metros sin encontrarse.

23.8 Fenómenos de transporte

Se denomina así al conjunto de fenómenos por los cuales, y debido al movimiento de las moléculas, éstas pueden transportar una magnitud ϕ asociada a ellas. Para ello, es necesario que dicha magnitud no presente una distribución homogénea en el gas. Las moléculas que tienen un mismo valor de ϕ formarán superficies que, para mayor facilidad, supondremos planas. Así, consideraremos que el estado medio de las moléculas en el plano π_1 lleva asociado un valor ϕ_1 de la magnitud; el de π_0, el valor ϕ_0, y el de π_2, el valor ϕ_2 (Figura 23.5).

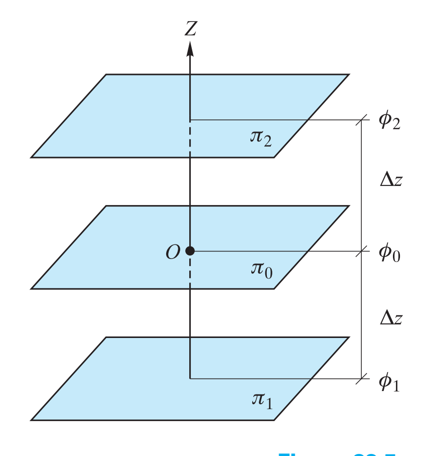


Figura 23.5.

Tomaremos el eje OZ normal a estos planos y supondremos que, por ejemplo, $\phi_2 < \phi_1$. Se trata de calcular la variación de la magnitud ϕ, al pasar de ϕ_1 a ϕ_2. Siendo ϕ función continua y exclusiva de z, podemos escribir:

$$\phi_1 = \phi_0 + \frac{\partial \phi}{\partial z}\Delta z \quad \text{y} \quad \phi_2 = \phi_0 - \frac{\partial \phi}{\partial z}\Delta z$$

por tanto, $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = -2\dfrac{\partial \phi}{\partial z}\Delta z$.

La magnitud ϕ es transportada por las moléculas que pasan a través de π_0, luego será función del número de ellas que lo atraviesan en la unidad de tiempo, lo que calcularemos de la siguiente manera:

La probabilidad de que una molécula se mueva en una dirección dentro del ángulo sólido $d\Omega$ es $d\Omega/4\pi$. El número de moléculas con velocidades comprendidas entre v y $v + dv$ que se mueven dentro de este ángulo sólido son:

$$n'(v)\,dv\,\frac{d\Omega}{4\pi}$$

De ellas, sólo llegaran al plano π_0, en la unidad de tiempo, las que se encuentren como máximo a la distancia $v_z = v\cos\theta$, que son:

$$v\cos\theta\, n'(v)\,dv\,\frac{d\Omega}{4\pi}$$

expresión que, integrada para todas las velocidades, es:

$$\frac{d\Omega}{4\pi}\cos\theta\int_0^\infty vn'(v)\,dv = \frac{d\Omega}{4\pi}\cos\theta\, n\langle v\rangle \qquad [23.21]$$

El flujo elemental de la función ϕ a través del plano π_0 es:

$$\Delta\phi\,\frac{n}{4\pi}\cos\theta\langle v\rangle\,d\Omega = -\frac{n}{2\pi}\cos\theta\langle v\rangle\frac{\partial\phi}{\partial z}\Delta z\,d\Omega$$

El recorrido libre medio, λ, está medido en dirección de la velocidad, luego al plano π_0 llegan las que verifican $\Delta z = \lambda\cos\theta$, con lo cual, y teniendo en cuenta que es $d\Omega = \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi$, el flujo elemental es:

$$dF(\phi) = -\frac{n}{2\pi}\lambda\cos^2\theta\langle v\rangle\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\phi}{\partial z}\,d\theta\,d\varphi$$

Su integración para el ángulo sólido abarcado por el plano π_0 nos da:

$$F(\phi) = -\frac{n\lambda}{2\pi}\langle v\rangle\frac{\partial\phi}{\partial z}\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi = -\frac{n\lambda}{3}\langle v\rangle\frac{\partial\phi}{\partial z} \qquad [23.22]$$

Ecuación de transporte de Boltzmann

que es la *ecuación de transporte de Boltzmann*, a la que obedecen los fenómenos de viscosidad, conductividad y difusión de gases, que pasamos a estudiar a continuación.

23.9 Coeficiente de viscosidad de gases

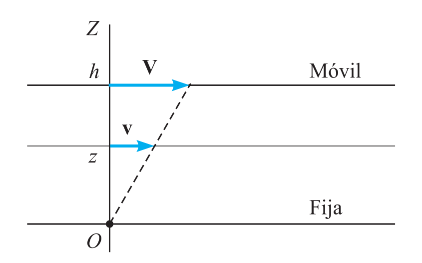


Figura 23.6.

Consideremos en un gas dos láminas sólidas paralelas y de gran superficie, una de ellas fija y la otra moviéndose respecto a esta, conservando su paralelismo y distancia. Tomemos el plano *XOY* en la lámina fija, sea *h* la distancia que separa ambas láminas y **V** la velocidad de la lámina móvil respecto a la fija (Figura 23.6). La capa de gas en contacto con la lámina fija tendrá velocidad nula, mientras que la capa de gas en contacto con la lámina móvil tendrá la velocidad de ésta, estando determinada la velocidad de cada capa de gas, suponiendo que la variación de ésta es lineal, por la expresión:

$$\mathbf{v} = \frac{z}{h}\mathbf{V}$$

El gas situado inmediatamente encima de una capa de éste ejerce sobre ella una acción aceleradora, siendo la fuerza que ejerce por unidad de superficie:

$$\mathbf{F} = -\eta\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \qquad [23.23]$$

En la que η es el coeficiente de viscosidad del gas, el cual, en el sistema internacional de unidades se mide en kg/m · s.

El gas situado por debajo de una cierta capa ejerce sobre ella una acción de frenado, siendo la fuerza ejercida por unidad de superficie $-\mathbf{F}$. La fuerza total que se ejerce en el sentido del movimiento sobre una capa cualquiera de gas es nula y, en consecuencia, el movimiento de ésta es uniforme.

El coeficiente de proporcionalidad η es el coeficiente de viscosidad absoluta o dinámica del gas.

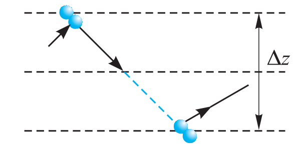


Figura 23.7.

Analicemos ahora el mismo fenómeno a escala molecular. Para ello, consideremos una molécula que haya sufrido un choque encima de un cierto plano, que por efecto de aquél atraviese éste y sufra un nuevo choque debajo de él (Figura 23.7). Como resultado de este último, la velocidad de arrastre de la molécula disminuirá en:

$$\Delta\mathbf{v} = -\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\Delta z$$

y habrá sufrido un impulso:

$$\mathbf{I} = m\Delta\mathbf{v} = -m\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\Delta z$$

El gas de la parte inferior ha ejercido sobre ella una fuerza, **f**, que verifica $\mathbf{I} = \int \mathbf{f}\,dt$, estando la integral extendida al tiempo que dura el choque. Vemos con esto que la magnitud transportada es la cantidad de movimiento y el flujo de la misma nos dará la fuerza que habrá que aplicar, según el eje *OX*, por unidad de superficie, para mantener el gradiente de velocidades. Apliquemos, pues, la [23.22] para $\phi = mv_x$, con lo cual:

$$\mathbf{F}(\psi) = -\frac{n\langle v\rangle\lambda}{3}\frac{\partial(mv_x)}{\partial z} = -\frac{n\langle v\rangle\lambda m}{3}\frac{\partial v_x}{\partial z}$$

que, comparándola con la [23.23], es:

$$\eta = \frac{1}{3} nm\lambda \langle v \rangle$$

Sustituyendo en esta última, el valor encontrado para λ en [23.18] es:

$$\eta = \frac{m}{3\pi\sqrt{2}} \frac{\langle v \rangle}{d^2}$$

siendo d el diámetro de la molécula y m su masa.

En Mecánica estadística demostraremos que el valor medio del módulo de la velocidad de las moléculas del gas es:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \qquad [23.24]$$

con lo cual, el valor del coeficiente de viscosidad se expresa:

$$\eta = \frac{m}{3\pi\sqrt{2}\,d^2}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \frac{2}{3\pi\,d^2}\sqrt{\frac{kmT}{\pi}} \qquad [23.25]$$

Coeficiente de viscosidad del gas

resultando que la viscosidad de los gases aumenta con la temperatura y es independiente de la presión.

EJEMPLO 23.3

Calculemos la viscosidad del aire a 30 °C, tomando para su molécula una configuración esférica de radio $r = 10^{-10}$ m.

Solución:

La masa de la molécula de aire es:

$$m = \frac{M_a}{N_A} = \frac{28{,}965}{6{,}022 \times 10^{-26}} = 4{,}247 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

Sustituyendo valores en la expresión del coeficiente de viscosidad, resulta:

$$\eta = \frac{2}{3\pi 4 \times 10^{-20}} \sqrt{\frac{1{,}38065 \times 10^{-23} \times 4{,}247 \times 10^{-26} \times 303{,}15}{\pi}} = 4 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$$

23.10 Conductividad térmica

Consideremos una capa de gas situada entre dos láminas paralelas de gran superficie, separadas la distancia h y entre las cuales existe una diferencia de temperatura ΔT (Figura 23.8). Entre las dos láminas se establecerá un gradiente de temperatura constante que, si tomamos el eje de las zetas normal a las láminas, es:

$$\text{Grad. } T = \frac{dT}{dz}$$

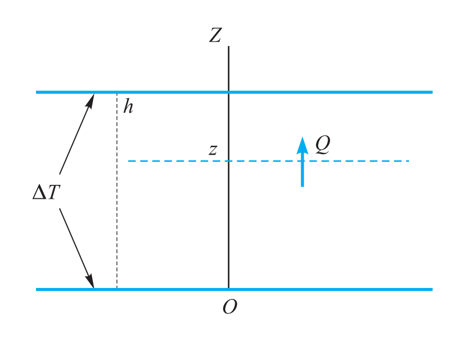


Figura 23.8.

El flujo de calor que atraviesa por unidad de tiempo, la unidad de superficie de un plano paralelo a las láminas, es proporcional al gradiente de temperaturas:

Ley de Fourier

$$Q = -K \frac{dT}{dz} \qquad [23.26]$$

Expresión conocida como *ley de Fourier*, en la que K es el coeficiente de conductividad térmica del gas, que en el S.I. se mide en $J \cdot s^{-1} \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$; el signo negativo es debido a que el sentido del flujo de calor es contrario al del gradiente de temperaturas.

A nivél molecular, el flujo de calor no es más que un transporte de energía cinética, es decir, que la función ϕ de la Expresión [23.22] es:

$$\phi = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \langle E_c \rangle$$

que, para el caso de un gas monoatómico, usando la [23.6], es:

$$\phi = -\frac{3}{2} kT$$

con lo que la Expresión [23.22] se expresa:

$$F(\phi) = -\frac{n\lambda}{3} \langle v \rangle \left(-\frac{3}{2} k \frac{dT}{dz} \right) = -\frac{1}{2} n\lambda \langle v \rangle k \frac{dT}{dz}$$

que, comparándola con la [23.26], da:

$$K = \frac{1}{2} n\lambda \langle v \rangle k$$

Sustituyendo en ésta los valores de λ, dado por la [23.18], y de $\langle v \rangle$, dado por la [23.24], resulta:

$$K = \frac{k}{\pi d^2} \sqrt{\frac{kT}{\pi m}} \qquad [23.27]$$

EJEMPLO 23.4

Determinemos el coeficiente de conductividad térmica del aire a la temperatura de 30 °C y presión de 1 atm, admitiendo que su molécula es esférica de radio $r = 10^{-10}$ m.

Solución:

La masa de la molécula de aire se ha determinado en el Ejemplo 23.3 del epígrafe anterior, $m = 4{,}247 \cdot 10^{-26}$ kg.

La aplicación de la [23.27] nos da el coeficiente de conductividad térmica:

$$K = \frac{1{,}38065 \times 10^{-23}}{\pi 4 \times 10^{-20}} \sqrt{\frac{1{,}38065 \times 10^{-23} \times 303{,}15}{\pi \times 4{,}247 \times 10^{-26}}} = 1{,}95 \times 10^{-2} \ kg \cdot m/s^3 \cdot K$$

23.11 Difusión molecular

Mediante el proceso de difusión las moléculas de un sistema tienden a ocupar uniformemente el medio en el que se encuentran. Es una consecuencia de la agitación molecular de la sustancia que se difunde y para que se produzca debe existir en el medio un gradiente de concentración de la misma. Las moléculas de las zonas más concentradas se difunden hacia las zonas de menor concentración hasta que se produce la uniformidad en todo el medio disponible. En consecuencia, la difusión es un fenómeno de transporte de materia.

Para el estudio de la difusión prescindiremos de las fuerzas intermoleculares y únicamente trataremos sistemas en los que, o bien una sustancia se difunde en sí misma, o lo hace en un medio homogéneo, cuyas moléculas supondremos sin movimiento.

Consideremos un recipiente lleno de un gas (gas 1) homogéneamente distribuido en cuya parte inferior se produce otro gas (gas 2) que se difunde en el primero sin reaccionar con él (Figura 23.9). Elijamos el eje OZ en la dirección del gradiente de concentración del gas 2 que se difunde, con lo cual el número de moléculas de este gas por unidad de volumen, n, es función exclusiva de la coordenada z. Al número de moléculas del gas 2 que, en la unidad de tiempo, atraviesan la unidad de superficie de un plano horizontal lo llamaremos *densidad de corriente de partículas* j; ésta es proporcional al gradiente de la concentración $\partial n/\partial z$, es decir:

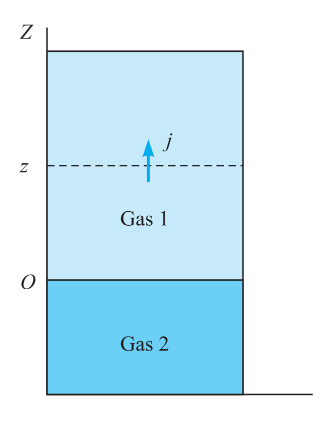


Figura 23.9.

Ley de Fick

$$j = -D\frac{\partial n}{\partial z} \qquad [23.28]$$

Coeficiente de difusión

Expresión que se conoce como *ley de Fick*, en la que D es una constante que depende de la naturaleza de la sustancia que se difunde, a la que se denomina *coeficiente de difusión* y cuyas unidades son m^2/s. El signo menos se debe a que el paso de moléculas lleva el sentido contrario al gradiente de la concentración del gas 2 en el 1. Esta expresión es de aplicación general, salvo para valores muy altos de concentración o de gradiente.

A nivel molecular, de acuerdo con [23.21], el número de moléculas que en la unidad de tiempo atraviesan la unidad de superficie normal a la dirección de propagación es:

$$n\langle v\rangle\cos\theta\,\frac{d\Omega}{4\pi}$$

Al sustituir en ésta el valor de $d\Omega$ se expresa:

$$n\langle v\rangle\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\,\frac{d\varphi}{4\pi}$$

Una primera integración sobre φ, desde 0 hasta 2π, da:

$$\frac{1}{2}\,n\langle v\rangle\,\mathrm{sen}\,\theta\cdot\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

Ahora, la variable es n, siendo el número de partículas que atraviesan el plano de abajo hacia arriba:

$$\left(n-\frac{dn}{dz}\,\Delta z\right)\frac{1}{2}\,\langle v\rangle\,\mathrm{sen}\,\theta\cdot\cos\theta\,d\theta$$

y el número que lo atraviesa en sentido contrario:

$$\left(n + \frac{dn}{dz}\Delta z\right)\frac{1}{2}\langle v\rangle \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta\, d\theta$$

Por tanto, el número de partículas por unidad de tiempo que pasan por unidad de superficie en sentido ascendente es:

$$F(\phi) = -\frac{dn}{dz}\int \Delta z\, \frac{1}{2}\langle v\rangle \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, d\theta$$

Puesto que es $\Delta z = \lambda \cos\theta$, resulta:

$$F(\phi) = -\frac{1}{3}\lambda \langle v\rangle \frac{dn}{dz}$$

Al comparar ésta con la [23.28], obtenemos para D la expresión:

$$D = \frac{1}{3}\lambda\langle v\rangle$$

Sustituyendo en ella el valor del recorrido libre medio dado por la [23.18] y el valor de $\langle v\rangle$ dado por la [23.24], resulta:

$$D = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}\, n\, d^2}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \frac{1}{\pi d^2 n}\sqrt{\frac{kT}{\pi m}}$$

Puesto que el número de moléculas por unidad de volumen es $n = \frac{N}{V} = \frac{P}{kT}$, el coeficiente de difusión se expresa:

Coeficiente de difusión

$$D = \frac{1}{\pi d^2}\frac{kT}{P}\sqrt{\frac{kT}{\pi m}} \qquad [23.29]$$

EJEMPLO 23.5

Determinemos el coeficiente de difusión del hidrógeno a 100 °C y presión de 1 atm, admitiendo que su molécula es esférica de radio $r = 1{,}12 \times 10^{-10}$ m.

Solución:

La masa de la molécula de hidrógeno es:

$$m = \frac{2}{6{,}022} \times 10^{26} = 0{,}332 \times 10^{-26}\ \text{kg}$$

Aplicando la [23.29], el coeficiente de difusión resulta:

$$D = \frac{1}{\pi\, 2{,}24^2 \times 10^{-20}}\,\frac{1{,}38065 \times 10^{-23} \times 373{,}15}{1{,}013 \times 10^5}\sqrt{\frac{1{,}38065 \times 10^{-23} \times 373{,}15}{\pi\, 0{,}332 \times 10^{-26}}} =$$

$$= 2{,}269 \times 10^{-4}\ \text{m}^2/\text{s}$$

Transmisión de calor

CAPÍTULO 24

24.1 Introducción

El calor puede transmitirse por conducción, por convección, por radiación o por formas combinadas de las anteriores. Cuando el calor pasa de un punto a otro en un mismo cuerpo o entre dos cuerpos en contacto, merced a la diferencia de temperatura existente entre aquéllos y sin que haya flujo de masa alguno, se dice que el calor se ha transmitido por *conducción*.

Cuando entre dos zonas de un fluido existe una diferencia de temperatura, puesto que el peso específico del fluido en la zona más caliente será menor que el correspondiente a la zona fría, el fluido de la zona caliente se eleva, descendiendo el de las zonas frías y estableciéndose un movimiento del fluido que transporta calor; este método de transmisión se llama por *convección natural*. Si el movimiento del fluido es obligado por algún ingenio mecánico, se dice que la *convección* es *forzada*.

Todo cuerpo, cualquiera que sea su temperatura, emite energía radiante a expensas de su energía interna: las ondas que llevan esa energía se propagan sin necesidad de medio propagador y, al ser absorbidas por los cuerpos situados en su camino les transfiere la energía, elevando la temperatura de éstos; a esta forma de transmisión de calor se denomina, *radiación térmica*.

24.2 Conducción

Si en un punto de un sólido se produce una cierta cantidad de calor, habrá, si no es totalmente consumido en algún cambio de estado, una propagación por conducción a los distintos puntos del sólido. La temperatura de éstos será función del punto y del tiempo:

$$T = T(x, y, z, t)$$

En cada instante, el lugar geométrico de los puntos que tienen una misma temperatura es una superficie de ecuación:

$$T(x, y, z, t_i) = T_i = \text{cte.}$$

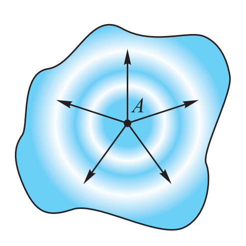


Figura 24.1.

que se denomina *superficie isoterma*. En los cuerpos térmicamente isótropos, es decir, aquéllos que conducen el calor exactamente igual en todas sus direcciones, las superficies isotermas son esferas concéntricas de centro el foco térmico A. La dirección de transmisión es siempre normal a las superficies isotermas (Figura 24.1).

Experimentalmente, se establece que la cantidad de calor que se propaga por conducción, dQ, es proporcional a la superficie, dS, normal a la dirección de propagación a través de la cual se transmite, al gradiente de temperaturas en la dirección de la transmisión y al tiempo:

$$dQ = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} dS\, dt \qquad [24.1]$$

El signo menos es debido a que el flujo de calor va de las temperaturas altas a las bajas, mientras que el gradiente de temperaturas tiene sentido contrario. El flujo de calor o cantidad de calor transmitida en la unidad de tiempo es:

Ley de Fourier

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \dot{Q} = -\lambda A \frac{\partial T}{\partial z} \qquad [24.2]$$

Coeficiente de conductividad

que es la ***ley de Fourier.*** El coeficiente de proporcionalidad, λ, es llamado *coeficiente de conductividad térmica*, y es la cantidad de calor que fluye a través de la unidad de superficie normal a la dirección de propagación, en la unidad de tiempo, bajo un gradiente de temperaturas de un grado. Su ecuación de dimensiones será: $[\lambda] = MT^{-3}\,{}^{\circ}\mathrm{C}^{-1}$. Sus valores en el S.I. se expresan en J/m · s °C o W/m · °C. También, usualmente, se expresan en cal/m · h °C.

El valor de λ indica la aptitud del cuerpo para conducir el calor, siendo mucho mayor en los sólidos que en los líquidos y gases. Se dice que un cuerpo con alto valor de λ es un buen ***conductor del calor***, mientras que si λ tiene valores bajos se dice que el cuerpo es un mal conductor o buen ***aislante térmico***. En la Tabla 24.1 se indican valores de λ para algunas sustancias puras. Las aleaciones casi siempre tienen valores inferiores a sus componentes simples y las impurezas en los metales reducen de forma importante su coeficiente de conductividad térmica.

Tabla 24.1. Valores de λ de algunas sustancias puras.

Sustancia	λ w/m · °C
Plata	420
Cobre	380
Oro	312
Aluminio	210
Platino	71
Acero	40
Plomo	35
Hielo	2
Hormigón	0,85
Vidrio	0,85
Agua (0 °C)	0,56
Agua (20 °C)	0,6
Madera	0,1
Poliuretano	0,025
Aire	0,02
Poliestireno expandido	0,01

En general, en las distintas materias, λ puede ser función de la temperatura, del contenido de humedad, de la estructura interna del material, de su peso específico aparente, de la composición o de la presión.

24.3 Conducción en régimen permanente

Se dice que un sistema está en régimen permanente de temperaturas cuando ésta es independiente del tiempo, es decir, es únicamente función del punto. Analizaremos esta situación en cinco casos particularmente importantes:

a) Pared plana simple.
b) Pared plana compuesta.
c) Corona cilíndrica.
d) Corona esférica.
e) Varilla cilíndrica.

a) *Pared plana simple.*

El flujo de calor a través de la unidad de superficie en la unidad de tiempo se expresa utilizando la [24.2] de la forma:

$$\dot{q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \qquad [24.3]$$

Una pared plana, en la cual λ sea constante cuyas caras se conserven a temperaturas constantes T_1 y T_2, es un sistema en régimen permanente (Figura 24.2). La temperatura variará linealmente en el interior de la pared y su expresión en función de z será:

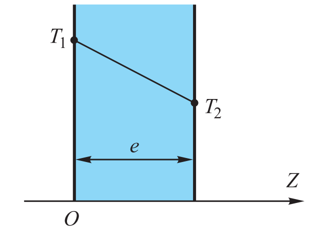


Figura 24.2.

$$T(z) = -\frac{T_1 - T_2}{e} z + T_1$$

con lo cual, el gradiente de temperaturas será:

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{T_1 - T_2}{e}$$

y el flujo de calor a través de la pared, por unidad de superficie y en la unidad de tiempo, es:

$$\dot{q} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{e}$$

y el flujo total en la unidad de tiempo:

$$\dot{Q} = \dot{q}A = \lambda A \frac{T_1 - T_2}{e} = \frac{T_1 - T_2}{R} \qquad [24.4]$$

Resistencia térmica

A la constante $R = e/\lambda A$, se le denomina ***resistencia térmica*** de la pared, y sus unidades en el S.I. son: s · K/ J o K/w. La denominación se debe a la analogía entre la Ecuación [24.4] y la ley de Ohm para conductores, siendo la resistencia térmica análoga a la eléctrica; la diferencia de temperaturas, análoga a la diferencia de tensión eléctrica, y el flujo de calor, análogo a la corriente eléctrica.

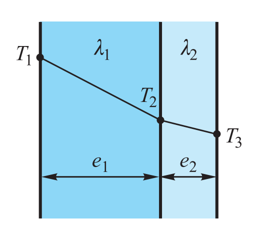


Figura 24.3.

b) *Pared plana compuesta.*

Consideremos la pared plana compuesta, como se indica en la Figura 24.3, por una capa de espesor e_1 y coeficiente de conductividad térmica λ_1 y, por otra adosada en serie a la anterior, de espesor e_2 y coeficiente λ_2. Si mantenemos una de las caras externas a temperatura T_1 y la otra a temperatura T_2, ambas constantes, el régimen será permanente y el flujo de calor que atraviesa cada una de las capas por unidad de superficie y en la unidad de tiempo, deberá ser el mismo, debiendo verificarse:

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{R_1} = \frac{T_2 - T_3}{R_2} = \frac{T_1 - T_3}{R_1 + R_2} \qquad [24.5]$$

La última igualdad se obtiene sumando numeradores y denominadores de las dos anteriores.

Una pared simple es equivalente térmicamente a una compuesta cuando deja pasar el mismo flujo de calor que esta, bajo la misma diferencia de temperaturas exteriores, es decir, debe verificar:

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_3}{R} \qquad [24.6]$$

lo que, comparado con la [24.5], obliga a que sea:

Resistencia térmica equivalente en serie

$$R = R_1 + R_2$$

En consecuencia, la resistencia térmica equivalente de una pared plana compuesta de dos adosadas en serie es la suma de las resistencias térmicas de las paredes componentes y, en general, si la pared está compuesta de n paredes planas adosadas sucesivamente en serie, su resistencia térmica equivalente es:

$$R = \sum_{1}^{n} R_i \qquad [24.7]$$

Una vez determinado $\dot{Q}$, se puede obtener la temperatura T_2 de la cara intermedia mediante una cualquiera de las expresiones:

$$T_2 = T_1 - \dot{Q}R_1 \quad \text{o} \quad T_2 = T_3 + \dot{Q}R_2 \qquad [24.8]$$

y, en general:

$$T_i = T_{i-1} - \dot{Q}R_{i-1} \quad \text{o} \quad T_i = T_{i+1} + \dot{Q}R_{i+1} \qquad [24.9]$$

EJEMPLO 24.1

A una pared de hormigón de espesor 30 cm se le adosa una capa de madera de espesor 5 cm. Si la cara exterior del hormigón se mantiene a 15 ºC y la exterior de la madera a 25 ºC, calculemos, por unidad de superficie:

a) La resistencia térmica de la capa de madera y del muro de hormigón.
b) La resistencia térmica equivalente.
c) El flujo de calor en la unidad de tiempo.
d) La temperatura en la unión de ambos materiales.

Figura 24.4.

Solución:

a) La resistencia térmica de la madera por unidad de superficie es $R_1 = 0{,}05/0{,}1 = 0{,}5$ K/W, y la resistencia térmica del hormigón, $R_2 = 0{,}3/0{,}85 = 6/17 = 0{,}353$ K/W.

b) Por estar las paredes superpuestas en serie, la resistencia térmica equivalente está dada por [24.7]:

$$R = R_1 + R_2 = \frac{1}{2} + \frac{6}{17} = \frac{29}{34} = 0{,}853 \text{ K/W}$$

c) El flujo de calor está dado por [24.6] y para la unidad de superficie y en la unidad de tiempo es:

$$\dot{q} = \frac{25 - 15}{\dfrac{29}{34}} = \frac{340}{29} = 11{,}724 \text{ W}$$

d) La temperatura T_2 se obtiene aplicando [24.8]:

$$T_2 = 25 - \frac{340}{29} \times 0{,}5 = \frac{555}{29} = 19{,}14\,^{\circ}\text{C}$$

En el caso de una pared plana compuesta por dos situadas en paralelo, como se indica en la Figura 24.5, el flujo de calor a través de cada una de las dos partes en régimen estacionario es, respectivamente:

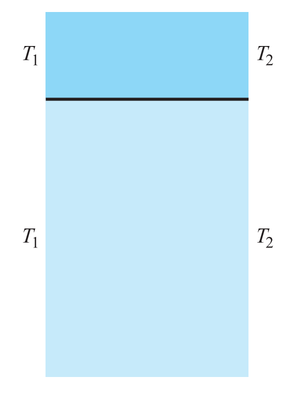


Figura 24.5.

$$\dot{Q}_1 = \frac{T_1 - T_2}{R_1} \quad \text{y} \quad \dot{Q}_2 = \frac{T_1 - T_2}{R_2}$$

El flujo total de calor por unidad de superficie y en la unidad de tiempo, será:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)(T_1 - T_2)$$

La pared equivalente térmicamente será la que deja pasar el mismo flujo de calor cuando las temperaturas a ambos lados son iguales, es decir, verifica:

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{R}$$

lo que exige que sea:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}$$

Resistencia térmica equivalente en paralelo

y para n zonas colocadas en paralelo será:

$$\frac{1}{R} = \sum_{1}^{n} \frac{1}{R_i} \qquad [24.10]$$

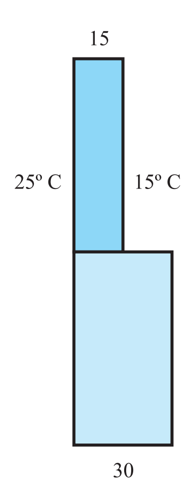


Figura 24.6.

EJEMPLO 24.2

Un muro está formado por una base de hormigón de espesor 30 cm, encima de la cual está situada una pared de madera de espesor 15 cm. Si las caras exteriores se mantienen a 15 ºC y las interiores a 25 ºC (Figura 24.6), calculemos:

a) La resistencia térmica de cada pared por unidad de superficie.

b) La resistencia térmica equivalente.

c) El flujo de calor en la unidad de tiempo a través de un muro en el cual tanto el hormigón como la madera tienen una superficie de 1 m^2.

d) El flujo térmico en la unidad de tiempo a través de cada una de las paredes.

Solución:

a) La resistencia térmica de la pared de hormigón por unidad de superficie ha sido calculada en el ejercio anterior, $R_1 = 0{,}5$ K/w. La resistencia térmica de la pared de madera por unidad de superficie es:

$$R_2 = \frac{0{,}15}{0{,}85} = \frac{3}{17} = 0{,}1765 \text{ K/w}$$

b) La resistencia térmica equivalente, por estar ambas paredes en paralelo, será:

$$\frac{1}{R} = 2 + \frac{17}{3} = \frac{23}{3} \quad \text{de donde:} \quad R = \frac{3}{23} \text{ K/w}$$

c) El flujo total de calor en la unidad de tiempo cuando ambas paredes tienen una superficie de 1 m^2 es:

$$\dot{Q} = \frac{10}{R} = 10 \cdot \frac{23}{3} = \frac{230}{3} = 76{,}667 \text{ w}$$

d) El flujo a través de la pared de hormigón es:

$$\dot{Q}_1 = \frac{10}{R_1} = 20 \text{ w}$$

y el flujo a través de la pared de madera es:

$$\dot{Q}_2 = \frac{10}{R_2} = 10 \cdot \frac{17}{3} = \frac{170}{3} \text{ w}$$

cuya suma verifica:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 = 20 + \frac{170}{3} = \frac{230}{3}$$

Figura 24.7.

c) *Corona cilíndrica.*

Sea una corona cilíndrica cuyos radios interior y exterior son, respectivamente, r_1 y r_2, la cual está construida de un material cuyo coeficiente de conductividad térmica es λ, y cuyas superficies interior y exterior se mantienen a temperaturas constantes T_1 y T_2, respectivamente (Figura 24.7). En esta situación, el flujo de calor será estacionario y radial. La ley de Fourier expresada para la unidad de longitud de cilindro y en la unidad de tiempo es:

$$\dot{q} = -2\pi\lambda r \frac{dT}{dr}$$

que puede expresarse de la forma:

$$dT = -\frac{\dot{q}}{2\pi\lambda}\frac{dr}{r}$$

y, puesto que en régimen estacionario $\dot{q}$ es constante, la integración es inmediata:

$$T_2 - T_1 = -\frac{\dot{q}}{2\pi\lambda}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

de donde el flujo de calor por unidad de longitud y unidad de tiempo es:

$$\dot{q} = 2\pi\lambda\frac{T_1 - T_2}{\ln\frac{r_2}{r_1}} = \frac{T_1 - T_2}{R} \qquad [24.11]$$

siendo:

$$R = \frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2\pi\lambda} \qquad [24.12]$$

la resistencia térmica de la corona cilíndrica por unidad de longitud.

e) *Corona esférica.*

Consideremos una corona esférica de radio interior r_1 y exterior r_2, construida de un material de coeficiente de conductividad λ, y en la cual las temperaturas de la cara interior T_1 y de la cara exterior T_2 se mantienen constantes (Figura 24.8).

El flujo de calor será radial y la Ecuación [24.2] se escribirá:

$$\dot{Q} = -\lambda A\frac{dT}{dr} = -\lambda 4\pi r^2\frac{dT}{dr}$$

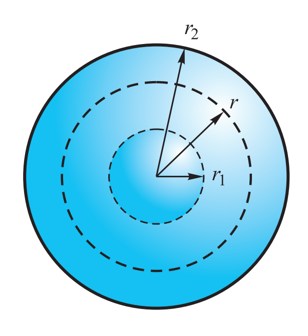


Figura 24.8.

que puede expresarse de la forma:

$$dT = -\frac{\dot{Q}}{4\pi\lambda}\frac{dr}{r^2}$$

y que integrada desde la cara interior a la exterior, al ser $\dot{Q}$ constante, será:

$$T_2 - T_1 = \frac{\dot{Q}}{4\pi\lambda}\left[\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = \frac{\dot{Q}}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{\dot{Q}}{4\pi\lambda}\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}$$

De donde podemos despejar el flujo de calor en la unidad de tiempo:

$$\dot{Q} = 4\pi\lambda\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}(T_1 - T_2)$$

siendo la resistencia térmica de la corona:

$$R = \frac{r_2 - r_1}{4\pi\lambda r_1 r_2}$$

e) *Varilla cilíndrica sin aislar.*

Si calentamos una varilla en uno de sus extremos, que mantendremos a temperatura constante, la varilla conducirá el calor a lo largo de ella y lo cederá también al medio que la rodea, a través de su superficie lateral. Transcurrido un cierto tiempo, la varilla entrará en régimen permanente y la temperatura en cada uno de sus puntos permanecerá constante. Es fácil comprobar cómo ahora la temperatura a lo largo de la varilla no sigue una ley lineal sino exponencial, lo cual se demuestra teóricamente, pero nos limitaremos aquí a indicar el resultado:

$$T = T_0 e^{-x\sqrt{hp/S\lambda}} \qquad [24.13]$$

en el cual T_o es la temperatura del extremo que se calienta, el cual hemos elegido como origen de abscisas; S es el área de la sección recta; p es el perímetro de esta sección; λ el *coeficiente de conductividad térmica* del material que forma la varilla; y h una constante.

Higenhousz ideó el siguiente procedimiento para comparar los coeficientes de conductividad térmica de distintos materiales: tomemos dos varillas de distintos materiales pero geométricamente iguales, y sometamos un extremo de cada una de ellas a la misma temperatura T_0; la temperatura T_1 se alcanza en una de ellas en un cierto punto de abscisa x_1, mientras que en la otra se alcanzará en otro punto de abscisa x_2. La aplicación de la Ecuación [24.13] a uno y otro caso da:

$$T_1 = T_0 e^{-x_1\sqrt{hp/S\lambda}} = T_0 e^{-x_2\sqrt{hp/S\lambda'}}$$

lo que exige que sea:

$$x_1\sqrt{\frac{hp}{S\lambda}} = x_2\sqrt{\frac{hp}{S\lambda'}}$$

de donde:

$$\lambda' = \frac{x_2^2}{x_1^2}\lambda \qquad [24.14]$$

En consecuencia, determinando experimentalmente las abscisas, x_1 y x_2, en las cuales aparece una misma temperatura, T_1, se puede establecer la comparación entre los coeficientes de conductividad térmica interior de los materiales que forman las varillas y obtener el valor de uno de ellos cuando el otro es conocido.

24.4 Convección

El fenómeno de la convección tiene lugar cuando en un fluido aparecen regiones a diferente temperatura: las zonas más calientes tienen menor densidad y tratan de elevarse respecto de las frías, y por ello más densas, que van a ocupar el espacio dejado por aquéllas.

La convección se denomina *libre* cuando el movimiento del fluido se hace de forma natural por el mecanismo indicado. Así, el Sol, al calentar más unas regiones que otras, origina movimientos convectivos del aire, que dan lugar al viento. Al moverse un fluido en contacto con un sólido, una película de aquél queda adherida a éste. El fluido que forma la película puede moverse en régimen laminar, siendo nula la velocidad de sus partículas en contacto con el sólido. Cuanto más turbulento es el movimiento del fluido, más delgada es la película o capa límite que forma y, puesto que el efecto de ésta es retardador en el proceso de transmi-

sión de calor, la eficiencia de tal proceso aumentará al hacerlo la turbulencia del movimiento del fluido.

El aire, en contacto con una pared caliente, robará calor a ésta y mediante convección lo transportará a zonas elevadas; mientras que otras regiones de aire, alejadas de la pared y más frías, vienen a ocupar el lugar dejado por aquéllas, originando una circulación ascendente del aire en torno a la pared. Si la pared está fria, el proceso es inverso, el aire en contacto con la pared se enfría, aumenta su densidad y desciende, originando una circulación convectiva descendente.

Consideremos una pared de espesor e y coeficiente de conductividad térmica λ. Una de sus caras está en contacto con un fluido, intercambiando calor con él por convección, y la otra se mantiene a temperatura constante T_1. Sea la temperatura de la masa del fluido T_2 (Figura 24.9). Cuando se haya conseguido el régimen permanente, la cantidad de calor que atraviese la pared, en la unidad de tiempo, deberá ser igual a la cedida por la pared del fluido, es decir:

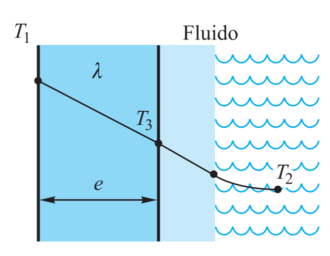


Figura 24.9.

$$\dot{Q} = \frac{\lambda A}{e}(T_1 - T_3) = h_c A(T_3 - T_2) = \frac{T_3 - T_2}{R_c} \qquad [24.15]$$

Coeficiente de convección

en la que son: h_c, el *coeficiente de convección*, que representa la cantidad de calor que se transmite entre la pared y el fluido en contacto, por unidad de tiempo, por grado de diferencia de temperatura y por unidad de superficie de contacto; su unidad en el S.I. es: $\mathrm{J/m^2 \cdot s \cdot K}$ o $\mathrm{W/m^2 \cdot K}$; y R_c es la *resistencia térmica* que se opone al flujo de calor entre la pared y el fluido, siendo ahora su expresión:

Resistencia térmica en convección

$$R_c = \frac{1}{h_c A}$$

El coeficiente de convección depende de múltiples factores, unos geométricos, como la forma de la pared, sus dimensiones o su posición respecto a la vertical, y otros físicos, bien del fluido, como su temperatura, viscosidad, densidad, calor específico, bien de la superficie, como la temperatura o el grado de rugosidad.

Las dos Ecuaciones [24.15] tienen tres incógnitas, $\dot{Q}$, T_3 y h_c, de aquí la indeterminación que presenta su resolución. Experimentalmente y por aplicación de la teoría de la semejanza, puede determinarse el valor de h_c para cada situación concreta, con lo cual pueden ya calcularse $\dot{Q}$ y T_3 en las Ecuaciones [24.15].

En el caso de pared vertical lisa y para convección natural, se ha obtenido que el coeficiente de convección puede expresarse en función de la diferencia de temperaturas mediante:

$$h_c = 1{,}774\,(\Delta T)^{1/4} \quad \mathrm{W/m^2 \cdot K} \qquad [24.16]$$

Watmuff ha propuesto para el coeficiente de convección natural del aire en una pared lisa vertical la ecuación:

$$h_c = 2{,}8 + 3{,}0\ \mathrm{v} \quad \mathrm{W/m^2 \cdot K} \qquad [24.17]$$

en la que v es la velocidad del viento.

Las dos Ecuaciones [24.15] son:

$$\dot{Q} = \frac{\lambda A}{e}(T_1 - T_3) \quad \text{y} \quad \dot{Q} = h_c A(T_3 - T_2) \qquad [24.18]$$

entre las cuales se puede eliminar la temperatura T_3, obteniéndose:

$$T_1 - T_2 = \frac{\dot{Q}}{A}\left(\frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_c}\right) = \frac{\dot{Q}}{A}\frac{1}{\lambda_g} = R_g\dot{Q} \qquad [24.19]$$

siendo λ_g el coeficiente global de transmisión de calor por conducción y convección y $R_g = 1/A\lambda_g$, el coeficiente de resistencia global a la transmisión de calor por conducción y convección. Una vez estimado h_c, se obtiene λ_g y de la [24.19] se obtiene $\dot{Q}$, calculándose T_3 de una de las [24.18].

EJEMPLO 24.3

Se desea mantener una habitación a la temperatura de 25 °C y se considera que únicamente pierde calor de forma significativa a través del muro exterior, cuyo espesor es de 40 cm y coeficiente de conductividad, de 0,8 w/m^2 K. La temperatura del exterior es de −2 °C y el viento es de 60 km/h. Determinemos:

1.º El coeficiente de convección y el coeficiente global de transmisión del calor.

2.º El flujo de calor por unidad de superficie de muro y unidad de tiempo que debe suministrarse a la habitación para mantener su temperatura.

3.º La temperatura de la cara exterior del muro.

Solución:

1.º Puesto que la velocidad del viento es de 60 km/h = 50/3 m/s, la expresión de Watmuff, [24.17] nos da para el coeficiente de convección el valor $h_c = 52{,}8$ w/m$^2 \cdot$ K.

El coeficiente global de transmisión debe verificar:

$$\frac{1}{\lambda_g} = \frac{e}{\lambda_c} + \frac{1}{h_c} = \frac{0{,}4}{0{,}8} + \frac{1}{52{,}8} = 0{,}519$$

de donde $\lambda_g = 1{,}927$ W/m$^2 \cdot$ K

2.º De la [24.19] obtenemos:

$$\frac{\dot{Q}}{A} = \lambda_g(T_1 - T_2) = 1{,}927 \times 27 = 52{,}03 \text{ W/m}^2$$

3.º De la segunda [24.18] se obtiene:

$$T_3 = \frac{\dot{Q}}{Ah_c} + T_2 = \frac{52{,}03}{52{,}8} - 2 = -1{,}015\,^{\circ}\text{C}$$

Como comprobación, puede obtenerse T_3 de la primera de [24.18]:

$$T_3 = T_1 - \frac{e}{\lambda}\cdot\frac{\dot{Q}}{A} = 25 - \frac{0{,}4}{0{,}8} \times 52{,}03 = 25 - 26{,}015 = -1{,}015\,^{\circ}\text{C}$$

24.5 Radiación térmica. Poder emisivo total y espectral

La radiación térmica es la energía emitida por los cuerpos en función de su temperatura absoluta en forma de ondas electromagnéticas. Estas ondas se propagan a través del vacío y también de la materia, en la que es absorbida en mayor o menor cantidad. La propagación del calor por radiación es de vital importancia para los seres vivos, ya que de esa forma llega la energía procedente del Sol.

Las ondas electromagnéticas se caracterizan por su longitud de onda, λ, o por su frecuencia, ν, que según la teoría ondulatoria deben verificar:

$$\lambda \nu = c \qquad [24.20]$$

siendo $c = 299\,792\,458$ m/s, el valor exacto de la velocidad de la luz en el vacío.

Velocidad de la luz en el vacío

La teoría corpuscular establece que la energía radiante se emite o se absorbe en forma de paquetes de energía llamados *fotones*, cuya energía está dada por:

$$e = h\nu \qquad [24.21]$$

en la que $h = 6{,}62606876 \cdot 10^{-34}$ J · s, la constante de Planck. La última expresión nos indica que los fotones de mayor frecuencia son los más energéticos.

Constante de Planck

La radiación térmica es la comprendida entre las longitudes de onda de 10^{-7} y 10^{-4} m, o lo que es igual, 0,1 y 100 μm. En este intervalo está comprendida la banda visible, aquélla a la que es sensible el ojo humano, de 0,38 a 0,78 μm , así como la radiación solar, aproximadamente de 0,25 a 5 μm.

Se define la *potencia emitida* o *flujo energético*, $\phi(T)$, como la *energía total emitida en la unidad de tiempo*. Su unidad en el S.I. es el vatio.

Flujo energético

La *potencia monocromática* o *flujo energético monocromático*, $\phi(\lambda, T)$, es la *potencia emitida por unidad de longitud de onda*. Su unidad en el S.I. es el W/m, si bien usualmente se emplea el W/μm.

Flujo energético monocromático

El *poder emisivo* o *emitancia*, $E(T)$, es la *potencia emitida por unidad de superficie*, $E = d\phi/dA$. Su unidad en el S.I. es el W/m^2.

Emitancia

El *poder emisivo espectral* o *emitancia espectral*, $E(\lambda, T)$, es la *emitancia por unidad de longitud de onda*, $E(\lambda, T) = dE/d\lambda$. Su unidad en el S.I. es W/m^3, si bien usualmente se emplea w/m$^2 \cdot \mu$m. Obviamente, se verifica:

Emitancia monocromática

$$E\,(T) = \int E(\lambda, T)\, d\lambda \qquad [24.22]$$

Si la radiación no es emitida sino que es recibida por una superficie, en lugar de la emitancia, se define de forma análoga la *irradiancia*, G, como la *potencia recibida por unidad de superficie* y, en lugar de la emitancia espectral, se define análogamente la *irradiancia espectral*, $G(\lambda)$, como la *irradiancia por unidad de longitud de onda*.

Irradiancia

Irradiancia espectral

24.6 Reflexión, absorción y transparencia

Al llegar la radiación a la superficie de un cuerpo, ésta se puede repartir siguiendo tres caminos: una parte se refleja en la superficie; otra es absorbida por el cuerpo transformándose en calor y elevando la temperatura de éste; y la tercera atraviesa el cuerpo, diciéndose que se ha transmitido. La conservación de la energía permite escribir:

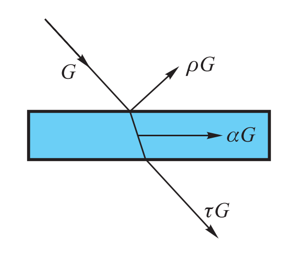


Figura 24.10.

$$G = G_r + G_a + G_t$$

y, dividiendo por G, se expresa:

$$1 = \rho + \alpha + \tau \qquad [24.23]$$

denominándose:

ρ. Factor de reflexión o *reflectividad*, que es el cociente entre la potencia reflejada y la recibida.

- α. Factor de absorción o *absortividad*, que es el cociente entre la potencia absorbida y la recibida.
- τ. Factor de transmisión o *transmisividad*, que es el cociente entre la energía transmitida y la recibida.

Todos estos factores dependen de la longitud de onda de la radiación incidente, así como de la naturaleza del cuerpo receptor y del estado de la superficie de éste.

Se dice que un cuerpo es *opaco* para una cierta longitud de onda λ_1 cuando $\tau(\lambda_1) = 0$; para esta longitud de onda se verificará $\rho(\lambda_1) + \alpha(\lambda_1) = 1$.

Se dice que una superficie es *especular* para una cierta longitud de onda λ_2 cuando verifica $\rho(\lambda_2) = 1$, en cuyo caso, toda la energía en forma de onda electromagnética que llega a su superficie es devuelta por reflexión en ella.

Cuerpo negro

Un cuerpo se denomina *cuerpo negro* cuando toda la energía que llega a su superficie en forma de onda electromagnética es totalmente absorbida, $\alpha = 1$; en cuyo caso, $\rho = \tau = 0$. El cuerpo negro perfecto no existe, pero puede construirse un dispositivo que se comporte como tal practicando un pequeño orificio en la pared de un recinto cerrado, cuya superficie interior se ha pintado de color negro. La radiación que entre por este orificio será completamente absorbida después de pocas reflexiones.

24.7 Reparto espectral de la energía radiante. Ley de Planck

La radiación térmica emitida por los sólidos presenta un espectro continuo, siendo la energía emitida función de la longitud de onda y de la temperatura del cuerpo emisor. La teoría clásica de la radiación no consiguió explicar esta forma de emisión. Fue necesario que Planck (1858-1947), en el año 1900, emitiera su hipótesis de que la energía emitida está cuantizada, es decir, la energía radiante sólo se puede emitir en cantidades discretas, múltiplas de un valor mínimo proporcional a la frecuencia, lo que ha sido expresado en la [24.21]. Con su hipótesis Planck dedujo que la emitancia monocromática o emitancia espectral del cuerpo negro está dada por la expresión:

Ley de Planck

$$E_n = (\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5(e^{hc/\lambda kT} - 1)} = \frac{C_1}{\lambda^5(e^{C_2/\lambda T} - 1)} \qquad [24.24]$$

que es la expresión de la conocida *ley de Planck*, en la que son:

$$C_1 = 2\pi hc^2 = 3{,}7418 \times 10^{-16}\ \text{W} \cdot \text{m}^2$$

y

$$C_2 = hc/k = 1{,}4388 \times 10^{-2}\ \text{m} \cdot \text{K}$$

viniendo expresado E_n en W/m^3, cuyos valores están en excelente concordancia con los datos obtenidos experimentalmente. En la Figura 24.11 se han representado los valores $E_n(\lambda)$ para diferentes temperaturas.

Figura 24.11.

24.8 Ley de Wien

La emitancia espectral del cuerpo negro tiene un máximo, cuyo valor se presenta para una longitud de onda, que debe verificar la condición de máximo:

$$\frac{dE_n(\lambda,T)}{d\lambda} = 0$$

cuya solución da:

$$\lambda_{\text{máx}} \cdot T = 2\,898 \times 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{K} = 2\,898 \text{ } \mu\text{m} \cdot \text{K} \qquad [24.25]$$

Ley de Wien

expresión que se conoce como *ley de Wien*, la cual nos da la longitud de onda a la cual el cuerpo negro presenta un máximo para su emitancia y que es únicamente función de la temperatura del cuerpo emisor. En la Figura 24.11 se ha representado mediante línea discontinua aquélla que une todos los puntos de máximo.

El valor máximo de la emitancia espectral se obtiene sustituyendo $\lambda_{\text{máx}}$, dado por la ley de Wien, en la expresión de la ley de Planck, lo que nos da:

$$E_{n\,\text{máx}}(T) = 1{,}287 \times 10^{-5}\, T^5 \text{ W/m}^3 \qquad [24.26]$$

La ley de Wien nos indica que al aumentar la temperatura disminuye la longitud de onda del máximo, es decir, aumenta la frecuencia de máxima emitancia espectral, y la [24.21] nos indica que, además, también aumenta la emitancia espectral máxima.

Para el cuerpo humano, cuya temperatura media, aproximadamente, puede ser de 310 K, la longitud de onda donde se presenta la emitancia máxima es:

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{2\,898}{310} = 9{,}35 \text{ } \mu\text{m}$$

Para que un cuerpo emita alguna energía en la banda visible debe superar los 1 000 K, en cuyo caso, la longitud de onda de máxima emitancia es 2,9 μm y, para conseguir que la longitud de onda de máxima emitancia esté centrada en la banda visible, 0,58 μm, el cuerpo emisor debe tener la temperatura:

$$T = \frac{2\,898}{0{,}58} = 4\,996{,}55 \text{ K}$$

24.9 Ley de Stefan-Boltzmann

La ley de Stefan-Boltzmann establece que *el poder emisivo total o emitancia total del cuerpo negro es proporcional a su temperatura absoluta*.

Esta ley fue establecida por primera vez en 1879 por Stefan, basándose en resultados experimentales y, en 1884, Boltzmann dio una justificación teórica de la misma basándose en razonamientos termodinámicos. Su expresión es:

$$E_n(T) = \sigma T^4 \text{ W/m}^2 \qquad [24.27]$$

Ley de Stefan-Boltzmann

siendo $\sigma = 56{,}6961 \times 10^{-9}$ w/m$^2 \cdot$ K^4, la constante de Stefan-Boltzmann.

El poder emisivo total o emitancia total del cuerpo negro puede obtenerse integrando la ley de Planck para todas las longitudes de onda:

$$E_n(T) = \int_0^{\infty} E_n(\lambda, T)\, d\lambda = \left(\frac{\pi}{C_2}\right)^4 \frac{C_1}{15} T^4 = \sigma T^4 \qquad [24.28]$$

El valor de la constante de proporcionalidad es:

$$\sigma = \left(\frac{\pi}{C_2}\right)^4 \frac{C_1}{15} = \frac{2\pi^5}{15} \frac{k^4}{c^2 h^3} = 5{,}6696 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$$

Al ser el valor de σ muy pequeño, la radiación total emitida a temperaturas no altas puede ser despreciable. A la temperatura media aproximada del cuerpo humano, unos 310 K, la emitancia total del cuerpo negro es de

$$E_n = 5{,}6696 \times 10^{-8} \times 310^4 = 523{,}6 \text{ W/m}^2$$

que puede ser mucho menor que la transferida al aire por convección, a poco que la temperatura de éste sea baja y circule con una cierta velocidad.

24.10 Factor de emisión o emisividad. Cuerpo gris

Emisividad espectral

Se define la *emisividad espectral* de un cuerpo como el *cociente de su emitancia espectral entre la emitancia espectral del cuerpo negro a la misma temperatura*:

$$\varepsilon_\lambda = \frac{E(\lambda,\ T)}{E_n(\lambda,\ T)} = \varepsilon(\lambda,\ T) < 1 \qquad [24.29]$$

En general, la emisividad espectral será función de la longitud de onda y de la temperatura, siendo un parámetro sin dimensiones, cuyo valor siempre es inferior a la unidad, $0 < \varepsilon_\lambda < 1$, únicamente igual a la unidad para el cuerpo negro.

La emitancia de un cuerpo real será:

$$E(T) = \int_0^\infty E(\lambda,\ T)\, d\lambda = \int_0^\infty \varepsilon_\lambda E_n(\lambda,\ T)\, d\lambda \qquad [24.30]$$

Emisividad total

La *emisividad total* es el cociente de la emitancia total del cuerpo entre la emitancia del cuerpo negro a la misma temperatura:

$$\varepsilon = \frac{E(T)}{E_n(T)} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda E_n(\lambda,T)\, d\lambda}{\sigma T^4} = \varepsilon(T) < 1 \qquad [24.31]$$

que, en general, es función de la temperatura, no tiene dimensiones y su valor siempre será menor que la unidad, salvo para el cuerpo negro, que será $\varepsilon = 1$.

Cuerpo gris

Se define el *cuerpo gris* como el *emisor ideal cuya emitancia espectral es proporcional a la del cuerpo negro a la misma temperatura, siendo su emisividad una constante independiente de la longitud de onda* (Figura 24.12).

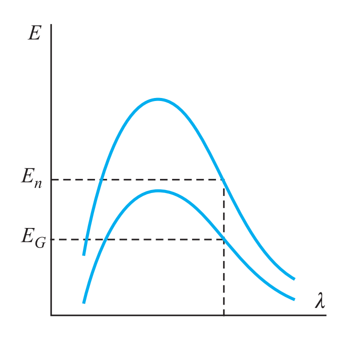


Figura 24.12.

$$\varepsilon_G = \frac{E_G(T)}{E_n(T)} = \text{cte.} \qquad [24.32]$$

En general, se admite que los cuerpos reales se comporten en su emisión radiante como si fueran grises, $\varepsilon_G = \varepsilon$.

24.11 Ley de Kirchhoff

La ley de Kirchhoff establece que *en el equilibrio térmico, la absortividad y la emisividad de un cuerpo son iguales*. Para su deducción, utilizaremos un recinto aislado térmicamente del exterior, introduciendo en él un cuerpo negro y dejando que se alcance el equilibrio térmico. En estas condiciones, la energía absorbida por el cuerpo debe ser igual a la emitida: $G = E_n$.

Si sustituimos el cuerpo negro por otro no negro de la misma forma, al alcanzar el equilibrio térmico se verificará: $\alpha G = E$.

El cociente entre las dos últimas expresiones es $\alpha = E/E_n$ y, de acuerdo con la [24.31], $\alpha = \varepsilon$, que es la expresión de la ley de Kirchhoff.

24.12 Intercambio de calor por radiación

Puesto que la emitancia es el flujo energético por unidad de superficie, $d\phi = E\,dA$, si la superficie es homogénea, el flujo energético total emitido por un cuerpo negro es:

$$\phi_n = AE_n = A\sigma T^4 \text{ (w)}$$

y por un cuerpo gris: $\phi = AE = A\varepsilon\sigma T^4$ (w).

Parte de la energía emitida será absorbida por los cuerpos que se encuentren en su trayectoria, verificándose un intercambio energético por radiación. La energía transferida entre dos superficies depende, además de sus temperaturas absolutas y de sus propiedades superficiales (emisividad y absortividad), de su configuración geométrica y su posición relativa, todo lo cual se engloba en un factor que se denomina *factor de forma*.

El sentido físico del factor de forma, que denominaremos F_{12}, es la fracción de energía emitida por la superficie del cuerpo 1 que es absorbida por la del cuerpo 2. Si ambas superficies son negras, la energía emitida por 1 que es absorbida por 2 es:

$$E_{n1}A_1F_{12}$$

Análogamente, la energía emitida por 2 que es absorbida por la superficie 1 es:

$$E_{n2}A_2F_{21}$$

siendo F_{21} la fracción de la energía emitida por la superficie de 2 que es absorbida por la superficie de 1. El intercambio neto de energía entre ambas superficies en la unidad de tiempo es:

$$\dot{Q}_n = E_{n1}A_1F_{12} - E_{n2}A_2F_{21}$$

Si ambas superficies se mantienen a la misma temperatura, $E_{n1} = E_{n2}$ y, además, el intercambio neto de energía debe ser nulo, $Q_n = 0$, lo que obliga a que sean:

$$A_1F_{12} = A_2F_{21}$$

Y, con ello, el intercambio neto de energía en la unidad de tiempo se puede expresar de las siguientes formas:

$$\dot{Q}_n = A_1F_{12}(E_{n1} - E_{n2}) = A_2F_{21}(E_{n1} - E_{n2}) =$$
$$= A_1F_{12}\sigma(T_1^4 - T_2^4) = A_2F_{21}\sigma(T_1^4 - T_2^4) \qquad [24.33]$$

La obtención de los factores de forma es, en general, compleja, pero hay dos casos que, a la par de sencillos, son muy importantes en las aplicaciones:

a) Un cuerpo colocado dentro de un recinto aislado térmicamente.

b) Dos superficies como sendos planos paralelos.

a) En este caso, toda la radiación que sale de la superficie del cuerpo encerrado será interceptada por la superficie interior del recinto y absorbida si ésta se

comporta como cuerpo negro, con lo cual el factor de forma es $F_{12} = 1$, y el flujo neto de energía intercambiado, aplicando la [24.33], es:

$$\dot{Q}_n = A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \qquad [24.34]$$

Si el cuerpo emisor no es negro, pero la superficie interior del recinto sí:

$$\dot{Q} = A_1 \varepsilon_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \qquad [24.35]$$

Si ambas superficies, la del cuerpo emisor y la interior del recinto, son grises, el flujo energético intercambiado se expresa:

$$\dot{Q} = A_1 F'_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \qquad [24.36]$$

siéndo ahora F'_{12} una expresión función de las emisividades de ambas superficies.

b) En este caso, debemos suponer que ambos planos sólo emiten por sus caras enfrentadas y que no pierden energía por las exteriores. En tal situación, toda la energía que sale de la superficie 1 llegará a la 2 y, si ésta se comporta como cuerpo negro, será completamente absorbida. Recíprocamente, toda la energía que sale de la 2 llegará a la 1 y, si ésta se comporta como cuerpo negro, será completamente absorbida. En consecuencia, en tal situación son $F_{12} = F_{21} = 1$, y el flujo neto de energía por unidad de superficie intercambiado entre ambas es:

$$\frac{\dot{Q}_n}{A} = \sigma (T_1^4 - T_2^4) \ (\mathrm{W/m^2}) \qquad [24.37]$$

Si las superficies no se comportan como cuerpos negros y sus emisividades respectivas son ε_1 y ε_2, la radiación emitida por cada una de las superficies irá siendo parcialmente absorbida y reflejada hasta su total extinción. En la Figura 24.13 hemos representado las fracciones absorbida y reflejada de la energía emitida por unidad de superficie y unidad de tiempo por la 1, habiendo considerado $\alpha_1 = \varepsilon_1$ y $\alpha_2 = \varepsilon_2$.

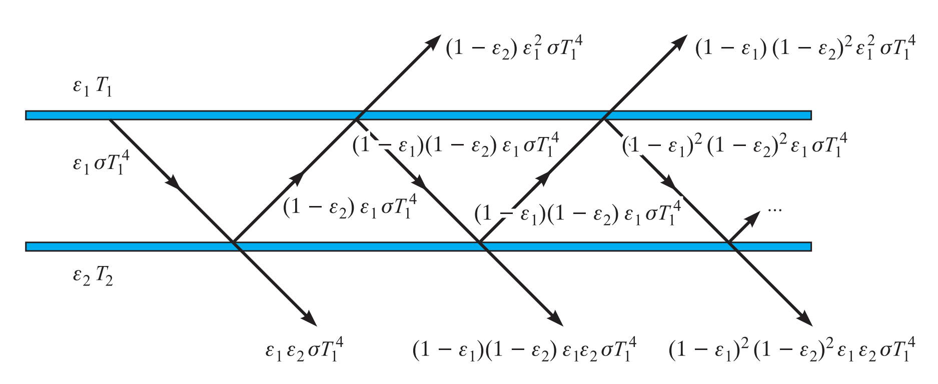


Figura 24.13.

La cantidad total de energía absorbida por la placa 2 es:

$$q_{12} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sigma T_1^4 [1 + (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) + (1 - \varepsilon_1)^2 (1 - \varepsilon_2)^2 + \cdots]$$

La serie entre corchetes es geométrica, de razón $(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)$, cuya suma es:

$$\frac{1}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)}$$

y la energía total absorbida por la placa 2 es:

$$q_{12} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \sigma T_1^4}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)} = \frac{\sigma T_1^4}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

Análogamente, la energía absorbida por la placa 1 de la emitida por unidad de superficie y unidad de tiempo por la 2, es:

$$q_{21} = \frac{\sigma T_2^4}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

En definitiva, el flujo de energía neto intercambiado por unidad de superficie es:

$$q = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1} \qquad [24.38]$$

que coincide con la [24.37] para $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$.

Teniendo en cuenta que:

$$T_1^4 - T_2^4 = (T_1^2 - T_2^2) \cdot (T_1^2 + T_2^2) = (T_1 - T_2)(T_1 + T_2)(T_1^2 + T_2^2)$$

el intercambio neto de energía radiante, aun en el caso más complejo de la Expresión [24.36], siempre puede expresarse de la forma:

$$\dot{Q} = A_1 \sigma F'_{12} (T_1 - T_2)(T_1 + T_2)(T_1^2 + T_2^2) = h_r A_1 (T_1 - T_2) \qquad [24.39]$$

siendo $h_r = \sigma F'_{12} (T_1 + T_2)(T_1^2 + T_2^2)$ el *coeficiente de transmisión de calor por radiación* y su inversa, $R_r = 1/A_1 h_r$, *el coeficiente de resistencia a la transmisión por radiación*.



EFECTO INVERNADERO

La radiación que nos llega del Sol lo hace mediante las únicas ondas que pueden propagarse en el vacío, las ondas electromagnéticas. En la superficie exterior de la atmósfera el valor de su intensidad o energía que llega en la unidad de tiempo por unidad de superficie normal a la dirección de incidencia, se denomina *constante solar* y después de muchas mediciones realizadas por la NASA mediante globos, sondas, aviones y satélites, el World Radiation Center ha adoptado el valor $G_c = 1\,367$ W/m^2, que es la misma energía que nos llegaría a la superficie de la Tierra de no haber atmósfera. Esta energía llega distribuida en diferentes longitudes de onda, formando un espectro que se denomina *espectro solar extraterrestre*, el cual abarca desde 0,2 a 2,4 μm, que también ha sido determinado por los organismos citados y se ajusta bastante bien al espectro emitido por un cuerpo negro a la temperatura de 5 762 K. Aproximadamente un 53% de la energía llega en la banda infrarroja, de 0,78 a 2,4 μm; un 39%, en la banda visible, de 0,38 a 0,78 μm, y un 8% en la región ultravioleta, de 0,2 a 0,38 μm.

Las capas superiores de la atmósfera reflejan aproximadamente un 22,5% de la radiación solar incidente, devolviéndola al espacio, y el resto está filtrado por la atmósfera antes de llegar a la superficie terrestre. Los absorbentes de la radiación son gases que se encuentran en la atmósfera en su composición normal, siendo los principales: el ozono, O_3, que absorbe en la banda ultravioleta; el vapor de agua, H_2O, y el oxígeno, O_2, que absorben en la banda infrarroja inferior a 1,5 μm, y en la banda infrarroja desde 1,5 a 2 μm, los absorbentes son de nuevo el vapor de agua y el dióxido de carbono, CO_2.

Por su parte, la Tierra emite energía en la banda infrarroja de acuerdo con la ley de Stefan-Boltzman (Ecuación 24.27) y con un reparto espectral dado por la ley de Plack (Ecuación 24.23), presentando un máximo de emisión dado por la ley de Wien (Ecuación 24.25). De acuerdo con esta ley y tomando como temperatura media de la Tierra 15 ºC, el máximo de emisión se encuentra en 10 μm. La banda de emisión va aproximadamente desde las 2 μm a las 60 μm. La salida de esta radiación al espacio exterior también es filtrada por la atmósfera, pero en esta región la atmósfera es muy absorbente y sólo deja unas pequeñas ventanas de escape, situadas en las bandas aproximadamente de 2 a 2,5 μm, de 4 a 4,5 μm y de 8 a 15 μm. En la banda de 2,5 a 4 μm los gases absorbentes son el vapor de agua, el dióxido de carbono, CO_2, y el metano NH_4; en la banda de 4,5 a 8 μm, son el vapor de agua, el dióxido de carbono y el óxido nitroso, N_2O, y a partir de 15 μm el vapor de agua y el dióxido de carbono. Esta energía absorbida por los gases de la atmósfera es de nuevo reirradiada y parte devuelta a la superficie terrestre, aumentando la temperatura ambiente.

El fenómeno descrito, por el cual la transferencia de energía radiante entre el Sol y la superficie terrestre, y entre esta y el espacio exterior, está condicionada por la transparencia de la atmósfera a las diferentes longitudes de onda, facilitando en gran medida la llegada de la radiación solar y condicionando fuertemente la salida de la radiación emitida por la Tierra, se denomina *efecto invernadero*. Gracias al cual se mantiene una temperatura de equilibrio en la superficie terrestre que hace posible la vida tal y como la conocemos. De no existir atmósfera y, por tanto, efecto invernadero, la temperatura media sobre la superficie terrestre se estima que sería unos 40 ºC inferior a la actual, es decir, estaría en torno a los -25 ºC, lo que evidentemente haría imposible la vida en el estado actual. En la figura se indica el balance energético aproximado entre radiación, atmósfera y suelo.

El aumento de la concentración en la atmósfera de los gases que provocan el efecto invernadero, debido principalmente a la combustión de los combustibles fósiles, la deforestación y algunas actividades industriales y agrícolas, puede modificar el equilibrio energético entre radiación, atmósfera y superficie terrestre, y elevar en demasía la superficie media de esta con los inconvenientes que ello puede conllevar, como aumento de la evaporación, dilatación de los océanos, fusión de los casquetes polares o cambio en el régimen de precipitaciones.

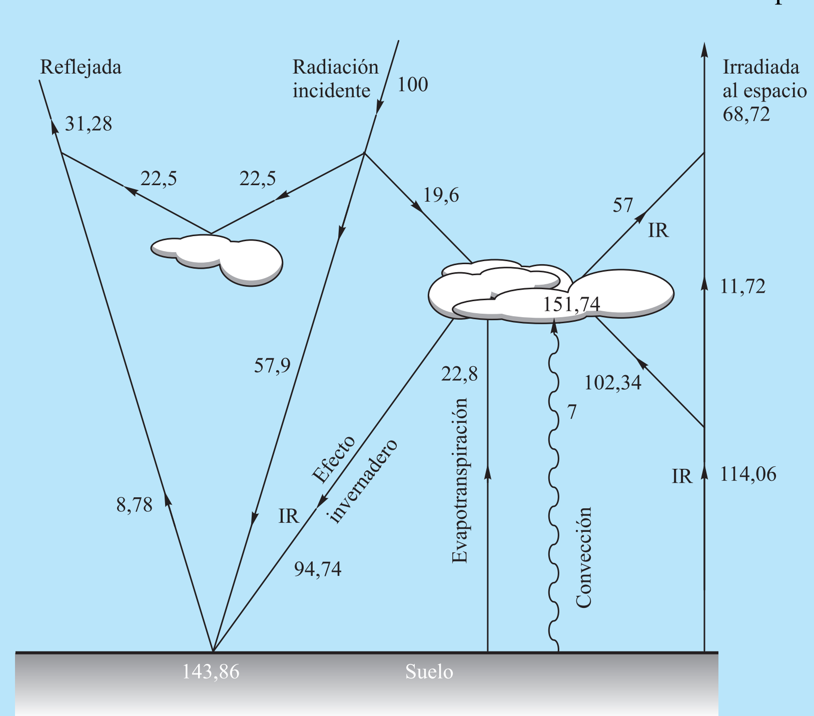
La concentración de CO_2 en la atmósfera viene aumentando continuamente, desde unas 280 partes por millón en volumen (ppmv), a principios del siglo XIX, pasando por unas 295 ppmv, a principios del XX, hasta unos 370 ppmv, en la actualidad. Este gas es el causante de un 68% aproximadamente del efecto invernadero. La mayor fuente del CO_2 atmosférico es la combustión de combustibles fósiles, estimándose el aumento de su concentración en la atmósfera, aproxi-

madamente, en 1,36 ppmv/año. Sus principales sumideros son los océanos y la biomasa.

El óxido nitroso N_2O es producido por la actividad microbiana de suelos y océanos, así como por ciertas actividades industriales, fundamentalmente la producción de ácido nítrico, y por la fertilización agrícola. El óxido nitroso se destruye mediante procesos fotoquímicos en la troposfera, dando lugar al ozono troposférico. La concentración de óxido nitroso en la atmósfera también viene creciendo constantemente a razón de unas 0,8 ppbv/año, pero su participación en la creación del efecto invernadero solamente es de, aproximadamente, el 6% del total.

El metano se produce por reducción de la materia orgánica, fundamentalmente en terrenos pantanosos, cultivos de arroz, sistema digestivo de los rumiantes y escape de gas natural. El metano se elimina en la estratosfera y por combustión, es veinte veces más eficaz que el CO_2 en la producción de efecto invernadero, pero su participación en este es sólo del 18%, debido a su baja concentración atmosférica, aproximadamente 1,75 ppmv.

El aumento de potencia radiante absorbida por efecto invernadero, debido al aumento de los citados gases, se estima en 2,8 W en los últimos dos siglos. Asimismo, los modelos matemáticos para el estudio del cambio climático establecen que una duplicación en el contenido de CO_2 en la atmósfera supondría un aumento de potencia radiante absorbida de 4 W.



El vapor de agua es un gas fundamental en la regulación del efecto invernadero. Las nubes intervienen en el balance energético de energía radiante como se ha indicado en la figura. Por un lado, reflejan una parte importante de la energía solar incidente y, por otro, absorben radiación infrarroja, fundamentalmente la banda emitida por la Tierra. Para estudiar el efecto de las nubes, la NASA viene realizando, desde 1984, el proyecto Earth Radiation Budget Experiment (ERBE), consistente en medir la radiación que llega y sale de la tierra en las diferentes condiciones de nubosidad, para lo cual utiliza tres satélites específicos. El resultado ha sido que las nubes producen un efecto de enfriamiento en la temperatura media de la Tierra, reduciendo el efecto invernadero, con una disminución de la potencia de energía radiante absorbida de 13,2 W, lo que es casi cinco veces mayor que el efecto debido al aumento de gases de efecto invernadero y más de tres veces lo que supondría la duplicación de la concentración de CO_2 en la atmósfera. De momento el hombre no es capaz de intervenir de forma eficaz en el proceso de formación de nubes, lo que supondría controlar el efecto invernadero.

La realidad es que determinaciones exhaustivas de la temperatura media de la Tierra han determinado que en el último siglo ha aumentado 0,6 ºC y en los últimos 40 años, 0,4 ºC; lo cual no puede establecerse de forma inequívoca que se deba a efectos antropogénicos o simplemente a variabilidad climática natural. Su estudio se está realizando por el Intergovernmental Panel in Climate Change (IPCC), lo cual está lleno de dificultades por la complejidad de las interacciones entre los diferentes subsistemas climáticos y la dificultad de modelizar la intervención en aquellas de las nubes.

Movimiento ondulatorio

CAPÍTULO 25

25.1 Propagación de una perturbación. Movimiento ondulatorio

Si en un punto de un medio material provocamos una perturbación, la experiencia comprueba que la perturbación se propaga en el medio, llegando a los demás puntos de éste con un retraso tanto mayor, si el medio es homogéneo, cuanto más alejado se encuentre del centro o *foco* donde se produjo la perturbación. A este fenómeno de *propagación de una perturbación* en un medio se le denomina *movimiento ondulatorio*.

La perturbación puede ser de naturaleza muy diversa y su propagación se realiza por diferentes causas, dependiendo de la naturaleza física de la perturbación a propagar y las características del medio propagador.

Se propaga energía

El denominador común que tienen todos los movimientos ondulatorios es que *jamás se propaga materia*, *lo que se propaga es energía*. Por tanto, podemos considerar el movimiento ondulatorio como un fenómeno de propagación de energía. Un ejemplo clásico pone esto de manifiesto. Sea un pequeño corcho situado sobre la superficie del agua, si en un punto de la citada superficie se provoca una perturbación, por ejemplo, dejando caer un objeto, la perturbación se propaga a los diferentes puntos de la superficie y, al llegar a donde está el corcho, hace que éste se mueva en sentido vertical, subiendo y bajando, pero no en el sentido de la propagación, que es el plano horizontal de la superficie del agua. Las partículas de agua en contacto con el corcho oscilan en sentido vertical, alrededor de su posición de equilibrio, pero no se desplazan en el sentido de propagación de la onda. En este caso, la onda se propaga merced a la tensión superficial de la superficie del agua.

Otro ejemplo puede ser la propagación de una vibración a lo largo de una cuerda tensa: las partículas de la cuerda vibran en sentido transversal a la cuerda, mientras que la propagación se hace a lo largo de ella. En la Figura 25.1 se representa este fenómeno. En este caso, la propagación se hace merced a las características elásticas de la cuerda.

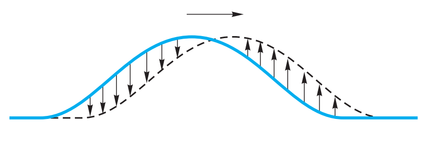


Figura 25.1.

Se puede transportar información

Un aspecto muy importante es que las ondas, además de transportar energía, son vehículo para el *transporte de información*, y todos los modernos sistemas de transporte de información y comunicación están basados en la propagación y características de las ondas, muy en especial las electromagnéticas.

Frente de onda

Todos los puntos del medio a los cuales la perturbación llega en un mismo instante estarán siempre en el mismo estado de perturbación, y su lugar geométrico, en general una superficie, se denomina *superficie de onda* o *frente de onda*. Según sea la forma geométrica de éste, así es su denominación, diciéndose que las ondas son planas, esféricas, cilíndricas, elipsoidales, etc.

En el movimiento ondulatorio, la perturbación propagada se debilitará debido no solamente a la disipación de energía por absorción en el medio propagador, sino también a que la energía comunicada en la perturbación inicial se va distribuyendo cada vez entre un mayor número de partículas y la amplitud de la vibración de éstas irá disminuyendo.

La perturbación que se propaga puede ser la variación de una magnitud escalar, como son el desplazamiento o la densidad, así es en el caso de las ondas sonoras, o de una magnitud vectorial, como es el caso de las ondas electromagnéticas, en las cuales las magnitudes variables son los vectores campo eléctrico y magnético.

En general, a las ondas se las denomina mecánicas, térmicas, electromagnéticas, de probabilidad o gravitacionales, según que la magnitud variable que defina la perturbación pertenezca al campo de la Mecánica, la Termodinámica, el Electromagnetismo, la Mecánica cuántica o la Gravitación, respectivamente.

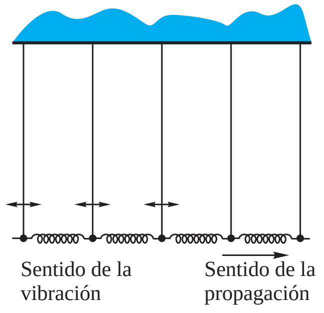


Figura 25.2a.

25.2 Ondas longitudinales y transversales

Si la dirección en la cual varía el valor de la magnitud que define la perturbación coincide con la dirección de propagación de la misma, las *ondas* se llaman *longitudinales*, como es el caso de las ondas sonoras (Figura 25.2a), y si la dirección de variación del valor de la magnitud que define la perturbación es normal a la dirección de propagación de la misma, las *ondas* se llaman *transversales*, como es el caso de las ondas electromagnéticas o de las superficiales en líquidos (Figura 25.2b).

Para que una onda mecánica transversal se propague en un cierto medio, es necesario que éste sea capaz de soportar esfuerzos cortantes, puesto que de lo contrario la perturbación primitiva no se transmitiría a las contiguas. Ésta es la razón por la cual en los gases no se propagan las ondas mecánicas transversales, y en los líquidos casi únicamente se propagan las superficiales, en virtud de la tensión superficial.

En las ondas longitudinales hay condensación de materia, es decir, variaciones de densidad en los diferentes puntos del medio, y las ondas se propagan cualquiera que sea la naturaleza de éste.

Las electromagnéticas, como son la luz visible, las ondas de radio, las de TV, los rayos X, etc., no requieren medio alguno para su propagación y, posteriormente, estudiaremos cómo estas ondas se van autogenerando al ir variando los campos eléctrico y magnético.

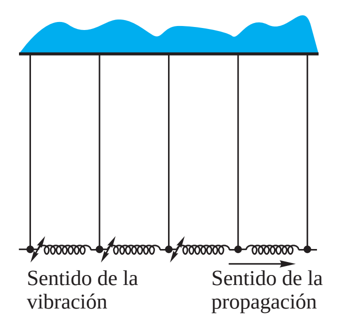


Figura 25.2b.

25.3 Descripción matemática de un movimiento ondulatorio no amortiguado unidimensional

La descripción matemática de un movimiento ondulatorio no amortiguado unidimensional se realiza mediante una función $Y = f(x, t)$, en la que Y determina el estado de la perturbación, x la distancia al foco de la perturbación y t el tiempo. Para un punto determinado del medio, la perturbación es función del tiempo, y para un instante dado, la perturbación es función de x.

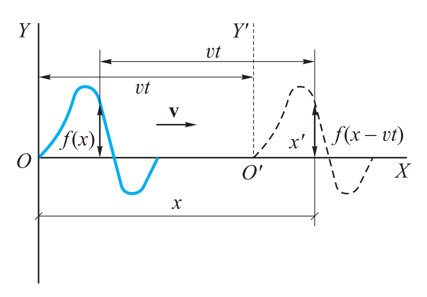


Figura 25.3.

Supongamos que en el instante inicial el estado de la perturbación está dado por la función $Y = f(x)$, que se representa en la Figura 25.3 mediante línea continua. Es decir, el foco de la perturbación ha realizado el primer periodo de su movi-

miento vibratorio y en el medio ha aparecido una onda, $Y(x, 0) = f(x)$, que se va a propagar.

Si la perturbación se mueve con velocidad constante v, que llamaremos *velocidad de fase*, al cabo de un cierto tiempo t habrá recorrido un espacio vt, y se encontrará en la posición indicada con puntos en la Figura 25.3. Si trasladamos el origen del sistema de referencia a O', la misma función que describe la onda en el instante $t = 0$, con origen O, es la que describe la onda en el instante t con origen O':

Velocidad de fase

$$Y(x, t) = f(x')$$

y, puesto que se verifica la relación $x' = x - vt$, resulta que la función que representa la propagación de la perturbación con origen O, alejándose del foco, es:

$$Y(x, t) = f(x - vt) \qquad [25.1]$$

La ecuación de la onda que se propaga en sentido contrario se obtiene sustituyendo en la anterior v por $-v$, con lo cual, la función que la expresa es:

$$Y(x, t) = f(x + vt) \qquad [25.2]$$

Es evidente que el estado de perturbación de un punto en el instante t es el mismo que tenía en el instante cero el punto separado de aquél una distancia vt. En el foco de la perturbación la variación de ésta estará dada por una función del tipo $Y(0, t) = F(t)$. Si la velocidad de propagación es v, el tiempo que tardará en llegar a un punto situado a la distancia x del centro es, supuesto el medio homogéneo e isótropo, x/v. La perturbación llega con un retraso x/v, y el estado de perturbación del punto es el que tenía el foco en el instante $t - x/v$. La propagación de la perturbación queda descrita por una función del tipo:

$$Y(x, t) = F\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

Especial interés tiene el estudio de la propagación de una onda armónica. Sea, por ejemplo, la onda:

$$Y(x, t) = A \operatorname{sen} k(x - vt) \qquad [25.3]$$

en la que A es la amplitud de la onda o valor máximo de la perturbación; x, la distancia al foco; k, el número de onda; v, la velocidad de propagación o velocidad de fase, y $k(x - vt)$, la fase de la onda.

Amplitud
Número de onda
Fase
Longitud de onda

Se define la *longitud de onda* del movimiento ondulatorio como *la distancia, medida según la dirección de propagación, entre dos puntos consecutivos que en todo momento tiene el mismo estado de perturbación*, lo que también puede definirse como la *longitud mínima de onda que por repetición puede generar la onda completa*. La simbolizaremos mediante λ y su valor se calcula así:

$$A \operatorname{sen} k(x - vt) = A \operatorname{sen} k(x + \lambda - vt)$$

lo que exige que sea:

$$k(x + \lambda - vt) = 2\pi + k(x - vt)$$

y

$$\lambda = 2\,\frac{\pi}{k} \qquad [25.4]$$

La longitud de onda también podría denominarse *periodo espacial*, puesto que la onda se repite cada longitud λ. A la constante $k = 2\pi/\lambda$ se le denomina *número de onda*, porque es el número de longitud de onda en la distancia 2π.

Puntos en fase

Cuando dos puntos en todo instante están en igual estado de perturbación se dice que están en fase, debiendo verificarse $Y_1 = Y_2$, es decir:

$$\operatorname{sen} k(x_1 - vt) = \operatorname{sen} k(x_2 - vt)$$

lo que exige que sea:

$$k(x_2 - vt) = 2n\pi + k(x_1 - vt)$$

o

$$k(x_2 - x_1) = 2n\pi$$

que puede expresarse:

$$x_2 - x_1 = n\lambda \qquad [25.5]$$

es decir, *están en fase todos los puntos cuya separación entre sí es igual a un número entero cualquiera de longitud de onda.*

Puntos en oposición

Se dice que dos puntos vibran en oposición cuando se verifica $Y_2 = -Y_1$, es decir:

$$\operatorname{sen} k(x_2 - vt) = -\operatorname{sen} k(x_1 - vt)$$

lo que exige que sea:

$$k(x_2 - vt) = (2n + l)\pi + k(x_1 - vt)$$

y

$$x_2 - x_1 = (2n + 1)\frac{\pi}{k} = (2n + 1)\frac{\lambda}{2} \qquad [25.6]$$

resultando que *están en oposición todos los puntos cuya separación entre sí es igual a un número impar de medias longitudes de onda.*

Frecuencia

Se denomina *frecuencia del movimiento ondulatorio*, ν, *al número de ondas que pasan por un punto fijo en la unidad de tiempo*; verificará $v = \lambda\nu$, puesto que el número de ondas que pasan en la unidad de tiempo multiplicado por la longitud de cada onda es la longitud que pasa en la unidad de tiempo, es decir, la velocidad de la onda. Si tenemos en cuenta que $\omega = 2\pi\nu$, podemos escribir:

$$Y(x, t) = A \operatorname{sen}\left(kx - \frac{2\pi}{\lambda} vt\right) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t) \qquad [25.7]$$

Si P es el periodo de la oscilación, al ser $P = 1/\nu = 2\pi/\omega$, resulta la expresión:

$$Y(x, t) = A \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{P}\right) \qquad [25.8]$$

Por consiguiente, en el movimiento ondulatorio sinusoidal hay dos tipos de periodicidad, una en el tiempo, de periodo P, y otra en el espacio, de periodo λ. Entre estos dos periodos existe la relación:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = vP \qquad [25.9]$$

La especial importancia de las ondas armónicas se debe al hecho de que cualquier perturbación periódica puede descomponerse en una superposición de ondas armónicas de frecuencias y fases adecuadas.

También la Ecuación [25.7] puede escribirse de la forma:

$$Y(x,\ t) = A\,\text{sen}\,\omega\left(\frac{k}{\omega}x - t\right) = A\,\text{sen}\,\omega\left(\frac{x}{\lambda\nu} - t\right) = A\,\text{sen}\,\omega\left(\frac{x}{v} - t\right)$$

Es evidente que una onda armónica puede expresarse como exponencial compleja de la forma:

$$Y = Ae^{j(kx - wt)} \qquad [25.10]$$

EJEMPLO 25.1

Una cuerda tensa vibra transversalmente siendo la ecuación de la onda propagada:

$$Y = 0{,}5\,\text{sen}\,2\pi(x - 103t)$$

En la que Y es el desplazamiento transversal de cada punto de la cuerda en centímetros.
Calculemos:

a) Su amplitud, longitud de onda, periodo, frecuencia, pulsación, velocidad de propagación y número de onda.
b) La velocidad máxima con que se mueve cada punto de la cuerda.
c) La pendiente máxima de la cuerda.

Las longitudes están dadas en centímetros y el tiempo en segundos.

Solución:

a) Comparando la ecuación dada con la [25.8] se deduce: $A = 0{,}5$ cm, $\lambda = 1$ cm y $P = 10^{-3}$ s.
La frecuencia es:

$$\nu = \frac{1}{P} = 10^3 \text{ Hz}$$

La pulsación será:

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi 10^3 \text{ rad/s}$$

La velocidad se calcula teniendo en cuenta que es:

$$v = \lambda\nu = 10^3 \text{ cm/s}$$

y el número de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \text{ cm}^{-1}$$

b) La velocidad de los puntos de la cuerda está dada por:

$$V = \frac{\partial Y}{\partial t} = -0{,}5 \cdot 2\pi \cdot 10^3 \cos 2\pi(x - 10^3 t)$$

La velocidad máxima es:

$$V_{\text{máx}} = 10^3\pi \text{ cm/s}$$

c) La pendiente de los puntos de la cuerda está dada por:

$$p = \frac{\partial Y}{\partial x} = 0{,}5 \times 2\pi \times \cos 2\pi\,(x - 10^3 t)$$

y la pendiente máxima es $P_{\text{máx}} = \pi$.

EJEMPLO 25.2

Una onda de frecuencia $\nu = 400$ Hz tiene una velocidad de propagación $v = 320$ m/s. Calculemos:

a) La separación espacial entre dos puntos cuya diferencia de fase sea de 60º.

b) La diferencia de fase entre dos estados de perturbación de un mismo punto en dos instantes separados por el intervalo de tiempo de 10^{-3} s.

Solución:

a) La longitud de esta onda es:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{420}{400} = 0{,}8 \text{ m}$$

La fase en cada uno de los puntos es:

$$\varphi_1 = kx_1 - \omega t \quad \text{y} \quad \varphi_2 = kx_2 - \omega t$$

la diferencia de fase será:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = k\,(x_2 - x_1) = \frac{\pi}{3}$$

por tanto es:

$$x_2 - x_1 = \frac{\pi}{3k} = \frac{\lambda}{6} = \frac{2}{15} = 0{,}133 \text{ m}$$

b) Las fases en cada uno de los instantes, para el punto de abscisa x_1, son:

$$\varphi_1 = kx_1 - \omega t_1 \quad \text{y} \quad \varphi_2 = kx_1 - \omega t_2$$

y la diferencia de fases es:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \omega\,(t_2 - t_1) = 2\pi\nu \cdot 10^{-3} = 0{,}8\pi \text{ rad}$$

25.4 Propagación en dos y tres dimensiones

Un movimiento ondulatorio en dos dimensiones está definido por una función del tipo $Y = f(x, y, t)$; así son las ondas producidas en la superficie de los líquidos. Las ondas bidimensionales pueden ser lineales, como son las producidas cuando se golpea periódicamente la superficie de un líquido con una varilla recta paralela a la misma y que abarque todo el líquido; circulares (Figura 25.4a), como son las pro-

ducidas al golpear periódicamente la superficie en un punto, y en general, las ondas toman nombre de la forma geométrica del frente de onda.

En tres dimensiones, el movimiento ondulatorio más general está representado por una función del tipo $Y = f(x, y, z, t)$. Según la forma geométrica del frente de onda, así se denominan éstas, siendo ondas planas cuando la superficie de onda son planos paralelos, ondas esféricas cuando son esferas concéntricas y, en general, ondas cilíndricas, elipsoidales, etc.

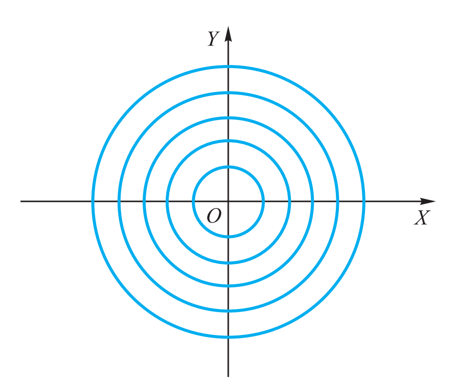


Figura 25.4a.

La onda que hemos estudiado como unidimensional, $Y(x, t) = f(x - vt)$, en el espacio de tres dimensiones, representa una onda plana, puesto que en cualquier punto del plano $x = x_1$ toma el mismo valor el estado de la perturbación Y. Lo característico de estas ondas es su dirección de propagación, que se define mediante un versor $\mathbf{u}$ normal al plano de la onda. Si la dirección de propagación es paralela al eje de las equis y el vector de posición de un punto cualquiera del frente de onda es $\mathbf{r}$ (Figura 25.4b), será $x = \mathbf{r} \cdot \mathbf{u}$ y podremos escribir:

$$Y = f(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} - vt)$$

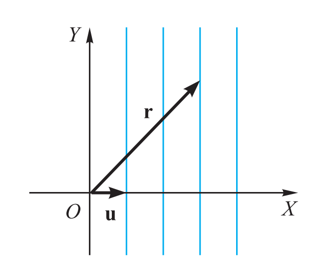


Figura 25.4b.

Esta ecuación, en general, representa una onda plana que se propaga en dirección del versor $\mathbf{u}$, puesto que $\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}$ es la distancia del origen al frente de onda. En el caso de una onda plana armónica la ecuación es:

$$Y = A \operatorname{sen} k(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} - v \cdot t) = A \operatorname{sen}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{k} - \omega t) \qquad [25.11]$$

Vector de onda

Al vector $\mathbf{k} = k\mathbf{u}$ se le denomina *vector de onda* o *vector de propagación*.

EJEMPLO 25.3

Una onda armónica plana se propaga en la dirección y sentido del vector $\mathbf{m} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Su amplitud es $A = 2$ cm, su frecuencia, $\nu = 510$ Hz y su longitud de onda, $\lambda = 2/3$ m. Determinemos:

a) El vector de onda.

b) La velocidad de propagación de la onda y su pulsación.

c) La ecuación de la onda.

Solución:

a) El vector de onda se calcula así:

$$\mathbf{k} = k\mathbf{u} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\mathbf{m}}{m} = \pi(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$$

b) La velocidad de propagación es:

$$v = \lambda\nu = \frac{2}{3} \times 510 = 340 \text{ m/s}$$

La pulsación es:

$$\omega = 2\pi\nu = 1\,020\pi$$

c) La ecuación de la onda es de la forma:

$$Y = 2 \cdot 10^{-2} \operatorname{sen}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{k} - 1\,020\pi t)$$

Puesto que es:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

será:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{k} = \pi(2x + y + 2z)$$

y, con ello, la ecuación de la onda es:

$$Y = 2 \cdot 10^{-2} \operatorname{sen} \pi(2x + y + 2z - 1\,020t)$$

25.5 Intensidad del movimiento ondulatorio

Se define la *intensidad del movimiento ondulatorio* como *la energía trasportada en la unidad de tiempo a través de la unidad de superficie normal a la dirección de propagación*. De la propia definición se deduce que la intensidad del movimiento ondulatorio tiene por ecuación de dimensiones:

$$[I] = [E]T^{-1}L^{-2} = [F]T^{-1}L^{-1} = MT^{-3}$$

Su unidad en el S.I. será $\mathrm{J \cdot m^{-2} \cdot s^{-1} = w/m^2}$.

Consideremos un área unidad situada normal a la dirección de propagación. La energía que en un segundo atraviesa esta área es la contenida en un cilindro de base el área citada, arista v y volumen también v, siendo v la velocidad de propagación de las ondas (Figura 25.5).

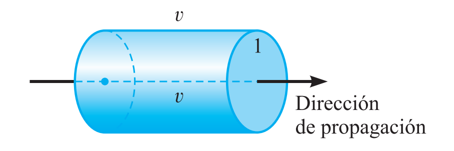


Figura 25.5.

La energía contenida en este volumen es:

$$I = ne$$

siendo n el número de partículas contenidas en el volumen v, y e la energía media de cada una de éstas debida a su estado de vibración. Al estar sometida cada una de las partículas a un movimiento vibratorio armónico simple, su energía debida a éste será, de acuerdo con [13.13]:

$$e = \frac{1}{2} m\, \omega^2 A^2$$

y, en consecuencia es:

$$I = \frac{1}{2} n\, m\, \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \rho\, \omega^2 A^2 v \qquad [25.12]$$

siendo ρ la densidad del medio; A, la amplitud de la oscilación de las partículas del medio; ω, la pulsación de esa oscilación y v, la velocidad de propagación de las ondas. En función del periodo o la frecuencia se escribe, respectivamente:

$$I = 2\rho A^2 \frac{\pi^2}{P^2} v = 2\rho A^2 \pi^2 \nu^2 v \qquad [25.13]$$

resultando ser la intensidad del movimiento ondulatorio proporcional a la densidad del medio propagador, al cuadrado de la amplitud de la vibración de las partículas del medio propagador, a la velocidad de propagación del movimiento ondulatorio, y al cuadrado de la frecuencia.

Densidad de energía

La densidad de energía espacial o energía por unidad de volumen es:

$$w = \frac{I}{v} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \qquad [25.14]$$

cuya ecuación de dimensiones es:

$$[w] = [F]\,L^{-2} = MT^{-2}L^{-1}$$

Su unidad en el S.I. es el julio/m^3.

EJEMPLO 25.4

Una antena de radio emite de forma isótropa con una potencia P. Suponiendo que la Tierra refleja toda la energía, determinar la densidad espacial de energía en el espacio ocupado por la radiación, en función del tiempo.

Solución:

La energía emitida en un tiempo t será $E = Pt$. Esta energía estará contenida en una semiesfera de centro la antena (punto de emisión) y radio $r = ct$ (Figura 25.6). El volumen ocupado por la radiación emitida es:

$$V = \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi c^3 t^3$$

con ello, la densidad espacial de energía resulta ser:

$$e = \frac{E}{V} = \frac{Pt}{\frac{2}{3}\pi c^3 t^3} = \frac{3P}{2\pi c^3 t^2}$$

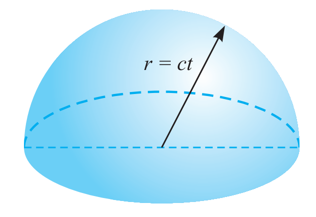


Figura 25.6.

Ondas esféricas

Una perturbación producida en un punto de un medio, isótropo para la propagación de esa perturbación, da lugar a un movimiento ondulatorio de propagación por ondas esféricas (Figura 25.7). Cada frente de onda recibe la misma energía y, en consecuencia, al cambiar la superficie del frente de onda, la intensidad será distinta de un frente a otro. A una distancia r_1, la intensidad vale:

$$I_1 = \frac{P}{4\pi r_1^2}$$

mientras que a una distancia r_2 vale:

$$I_2 = \frac{P}{4\pi r_2^2}$$

al dividir estas expresiones resulta:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

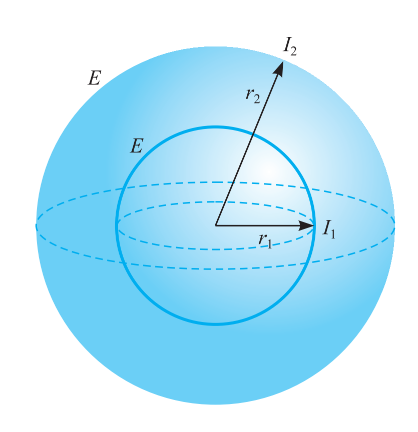


Figura 25.7.

La intensidad del movimiento ondulatorio propagado por ondas esféricas es inversamente proporcional al cuadrado de las distancias al foco emisor.

Teniendo en cuenta la Expresión [25.12] serán:

$$I_1 = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A_1^2 v \quad \text{e} \quad I_2 = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A_2^2 v$$

resultando:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{A_1^2}{A_2^2}$$

y, por tanto, es:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Las amplitudes son inversamente proporcionales a las distancias al foco emisor.

En consecuencia, la ecuación de la onda puede expresarse de la forma:

$$Y = A_0 \frac{x_0}{x} \operatorname{sen} k(x - vt) \qquad [25.15]$$

siendo x_0 la distancia a la fuente en el instante 0; A_0, la amplitud a esa distancia, y x, la distancia a la fuente en el instante t.

Ondas cilíndricas

Si la fuente emisora es una línea, las ondas emitidas serán cilíndricas. La intensidad del movimiento ondulatorio será ahora:

$$I_1 = \frac{P}{2\pi r_1} \quad \text{e} \quad I_2 = \frac{P}{2\pi r_2}$$

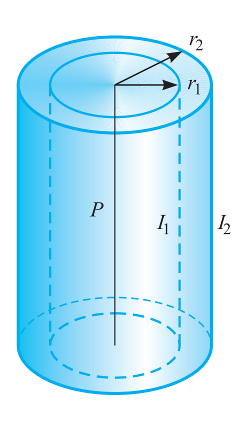


Figura 25.8.

siendo P la energía emitida por unidad de tiempo y unidad de longitud de la fuente emisora (Figura 25.8). El cociente de ambas expresiones es:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

En consecuencia, *la intensidad es inversamente proporcional a la distancia a la fuente emisora.*

Teniendo en cuenta la Expresión [25.12] es:

$$\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 = \frac{r_2}{r_1} \quad \text{o} \quad \frac{A_1}{A_2} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}$$

Las amplitudes son inversamente proporcionales a la raíz cuadrada de la distancia a la fuente emisora.

La onda, en este caso, se expresa:

$$Y = A_0 \sqrt{\frac{x_0}{x}} \operatorname{sen} k(x - vt) \qquad [25.16]$$

en la que x es la distancia al foco de la perturbación y A_0, la amplitud a la distancia x_0.

25.6 Absorción

Podemos definir la *absorción de un movimiento ondulatorio* como la *disminución en su intensidad que sufre al recorrer el medio propagador*, *debido a su naturaleza y a las características físicas del medio propagador*.

La absorción se produce de forma independiente y, además, de la puramente geométrica estudiada en el epígrafe anterior, la cual era debida únicamente al reparto de energía entre un frente de onda cada vez mayor.

Consideremos una onda plana que se propaga en un medio homogéneo e isótropo y sea OX su dirección de propagación (Figura 25.9). La disminución relativa de intensidad, dI/I, resulta ser proporcional al desplazamiento:

$$\frac{dI}{I} = -\gamma \, dx$$

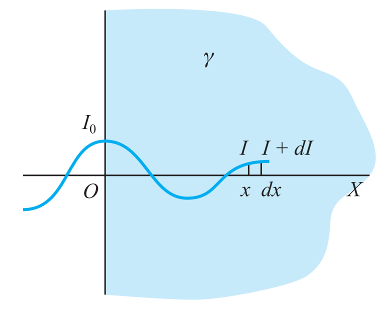


Figura 25.9.

denominándose a γ *coeficiente de absorción*, el cual depende de la naturaleza del medio y de la frecuencia de la onda; el signo menos es debido a que la intensidad disminuye al aumentar el camino recorrido. Integrando la ecuación anterior:

$$\ln I = -\gamma x + \text{cte.}$$

y, si para $x = 0$, es $I = I_0$, la constante de integración vale $\ln I_0$, con lo cual se escribe:

$$\ln I = -\gamma x + \ln I_0 \qquad \text{o} \qquad \ln \frac{I}{I_0} = -\gamma x$$

Al tomar antilogaritmos neperianos resulta:

$$I = I_0 e^{-\gamma x} \qquad [25.17]$$

lo que nos indica que la intensidad de la onda disminuye exponencialmente con tanta mayor rapidez cuanto mayor sea γ.

Puesto que la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud, ésta decrecerá exponencialmente, pero con un factor de amortiguamiento mitad, $\gamma/2$:

$$A^2 = A_0^2 e^{-\gamma x} \qquad \text{o} \qquad A = A_0 e^{-\gamma x/2}$$

La onda amortiguada se expresará de la forma:

$$Y = A_0 e^{-\gamma x/2} \operatorname{sen}(kx - \omega t) \qquad [25.18]$$

25.7 Velocidad de grupo

La velocidad v, que hemos llamado velocidad de fase, no es necesariamente la que se observa al detectar un movimiento ondulatorio, ya que, en general, éste no está constituido por una onda única, sino por un conjunto de ondas de frecuencias y velocidades próximas, cuya composición da un movimiento ondulatorio resultante, que se propaga en la misma dirección y sentido de sus componentes, presentando máximos y mínimos de amplitud. Al conjunto de ondas comprendidas entre dos valores nulos y consecutivos de esta amplitud se le denomina *pulso*, *tren de ondas* o *paquete de ondas* (Figura 25.10), y a la velocidad de desplazamiento de éstos, *velocidad de grupo*; evidentemente, ésta será la misma que llevará la señal que se transmite con el *tren de ondas*.

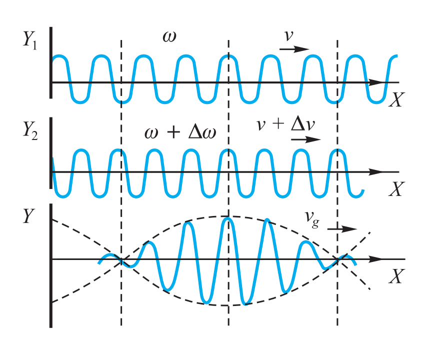


Figura 25.10.

Al objeto de simplificar el cálculo utilizaremos dos ondas sinusoidales de la misma amplitud y frecuencias próximas:

$$Y_1 = A \operatorname{sen}[k(\omega)x - \omega t]$$
$$Y_2 = A \operatorname{sen}\{[k(\omega) + \Delta k(\omega)]x - (\omega + \Delta\omega)t\}$$

cuya superposición es, teniendo en cuenta que la suma de los senos de dos ángulos es el doble producto del seno de la semisuma de ellos por el coseno de la semidiferencia de los mismos:

$$Y_1 + Y_2 = 2A \operatorname{sen}\left\{\left[k(\omega) + \frac{\Delta k(\omega)}{2}\right]x - \left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right\} \cos\left[\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k(\omega)}{2}x\right] =$$

$$= 2A \cos\frac{1}{2}[\Delta\omega t - \Delta k(\omega)x] \times$$

$$\times \operatorname{sen}\left\{\left[(\omega) + \frac{\Delta k(\omega)}{2}\right]x - \left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right\} =$$

$$= A' \operatorname{sen}\left\{\left[k(\omega) + \frac{\Delta k(\omega)}{2}\right]x - \left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right\}$$

donde:

$$A' = 2A\cos\frac{1}{2}[\Delta\omega\, t - \Delta k(\omega)x]$$

es la amplitud de la onda resultante.

Los puntos que presentan la misma amplitud quedan definidos por:

$$\Delta\omega\, t - \Delta k\,(\omega)x = \text{cte.}$$

Lo que, por ser $k = k(w)$, se puede escribir:

$$\Delta\omega\left(t - \frac{\Delta k}{\Delta\omega}x\right) = \text{cte.}$$

expresión que en un punto toma la forma:

$$t - \frac{dk}{d\omega}x = \text{cte.}$$

y la velocidad con que estos puntos se desplazan se calculará derivando respecto del tiempo:

$$1 - \frac{dk}{d\omega}\cdot\frac{dx}{dt} = 0$$

para lo cual, deberá ser:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk} = v_g \qquad [25.19]$$

que es la velocidad de desplazamiento del *tren de ondas* o *velocidad de grupo*. Ésta se puede relacionar con la velocidad de fase, teniendo en cuenta que:

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi v}{\lambda} = kv$$

sin más que sustituir ω en la [25.19], siendo:

$$v_g = \frac{d(kv)}{dk} = v + k\,\frac{dv}{dk} = v - \lambda\,\frac{dv}{d\lambda} \qquad [25.20]$$

Si la velocidad de la onda es independiente de la longitud de onda, coinciden las velocidades de grupo y de fase.

25.8 Ecuación de propagación de las ondas

Consideremos la onda armónica [25.7], $Y(x, t) = A\,\text{sen}\,(kx - \omega t)$, y hallemos su derivada parcial respecto a x:

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = Ak\cos(kx - \omega t)$$

Una segunda derivada respecto a x da:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = -Ak^2\,\text{sen}\,(kx - \omega t) = -k^2 Y(x, t) \qquad [25.21]$$

Hallemos ahora la derivada parcial respecto al tiempo de la función $Y(x, t)$:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = -A\omega\cos(kx - \omega t)$$

Una segunda derivada respecto al tiempo da:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = -A\omega^2\,\text{sen}\,(kx - \omega t) = -\omega^2 Y(x, t) \qquad [25.22]$$

Eliminemos la función $Y(x, t)$ entre las Ecuaciones [25.21] y [25.22]:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \frac{k^2}{\omega^2}\,\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}$$

y puesto que es:

$$\frac{k}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi v\lambda} = \frac{1}{v}$$

resulta:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \qquad [25.23]$$

Ecuación de ondas

que es denominada *ecuación de ondas*, para ondas unidimensionales, en la que v es la velocidad de propagación de las ondas.

Es fácil ver que, tanto [25.1], onda que se mueve alejándose del foco y que llamaremos *onda progresiva*, como [25.2], onda que se mueve en el sentido contrario y que llamaremos *onda regresiva*, son solución de la ecuación de ondas. En efecto, derivando [25.1] respecto a x:

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial f(x - vt)}{\partial x} = \frac{df(x - vt)}{d(x - vt)}\,\frac{\partial(x - vt)}{\partial x} = \frac{df(x - vt)}{d(x - vt)}$$

Una nueva derivación respecto a x da:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x - vt)}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{d(x - vt)^2} \qquad [25.24]$$

Derivando [25.1] respecto a t:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial f(x - vt)}{\partial t} = \frac{df(x - vt)}{d(x - vt)}(-v) = -v\frac{df}{d(x - vt)}$$

Una nueva derivación respecto a t da:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{df^2}{d(x - vt)^2} \qquad [25.25]$$

Al sustituir los valores [25.24] y [25.25] en [25.23], se comprueba cómo ésta es verificada y, por tanto, que la onda progresiva es solución de ella. Análogamente se hace para la onda regresiva.

Podemos ahora definir de forma muy general una onda como *todo fenómeno físico que se propaga obedeciendo a una ecuación que es solución de la ecuación de ondas*.

Así, la función $Y = A \operatorname{sen} kx \cdot \operatorname{sen} \omega t$, que representa un fenómeno físico, es una onda, ya que al ser:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = -k^2 Y \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = -\omega^2 Y$$

verifica la ecuación de ondas:

$$k^2 Y = \frac{1}{v^2}\omega^2 Y$$

puesto que $\omega = kv$.

En el caso de un medio tridimensional, la ecuación más general de propagación de ondas es:

Ecuación general de ondas

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \qquad [25.26]$$

denominándose al primer miembro laplaciano de la función Y, que se expresa:

$$\nabla^2 Y = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} \qquad [25.27]$$

con lo cual la ecuación de propagación de ondas se escribe:

$$\nabla^2 Y = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \qquad [25.28]$$

EJEMPLO 25.5

Una onda plana armónica se propaga según la dirección y el sentido del vector:

$$\mathbf{m} = 2\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y + 2\mathbf{u}_z$$

Su longitud de onda es $\lambda = 3$ m, su amplitud, $A = 2$ cm y su frecuencia, $\nu = 100$ Hz. Calculemos:

1.º El vector de propagación de la onda.

2.º La expresión de la onda.

3.º Su velocidad de propagación, obligando a que se verifique la ecuación de ondas en tres dimensiones.

Solución:

1.º El vector de onda es $\mathbf{k} = k\,\mathbf{u} = \frac{2\pi}{\lambda}\,\mathbf{u}$, siendo $\mathbf{u} = \mathbf{m}/m$ el unitario en la dirección de propagación:

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{3}\,\frac{2\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y + 2\mathbf{u}_z}{3} = \frac{2\pi}{9}\,(2\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y + 2\mathbf{u}_z)$$

2.º La ecuación de propagación de la onda es del tipo de la [25.11] y, puesto que son:

$$\omega = 2\pi\nu = 200\pi \quad \text{y} \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = (2x - y - 2z)\,\frac{2\pi}{9}$$

la onda se expresa:

$$Y = 2\cdot 10^{-2}\cos 2\pi\left[\frac{(2x - y + 2z)}{9} - 100\,t\right]$$

3.º La ecuación general de ondas en tres dimensiones es la [25.28] y la solución de ella, obtenida en el apartado anterior, debe verificarla:

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{8\pi}{9}\cdot 10^{-2}\,\text{sen}\,2\pi\left[\frac{(2x - y + 2z)}{9} - 100\,t\right] \quad , \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = -\frac{16\pi^2}{81}\,Y$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{4\pi}{9}\cdot 10^{-2}\,\text{sen}\,2\pi\left[\frac{(2x - y + 2z)}{9} - 100\,t\right] \quad , \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\frac{4\pi^2}{81}\,Y$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = -\frac{8\pi}{9}\cdot 10^{-2}\,\text{sen}\,2\pi\left[\frac{(2x - y + 2z)}{9} - 100\,t\right] \quad , \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} = -\frac{16\pi^2}{81}\,Y$$

Con todo lo cual el laplaciano de la función Y es:

$$\nabla^2 Y = -\frac{4\pi^2}{9}\,Y$$

Derivemos ahora Y dos veces respecto al tiempo:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = 400\pi\cdot 10^{-2}\,\text{sen}\,2\pi\left[\frac{(2x - y + 2z)}{9} - 100t\right] \quad , \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = -4\cdot 10^{-4}\pi^2 Y$$

Al llevar todos estos valores a la [25.28] obtenemos:

$$-\frac{4\pi^2}{9}\,Y = v^{-2}(-4\cdot 10^{-4}\pi^2 Y)$$

Por tanto, para que se verifique la ecuación de ondas debe ser:

$$v = \omega/k = \frac{200\pi}{2\pi/3} = 300 \text{ m/s}$$

Acústica

CAPÍTULO 26

26.1 Ondas mecánicas longitudinales. Sonido

Las ondas mecánicas longitudinales se producen en los medios materiales (sólidos, líquidos o gases) y se propagan a través de ellos. Las partículas del medio vibran en la dirección de propagación de la onda y en torno a su posición de equilibrio estable. El punto o lugar del medio en el cual se produjo la vibración inicial, que al propagarse dio lugar al movimiento ondulatorio, se denomina *foco* o *fuente de las ondas*. El estado de vibración de cada partícula es función de su distancia al foco y del tiempo.

Consideremos un estado de vibración como el indicado en la Figura 26.1, las partículas situadas a una distancia de la fuente comprendidas entre 0 y 1, 2 y 3, etc., tienen un desplazamiento positivo, es decir, se alejan de la fuente, mientras que las situadas entre 1 y 2, 3 y 4, etc., tienen un desplazamiento negativo, es decir, se aproximan a la fuente. Como resultado de todo ello, en los puntos 1, 3, 5, ..., habrá una acumulación de partículas del medio, aumentando en consecuencia la densidad y la presión en estas; por el contrario, en torno a los puntos 0, 2, 4, ..., habrá una disminución de partículas del medio, disminuyendo en ellas la densidad y la presión. Vemos así cómo están ligadas las ondas de desplazamiento, presiones y densidades.

Las variaciones de presión respecto a la correspondiente al medio sin perturbar es lo que se denomina *presión acústica*. Es decir, si la presión del medio en un instante es P y la presión correspondiente al estado inicial no perturbado es P_0, la presión acústica en este instante es:

$$p = P - P_0 \qquad [26.1]$$

Debemos hacer notar que el máximo desplazamiento de las partículas corresponde a puntos de presión acústica nula, y que los puntos de desplazamiento nulos son los de presión máxima o mínima. La onda de presión acústica tendrá la misma frecuencia que la onda de desplazamiento de las partículas y está desfasada con ella un cuarto de periodo.

La variación de densidad del medio se expresa $\Delta\rho = \rho - \rho_0$, siendo ρ la densidad de un punto del medio en un cierto instante y ρ_0 la densidad del medio no

Figura 26.1.

perturbado. La onda de variación de densidad y la de presión acústica están en fase, ambas retrasadas un cuarto de onda respecto a la de desplazamiento.

No todas las ondas elásticas son audibles, es decir, no todas son capaces de excitar el nervio auditivo. La zona audible está comprendida entre las frecuencias de 20 Hz a 20 000 Hz, y son denominadas *ondas sonoras*. Fuera de estos límites, las ondas elásticas se siguen denominando *sonido*, aun cuando no sean audibles. Si la frecuencia es superior a 20 000 Hz, se denominan *ultrasonidos* y si es inferior a 20 Hz, *infrasonidos*.

Ultrasonidos

26.2 Ecuación de ondas elásticas longitudinales en un fluido

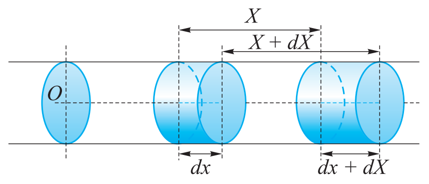


Figura 26.2.

Consideremos un elemento cilíndrico de fluido, de sección recta circular de área unidad y longitud *dx* (Figura 26.2). Supondremos que el fluido es un medio continuo, homogéneo e isótropo, de viscosidad nula, cuya presión y densidad iniciales son P_0 y ρ_0, respectivamente. Asimismo, supondremos que al propagarse la perturbación todas las partículas de una misma sección recta sufren el mismo desplazamiento, el cual vendrá dado, para una onda unidimensional, por una función $X = X(x, t)$. La sección de abscisa x será desplazada la distancia X y la sección de abscisa $x + dx$, la distancia $X + dX$. En consecuencia, el volumen inicial, cuyo valor es dx, pasa a valer $dx + dX$. Puesto que la masa se conserva, la densidad deberá variar, verificando:

$$dm = \rho_0 \, dx = \rho \, (dx + dX)$$

es decir:

$$\rho_0 = \rho \left(1 + \frac{\partial X}{\partial x} \right)$$

expresiones en las que ρ es la densidad del fluido, en el elemento de volumen considerado una vez perturbado, que podemos escribir $\rho = \rho_0 + \Delta\rho$. Con lo cual:

$$\rho_0 = (\rho_0 + \Delta\rho) \left(1 + \frac{\partial X}{\partial x} \right) = \rho_0 + \Delta\rho + \rho_0 \frac{\partial X}{\partial x} + \Delta\rho \frac{\partial X}{\partial x}$$

Despreciando el último sumando y simplificando, resulta:

$$\Delta\rho = -\rho_0 \frac{\partial X}{\partial x} \qquad [26.2]$$

expresión que relaciona la onda de desplazamiento de las partículas del medio con la onda de variación de densidad.

La presión y la densidad están relacionadas por la ecuación de estado $P = P(\rho)$ que, para el estado inicial, verificará $P_0 = P(\rho_0)$, pudiéndose escribir:

$$P = P(\rho) = P(\rho_0 + \Delta\rho) = P(\rho_0) + \Delta\rho \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_0 = P_0 + \Delta\rho \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_0$$

resultando para la presión acústica la expresión:

$$p = \Delta\rho \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_0 \qquad [26.3]$$

La variación de la presión del fluido al variar su densidad es una característica de éste, y depende de su módulo de compresibilidad, definido por la [14.8], el cual

puede expresarse en función de la densidad, sin más que diferenciar la ecuación $m = V \cdot \rho$, ya que es

$$0 = \rho\, dV + V d\rho$$

lo que permite escribir $-dV/V = d\rho/\rho$.

Con ello, el módulo de compresibilidad, κ, se escribe:

Módulo de compresibilidad

$$\kappa = -\frac{dP}{\frac{dV}{V}} = \frac{dP}{\frac{d\rho}{\rho}}$$

que, al particularizar para el estado inicial, da:

$$\left(\frac{dP}{d\rho}\right)_0 = \frac{\kappa}{\rho_0}$$

lo que permite expresar la [26.3] de la forma:

$$p = \Delta\rho \frac{\kappa}{\rho_0} \qquad [26.4]$$

poniéndose de manifiesto que las ondas de presión acústica y de variación de densidad están en fase, ya que una es igual a la otra multiplicada por la constante κ/ρ_0.

Utilizando la [26.2], resulta para la presión acústica la expresión:

$$p = -\kappa \frac{\partial X}{\partial x} \qquad [26.5]$$

expresión que relaciona la onda de desplazamiento de las partículas del medio con la onda de presión acústica.

El movimiento del elemento de fluido considerado se realiza por acción de la fuerza:

$$P(x, t) - P(x + dx, t) = -\frac{\partial P}{\partial x} dx = -\frac{\partial p}{\partial x} dx$$

y la ecuación del movimiento es:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} \qquad [26.6]$$

Sustituyendo en ésta, la derivada respecto a equis de la Expresión [26.5] resulta:

Ecuación de ondas de desplazamiento

$$\rho_0 \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \kappa \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{\kappa} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \qquad [26.7]$$

que es la ecuación de propagación de las ondas de desplazamiento de las partículas del medio respecto de su posición de equilibrio.

Para obtener la propagación de las ondas de presión, derivemos dos veces respecto a t la Ecuación [26.5]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\kappa \frac{\partial^3 X}{\partial x \partial t^2}$$

Derivemos ahora respecto a x la Ecuación [26.6]:

$$\rho_0 \frac{\partial^3 X}{\partial t^2 \partial x} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

y eliminemos entre ambas expresiones el factor común; así resulta:

Ecuación de ondas de presión acústica

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{\kappa} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \qquad [26.8]$$

que es la ecuación de propagación de las ondas de presión, completamente análoga a la [26.7].

La densidad del fluido obedece a una ecuación de ondas completamente análoga a las encontradas para los desplazamientos y presiones acústicas, y cuya deducción puede hacerse de la siguiente forma. Derivemos la [26.2] respecto a x:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

Entre ésta y la [26.7] eliminamos $\dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2}$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\rho_0^2}{\kappa} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}$$

Derivemos ésta respecto a x:

$$\frac{\partial^2 \rho}{/\partial x^2} = -\frac{\rho_0^2}{\kappa} \frac{\partial^3 X}{\partial t^2 \partial x}$$

y derivemos la [26.2] dos veces respecto a t:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -\rho_0 \frac{\partial^3 X}{\partial x \partial t^2}$$

Eliminando entre las dos últimas el factor común, resulta para las densidades la ecuación de propagación de ondas:

Ecuación de ondas de densidad

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{\kappa} \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \qquad [26.9]$$

que es completamente análoga a [26.7] y [26.8]. Todas ellas se propagan a la misma velocidad, cuyo valor se obtiene al compararlas con la expresión general [25.23], resultando:

Velocidad de propagación del sonido en fluidos

$$v = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0}} \qquad [26.10]$$

Si la onda de desplazamiento es una onda armónica de la forma:

$$X = A \,\text{sen}\,(kx - \omega t)$$

la onda de presión, de acuerdo con la [26.5], será:

$$p = -\kappa \frac{\partial X}{\partial x} = -\kappa A k \cos(kx - \omega t) = \kappa A k \,\text{sen}\left(kx - \omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Por tanto, la onda de presión acústica va atrasada $\pi/2$ radianes respecto a la de desplazamiento. Si a 2π radianes le corresponde una longitud de onda λ, a $\pi/2$ radianes le corresponderá $\lambda/4$, es decir, hay un desfasaje espacial de un cuarto de onda. Esto mismo puede ser demostrado de la siguiente manera: el primer punto de desplazamiento nulo está dado por

$$k x_1 - \omega t = 0$$

y el primer punto de presión nula por:

$$k x_2 - \omega t - \frac{\pi}{2} = 0$$

Al restar ambas resulta:

$$k(x_2 - x_1) = \frac{\pi}{2}$$

es decir:

$$x_2 - x_1 = \frac{\lambda}{4}$$

La presión acústica máxima es $p_m = Ak\kappa$, que puede expresarse de la forma:

$$p_m = A\,\frac{\omega}{v}\,\rho_0 v^2 = A\rho_0\,\omega v \qquad [26.11]$$

La onda de densidad se expresa:

$$\Delta\rho = \rho - \rho_0 = -\rho_0\,\frac{\partial X}{\partial x} = -\rho_0 A\kappa\cos(kx - \omega t) = -\,\rho_0\,\frac{A\omega}{v}\cos(kx - \omega t)$$

La densidad máxima del medio es:

$$\rho_{\text{máx}} = \rho_0(1 + A\kappa)$$

y la mínima:

$$\rho_{\text{mín}} = \rho_0(1 - A\kappa)$$

En la Figura 26.3 se representan las tres ondas.

En la propagación en gases, admitiendo que las variaciones de presión y volumen provocadas en el gas por la propagación de la onda pueden ser consideradas adiabáticas, deberá verificarse la ecuación de éstas, $PV^{\gamma} = C$. Al hallar su diferencial, resulta $V\,dP + P\gamma\,dV = 0$, de donde:

$$\kappa = -\frac{dP}{\dfrac{dV}{V}} = P\gamma$$

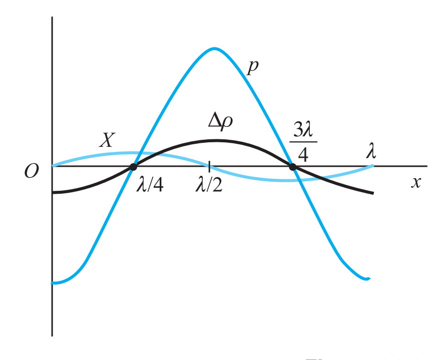


Figura 26.3.

Es decir, *el módulo de compresibilidad de un gas es igual al producto de la presión por el coeficiente adiabático del mismo*. Teniendo en cuenta la [26.10], deberá verificarse:

$$\kappa = P\gamma = \rho_0 v^2 \qquad [26.12]$$

EJEMPLO 26.1

Una onda sonora en el aire está dada por la ecuación:

$$X = 2 \cdot 10^{-4} \operatorname{sen} \pi (4x - 1\,360t)$$

en la cual todas las unidades se expresan en el S.I. Tomando para la densidad del aire sin perturbar el valor $\rho_0 = 1{,}28$ kg/m^3. Determinemos:

a) La frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de propagación de las ondas.

b) La velocidad de desplazamiento de las partículas del aire.

c) La onda de presión.

d) La onda de variación de densidad.

Solución:

a) Comparando la ecuación dada con la [25.8] se deduce:

$$\omega = 2\pi\nu = 1\,360\pi \quad \Rightarrow \quad \nu = 680 \text{ Hz}$$

$$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda} = 4\pi \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0{,}5 \text{ m}$$

La velocidad de propagación es:

$$v = \lambda\nu = 340 \text{ m/s}$$

b) La velocidad de desplazamiento de las partículas del aire será:

$$u = \frac{\partial X}{\partial t} = -272 \times 10^{-5}\pi \cos \pi (4x - 1\,360t) = -0{,}855 \cos \pi (4x - 1\,360t)$$

c) La onda de presión se deduce por aplicación de [26.5]:

$$p = -\kappa \frac{\partial X}{\partial x} = \rho_0 v^2 \times 2 \times 10^{-4} \times 4\pi \cos \pi (4x - 1\,360t) = 371{,}88 \cos \pi (4x - 1\,360t) \text{ Pa}$$

d) La onda de variación de densidad se deduce por aplicación de [26.2]:

$$\Delta\rho = -\rho_0 \frac{\partial X}{\partial x} = \rho_0 \times 2 \times 10^{-4} \times 4\pi \cos \pi (4x - 1\,360t) =$$

$$= 32{,}17 \times 10^{-4} \cos \pi (4x - 1\,360\,t) \text{ kg/m}^3$$

Si la conocida es la onda de presión acústica, pueden deducirse fácilmente las ondas de variación de densidad y desplazamiento. Sea la onda de presión acústica $p = p_M \operatorname{sen} (kx - \omega t)$. De acuerdo con [26.4], la onda de variación de densidad será:

$$\Delta\rho = p \frac{\rho_0}{\kappa} = \frac{\rho_0 p_M}{\kappa} \operatorname{sen} (kx - \omega t) = \frac{p_M}{v^2} \operatorname{sen} (kx - \omega t) \qquad [26.13]$$

De acuerdo con [26.5], debe verificarse:

$$p = p_M \operatorname{sen}(kx - \omega t) = -\kappa \frac{\partial X}{\partial x}$$

o bien:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{p_M}{\kappa} \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

cuya integración da:

$$X = \frac{p_M}{k\kappa} \cos(kx - \omega t) = \frac{p_M}{\rho_0 \omega v} \cos(kx - \omega t) \qquad [26.14]$$

que es la expresión de la onda de desplazamiento de las partículas del medio.

EJEMPLO 26.2

Sea la onda de presión acústica en el aire $p = 12 \operatorname{sen} 2\pi(2x - 680t)$, cuya densidad en el estado no perturbado es $\rho_0 = 1{,}28$ kg/m^3. Hallemos las ondas de variación de densidad y de desplazamiento.

Solución:

Utilizando la Expresión [26.13], la onda de variación de densidad es:

$$\Delta\rho = \frac{p_M}{v^2} = \frac{12}{340^2} \operatorname{sen} 2\pi(2x - 680t) = 1{,}038 \times 10^{-4} \operatorname{sen} 2\pi(2x - 680t)$$

La velocidad de propagación se ha obtenido calculando previamente la longitud de onda y la frecuencia de la onda:

$$k = 4\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{de donde:} \quad \lambda = 0{,}5 \text{ m}$$

y $\omega = 2\pi 680 = 2\pi\nu$, de donde: $\nu = 680$ Hz.

Con lo cual es $v = \lambda\nu = 0{,}5 \times 680 = 340$ m/s.

La onda de desplazamiento de las partículas del medio se obtiene por aplicación de la [26.14], resultando:

$$X = \frac{12}{1{,}28 \times 2\pi \times 680 \times 340} \cos 2\pi(2x - \omega t) = 6{,}45 \times 10^{-6} \cos 2\pi(2x - \omega t)$$

26.3 Ecuación de ondas elásticas longitudinales en un sólido

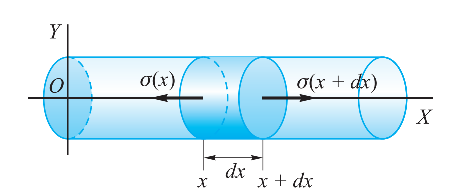


Figura 26.4.

Si golpeamos una barra por uno de sus extremos, la perturbación se propaga a lo largo de ella, dando lugar a una onda elástica longitudinal propagadora. Supongamos una barra cilíndrica, homogénea, isótropa y elástica, de sección recta A. Consideremos un elemento de longitud dx, situado entre las abscisas x y $x + dx$ (Figu-

ra 26.4). La tensión en cada una de sus bases será, respectivamente, $\sigma(x, t)$ y $\sigma(x + dx, t)$ y, en consecuencia, la fuerza neta sobre este elemento en dirección de su eje es:

$$F = A[\sigma(x + dx, t) - \sigma(x, t)] = A \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx$$

Esta fuerza producirá un desplazamiento $X(x, t)$ y la ecuación fundamental de la Dinámica para el elemento considerado se escribe:

$$\rho_0 A \, dx \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = A \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx$$

o

$$\rho_0 \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \qquad [26.15]$$

La ley de Hooke deberá verificarse en todo momento y, para el elemento considerado, se expresa:

$$\frac{\delta(dx)}{dx} = \frac{\sigma}{E}$$

y, puesto que es $\delta(dx) = X(x + dx, t) - X(x, t) = \frac{\partial X}{\partial x} dx$, se transforma en:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\sigma}{E}$$

Derivando esta ecuación respecto a x:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

y llevando a la [26.15] el valor de $\frac{\partial \sigma}{\partial x}$, resulta:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{E} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \qquad [26.16]$$

que es la ecuación de ondas de desplazamiento de las secciones de la barra debido a la perturbación inicial, completamente análoga a la [26.7].

Igualmente existirán ecuaciones de ondas para las presiones y las densidades, que serán completamente análogas a [26.8] y [26.9]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{E} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{E} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$$

26.4 Velocidad de propagación del sonido

Al comparar la Ecuación [26.16], que es la ecuación de ondas elásticas en un sólido, con la Ecuación [26.2], se deduce que la velocidad de propagación del sonido en los sólidos está dada por:

Velocidad de propagación del sonido en un sólido

$$v_s = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \qquad [26.17]$$

Las velocidades de propagación del sonido en los sólidos son más altas que en los fluidos. En la Tabla 26.1 indicamos algunos valores de aquélla, calculados teóricamente por aplicación de [26.17] y también determinados experimentalmente. La concordancia es bastante buena, sobre todo si se tiene en cuenta que E y ρ también son medidos experimentalmente.

Tabla 26.1. Velocidad teórica y experimental de propagación del sonido.

Sólido	$E(\mathrm{N/m^2} \cdot 10^{10})$	$\rho(\mathrm{kg/m^3} \cdot 10^3)$	$v_s = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}(\mathrm{m/s})$	$v(\mathrm{m/s})$
Aluminio	7,0	2,7	5 091	5 100
Cobre	12,5	8,9	3 747	3 750
Granito	5,0	2,7	4 303	5 000
Hierro	20,6	7,8	5 139	5 130
Níquel	21,4	8,9	4 904	4 970
Plomo	1,6	11,3	1 190	1 320
Pirex	6,1	2,3	5 208	5 500

En los líquidos la densidad es menor que en los sólidos, pero el coeficiente de compresibilidad de aquéllos es, en general, mucho menor que el módulo de elasticidad de éstos, por lo cual la velocidad del sonido en los líquidos es, en general, bastante menor que en los sólidos. Así, para el agua, en la que $\kappa \sim 2{,}2 \cdot 10^9$ N/m^2 y $\rho \sim 10^3$ kg/m^3, la velocidad de propagación del sonido es $v \sim 1\,500$ m/s. La velocidad en el agua depende de la temperatura y de la salinidad, aceptándose la expresión:

$$v = 1\,449{,}2 + 4{,}6\,T - 0{,}055\,T^2 + 0{,}00029\,T^3 + (1{,}34 - 0{,}01\,T)(s - 35) \text{ m/s}$$

Velocidad de propagación del sonido en el agua

en la que T son grados celsius y s, la salinidad en partes por mil.

En los gases, aunque la densidad es aún menor, el coeficiente de compresibilidad es mucho menor y la velocidad de propagación del sonido es menor. Concretamente, para el aire $\kappa \sim 14{,}8 \cdot 10^4$ N/m^2 y $\rho \sim 1{,}28$ kg/m^3, con lo cual la [26.10] da $v \sim 340$ m/s.

La velocidad de propagación del sonido en un gas con comportamiento adiabático, modelo al que puede asemejarse la propagación del sonido en el aire, puede calcularse sustituyendo en [26.10] el valor deducido teóricamente para κ, que resultó ser $\kappa = P\gamma$. Con ello, es:

$$v_G = \sqrt{\frac{P\gamma}{\rho_0}} \qquad [26.18]$$

Velocidad de propagación del sonido en un gas

o bien, teniendo en cuenta la ecuación de estado de los gases perfectos:

$$v_{GP} = \sqrt{\frac{nRT\gamma}{V\rho_0}} = \sqrt{\frac{nRT\gamma}{m}} = \sqrt{\frac{RT\gamma}{M}} \qquad [26.19]$$

Velocidad de propagación del sonido en un gas ideal

lo que pone de manifiesto que la velocidad de propagación del sonido en un gas perfecto es función de la temperatura de éste. Si la velocidad a una temperatura de referencia, T_0, es:

$$v_0 = \sqrt{\frac{RT_0\gamma}{M}}$$

la velocidad a una temperatura T será

$$v = v_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}}$$

A continuación, en la Tabla 26.2, se presenta la velocidad de propagación del sonido en diferentes medios.

Tabla 26.2. Velocidad de propagación del sonido en algunos medios.

Sólidos	Velocidad (m/s)
Oro	2 080
Latón	3 500
Hierro	4 950
Vidrio	5 500
Ladrillos	3 600
Corcho	500
Goma	70
Madera de roble	3 800
Madera de pino	3 320
Líquidos	**Velocidad (m/s)**
Mercurio (0 °C)	1 450
Agua (0 °C)	1 430
Agua (4 °C)	1 420
Agua (20 °C)	1 500
Alcohol	1 240
Benzol	1 324
Acetona	1 190
Gases	**Velocidad (m/s)**
Hidrógeno (0 °C)	1 280
Hidrógeno (20 °C)	1 309
Neón (0 °C)	435
Helio (20 °C)	1 007
Argón (0 °C)	308
Nitrógeno (20 °C)	349
Aire (0 °C)	331
Oxígeno (20 °C)	326
Dióxido de carbono (20 °C)	266

26.5 Intensidad del sonido. Nivel sonoro

La intensidad de un movimiento ondulatorio está dada por la [25.12], que es:

$$I = \frac{1}{2} \rho_0 A^2 \omega^2 v \qquad [26.20]$$

Teniendo en cuenta las expresiones [26.17], [26.10], [26.18] y [26.19], que nos dan la velocidad del sonido en sólidos, fluidos, gases y gases perfectos, respectivamente, se deduce para la intensidad del sonido en estos medios:

Intensidad del sonido en sólidos

$$I_S = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \sqrt{\rho_0 E} \qquad [26.21]$$

Intensidad del sonido en fluidos

$$I_F = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \sqrt{\rho_0 \kappa} \qquad [26.22]$$

$$I_G = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \sqrt{\rho_0 P \gamma} \qquad [26.23]$$

Intensidad del sonido en gases

$$I_{GP} = \frac{1}{2} \rho_0 A^2 \omega^2 \sqrt{\frac{RT\gamma}{M}} \qquad [26.24]$$

Intensidad del sonido en un gas ideal

Para crear una escala que mida el *nivel sonoro* o *nivel de intensidad del sonido*, es necesario tomar un valor de la intensidad física del sonido, que sirva de referencia. Este valor es $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2, que corresponde al umbral mínimo audible de una persona normal media para un sonido de 1 000 Hz. Para esa misma persona media, el umbral máximo audible, a la frecuencia de 1 000 Hz, es de 1 W/m^2. En lugar de construir una escala basada en la relación I/I_0, que variará para los sonidos audibles entre 1 y 10^{12}, se considera la escala basada en la relación logarítmica:

$$L = \log \frac{I}{I_0}$$

escala que oscilará entre 0 y 12, y a cuya unidad se le denomina *bel*. Esta escala resulta muy corta y ofrece poca sensibilidad, habiéndose adoptado la escala:

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} \qquad [26.25]$$

Nivel de intensidad sonora

En esta escala la unidad es el *decibelio* y la gama audible va desde 0 a 120 decibelios.

Decibelio

Otra unidad de nivel sonoro es el *neper*, cuya escala se define mediante la expresión:

$$N = \frac{1}{2} \ln \frac{I}{I_0} \qquad [26.26]$$

la cual está prácticamente en desuso. Todas estas escalas establecen relaciones relativas de intensidad del sonido, por lo que el nivel sonoro suele denominarse *nivel de intensidad sonora*.

El sonido, como todo movimiento ondulatorio, es absorbido por el medio. Las compresiones y dilataciones del aire no son puramente adiabáticas, como las hemos supuesto y, en consecuencia, hay una degradación de energía a forma calorífica que disminuye la intensidad del sonido. El sonido es tanto más absorbido cuanto mayor es su frecuencia y cuanto menor es la densidad del medio absorbente. Así, en general, los gases absorben el sonido más que los líquidos, y éstos más que los sólidos.

26.6 Nivel de potencia sonora

La potencia sonora es la potencia o energía por unidad de tiempo emitida por una fuente en todas las direcciones. Su unidad de medida será el julio por segundo o vatio. El nivel de potencia sonora se mide tomando como referencia la potencia $W_0 = 10^{-12}$ W.

Resulta evidente, por las propias definiciones, que la relación de intensidades sonoras y la de potencias sonoras es la misma. Por ello, el nivel de potencia sonora, medido en decibelios, viene dado por la expresión:

$$N_w = 10 \log \frac{W}{W_0} \qquad [26.27]$$

Nivel de potencia sonora

26.7 Impedancia o resistencia acústica

Sea la onda de desplazamiento $X = A\,\text{sen}\,(\omega t - kx)$. La velocidad de las partículas del medio será:

$$u = \frac{\partial X}{\partial t} = A\omega\cos(\omega t - kx)$$

La presión acústica, dada por la [26.5], se escribe:

$$p = -\kappa\frac{\partial X}{\partial x} = \kappa A k\cos(\omega t - kx)$$

cuya amplitud puede transformarse de la siguiente manera:

$$p_{\text{máx}} = \kappa A k = A\rho_0 v^2\frac{\omega}{v} = A\rho_0\,\omega v \qquad [26.28]$$

con lo cual:

$$p = A\rho_0\,\omega v\cos(\omega t - kx) \qquad [26.29]$$

La intensidad del sonido, dada por la Ecuación [26.20], resulta ser igual a la mitad del producto de las amplitudes de u y p:

$$I = \frac{1}{2}u_m p_m = \frac{1}{2}\frac{p_m^2}{\rho v} = \frac{1}{2}\frac{p_m^2}{Z} = \frac{1}{2}u_m^2 Z \qquad [26.30]$$

Impedancia acústica

al producto $\rho_0 v = Z$ se le denomina *impedancia* o *resistencia acústica*. Al contrario que la resistencia eléctrica, que al aumentar hace que disminuya la intensidad de corriente, la resistencia acústica, al aumentar, hace que aumente la intensidad sonora transmitida, como se deduce de la Expresión [26.30].

Analogías electro-acústicas

La amplitud de la velocidad de desplazamiento de las partículas del medio puede ponerse como cociente entre la amplitud de la presión acústica y la impedancia:

$$u_m = \frac{p_m}{Z}$$

expresión que puede considerarse formalmente análoga a la ley de Ohm, en la que u_m será análoga a la intensidad de corriente eléctrica; p_m, análoga a la diferencia del potencial eléctrico; y Z, análoga a la impedancia eléctrica.

La impedancia puede expresarse de la forma:

Impedancia acústica en fluidos

$$Z = \rho_0 v = \sqrt{\rho_0\kappa} \qquad [26.31]$$

Si el gas ofrece un comportamiento adiabático:

Impedancia acústica en gases

$$Z = \sqrt{\rho_0 P\gamma}$$

Si además se comporta como gas perfecto será:

Impedancia acústica en gases ideales

$$Z = \rho_0\sqrt{\frac{RT\gamma}{M}}$$

EJEMPLO 26.3

Un tubo cilíndrico muy largo contiene hidrógeno en condiciones normales, el cual se supone que se comporta como un gas ideal. En su interior producimos una perturbación sonora de amplitud de presión 5 barias y frecuencia 1 kHz. Calculemos:

1.º La velocidad de propagación de las ondas sonoras.

2.º El nivel sonoro en el interior del tubo.

Datos: $\gamma = 1{,}41$ y $\rho_0 = 0{,}08987$ g/l.

1.º Utilizaremos la Expresión [26.18] de la velocidad. La presión normal es $P = 1$ atm $= 1{,}013 \times 10^5$ Pa:

$$v = \sqrt{1{,}013 \times 10^5 \times \frac{1{,}41}{0{,}08987}} = 1260{,}68 \text{ m/s}$$

2.º Puesto que 1 baria = 0,1 Pa, la amplitud de presión es $p_{\text{máx}} = 0{,}5$ Pa. Utilizando la [26.30], la intensidad física del sonido se expresa:

$$I = \frac{1}{2}\frac{p_m^2}{\rho_0 v} = \frac{1}{2}\frac{0{,}25}{0{,}08987 \times 1260{,}68} = 11 \times 10^{-4}$$

y con ello el nivél sonoro es:

$$L = 10\log\frac{I}{I_0} = 10\log\frac{11 \times 10^{-4}}{10^{-12}} = 10\log(11 \times 10^8) = 10\,(8 + 1{,}0414) =$$

$$= 90{,}414 \text{ dB}$$

26.8 Nivel de presión sonora

La relación de intensidades sonoras es igual a la relación de los cuadrados de las respectivas amplitudes de la onda:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{A^2}{A_0^2}$$

Por otra parte, la relación de presiones sonoras es igual a la relación de las respectivas amplitudes de onda, como se deduce de la simple observación de la [26.28]:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho_0 A\,\omega\,v}{\rho_0 A_0\,\omega\,v} = \frac{A}{A_0}$$

En consecuencia, es:

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^2 = \frac{I}{I_0}$$

en la que p_0 es la presión de referencia, correspondiente a la intensidad de referencia I_0.

Por tanto, el nivel de intensidad sonora en función de las presiones acústicas es:

Nivel de presión sonora

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \left(\frac{p}{p_0} \right)^2 = 20 \log \frac{p}{p_0} \qquad [26.32]$$

El valor de la presión de referencia puede deducirse de la [26.29]:

$$I_0 = \frac{1}{2} \frac{p_0^2}{\rho_0 v}$$

de donde:

Presión acústica de referencia

$$p_0 = (2\rho_0 v I_0)^{1/2} = (2 \times 1{,}28 \times 340)^{1/2} \times 10^{-6} = 2{,}95 \times 10^{-5} \cong 3 \times 10^{-5} \text{ Pa}$$

EJEMPLO 26.4

Una onda plana armónica de frecuencia 1 000 Hz se propaga en el aire a la velocidad de $v = 340$ m/s. Para una presión acústica de 20 N/m^2, calculemos:

a) Las amplitudes de las ondas de desplazamiento y densidad.
b) La intensidad física de la onda.
c) El nivel de intensidad sonora.

Tómese para la densidad del aire 1,28 kg/m^3.

Solución:

a) Sea la onda de desplazamiento $X = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$. La onda de presión es:

$$p = -\kappa \frac{\partial X}{\partial x} = -\rho_0 v^2 A k \cos(kx - \omega t) = -\rho_0 v A \omega \cos(kx - \omega t)$$

La amplitud de la onda de presión es $p_{\text{máx}} = \rho_0 A \omega v = 20$, de donde resulta para la amplitud de la onda:

$$A = \frac{20}{\rho_0 2\pi \nu v} = \frac{20}{1{,}28 \times 2\pi \times 10^3 \times 340} = 7{,}314 \times 10^{-6} \text{ m}$$

La onda de variación de densidad se expresa:

$$\Delta\rho = -\rho_0 \frac{\partial X}{\partial x} = -\rho_0 A k \cos(kx - \omega t) = -\rho_0 \frac{A\omega}{v} \cos(kx - \omega t)$$

Por lo cual, la densidad del medio se expresa:

$$\rho = \rho_0 + \Delta\rho = \rho_0 \left[1 - A \frac{\omega}{v} \cos(kx - \omega t) \right]$$

y su valor máximo es:

$$\rho_{\text{máx}} = \rho_0 \left(1 + A \frac{\omega}{v} \right) = \rho_0 \left(1 + \frac{20}{\rho_0 \omega v} \cdot \frac{\omega}{v} \right) = \rho_0 + \frac{20}{v^2} = 1{,}28095 \text{ kg/m}^3$$

b) La intensidad física de la onda se obtiene así:

$$I = \frac{1}{2}\,\rho_0 A^2 \pi^2 \nu^2 v = 2\pi^2 \rho_0 \nu^2 v \,\frac{400}{\rho_0^2\, 4\pi^2 \nu^2 v^2} = \frac{200}{\rho_0\, v} = 0{,}46$$

c) El nivel de intensidad sonora en función de las presiones nos da:

$$L = 20\log\frac{20}{3\cdot 10^{-5}} = 20\log\frac{2}{3}\,10^6 = 116{,}5 \text{ dB}$$

26.9 Sonidos puros, sonidos complejos o musicales, y ruidos

Un *sonido puro* es el producido por una armónica simple. Un *sonido complejo* o *musical* es el producido por una onda periódica no armónica. Esta onda periódica, de acuerdo con el teorema de Fourier, podrá descomponerse en una superposición de ondas armónicas simples. Es decir, un sonido complejo es una superposición de sonidos puros.

La descomposición de la función periódica X es de la forma:

$$X(t) = A_0 + \sum A_n \operatorname{sen}(n\omega t + \varphi_n) \qquad [26.33]$$

Si en ella hacemos $\omega t = x$, se escribe:

$$f(x) = A_0 + \sum (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \qquad [26.34]$$

en la cual: $a_n = A_n \operatorname{sen}\varphi_n$ y $b_n = A_n \cos\varphi_n$ y, al ser el periodo 2π, los coeficientes A_0, a_n y b_n se expresan así:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \quad ; \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

y

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx \qquad [26.35]$$

Ahora puede calcularse A_n y φ_n de la forma:

$$A_n = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2} \quad \text{y} \quad \tan\varphi_n = \frac{a_n}{b_n}$$

y la función $X(t)$ se expresa:

$$X(t) = A_0 + \sum\left[(a_n^2 + b_n^2)^{1/2}\operatorname{sen}\left(n\,\omega\,t + \operatorname{arc\,tg}\frac{a_n}{b_n}\right)\right] \qquad [26.36]$$

EJEMPLO 26.5

Sea la función definida por las expresiones $f(x) = A$, para $2l\pi < x < (2l+1)\pi$, y $f(x) = -A$, para $(2l+1)\pi < x < 2(l+1)\pi$, en las cuales $l = 0, 1, 2, 3, \ldots$, que corresponde a una onda cuadrada como la indicada en la Figura 26.5. Calculemos la serie de Fourier componente de la misma.

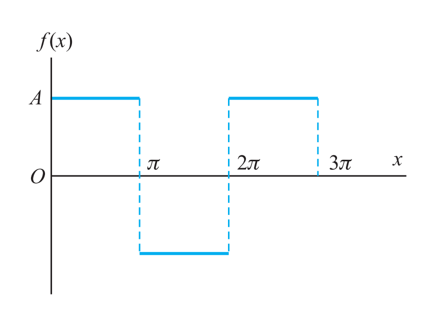


Figura 26.5.

Solución:

La onda dada podrá expresarse de la forma [26.32] y los coeficientes del desarrollo se calculan así:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} A\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-A)\,dx\right] = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} A\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} (-A\cos nx)\,dx =$$

$$= \frac{A}{n\pi}[\operatorname{sen} nx]_0^{\pi} - \frac{A}{n\pi}[\operatorname{sen} nx]_{\pi}^{2\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} A\operatorname{sen} nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} (-A\operatorname{sen} nx)\,dx =$$

$$= \frac{A}{n\pi}[-\cos nx]_0^{\pi} - \frac{A}{n\pi}[\cos nx]_{\pi}^{2\pi} = \frac{2A}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

la cual da:

$$b_1 = \frac{4A}{\pi} \quad ; \quad b_2 = 0 \quad ; \quad b_3 = \frac{4A}{3\pi} \quad ; \quad b_4 = 0 \quad ; \quad b_5 = \frac{4A}{5\pi}$$

y, con ello, la función $f(x)$ se expresa:

$$f(x) = \frac{4A}{\pi}\operatorname{sen} x + \frac{4A}{3\pi}\operatorname{sen} 3x + \frac{4A}{5\pi}\operatorname{sen} 5x + \cdots$$

En las Figuras 26.6, 26.7 y 26.8 aparecen los valores de $f(x)$ cuando tomamos solamente el primer sumando (Figura 26.6), los dos primeros (Figura 26.7) y los tres primeros (Figura 26.8).

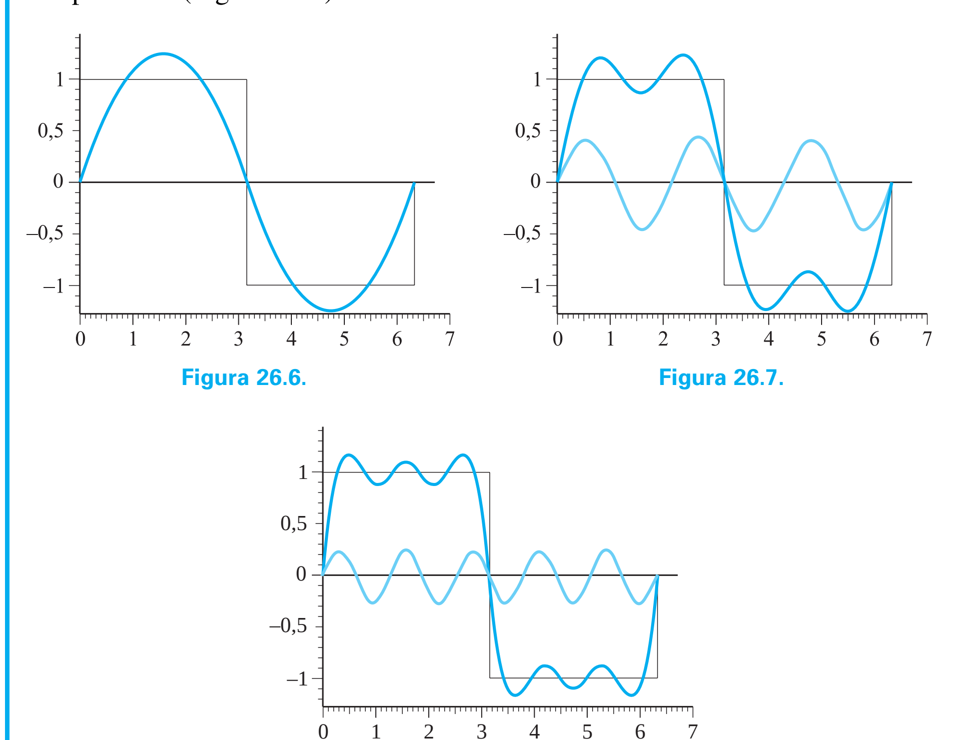


Figura 26.6.

Figura 26.7.

Figura 26.8.

La menor frecuencia $\nu_1 = \omega/2\pi$ se llama *fundamental*, y el sonido puro que la lleva, *componente fundamental*. Los otros sonidos componentes se denominan *armónicos* y sus frecuencias son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. Se dice que la componente de frecuencia $n\nu$, es el armónico de orden n.

Si en abscisas se llevan las frecuencias y en ordenadas las correspondientes amplitudes, se obtiene el denominado *espectro de frecuencias* (Figura 26.9).

Puesto que, según hemos indicado, los sonidos de frecuencia más alta son más absorbidos, al propagarse los sonidos complejos modificaran su espectro, disminuyendo su intensidad en mayor proporción los armónicos de más alta frecuencia.

Llamaremos ruido a toda impresión acústica no periódica cuyo espectro de frecuencias sea continuo en un cierto intervalo (Figura 26.10).

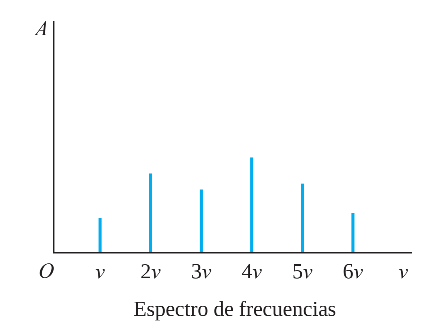


Figura 26.9.

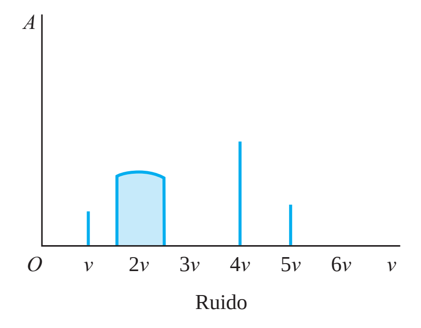


Figura 26.10.

26.10 Características subjetivas de la audición

La sensación fisiológica que nos produce el sonido es, evidentemente, subjetiva, pudiendo distinguirse en ella tres características fundamentales: la intensidad fisiológica, el tono y el timbre.

La *intensidad fisiológica* es la sensación que nos permite decir si un sonido es más o menos fuerte que otro. Está ligada directamente con la intensidad física del sonido, pero depende también de la frecuencia del mismo. Para una misma intensidad física, dos sonidos de frecuencias distintas dan, en general, intensidades fisiológicas distintas, $S = S(I, \nu)$.

El mínimo de intensidad sonora capaz de producir sensación auditiva se denomina *umbral mínimo de audición*, siendo función de la frecuencia y presentando un mínimo para los 4 000 Hz, frecuencia a la cual el oído presenta sensibilidad máxima.

Aumentando la intensidad sonora se llega a producir una sensación auditiva dolorosa, denominándose *umbral máximo de audición* o *umbral de sensación dolorosa* a la mínima intensidad sonora capaz de producirla, que también es función de la frecuencia. En la Figura 26.11 se han representado las curvas de sensación audible en función de la frecuencia.

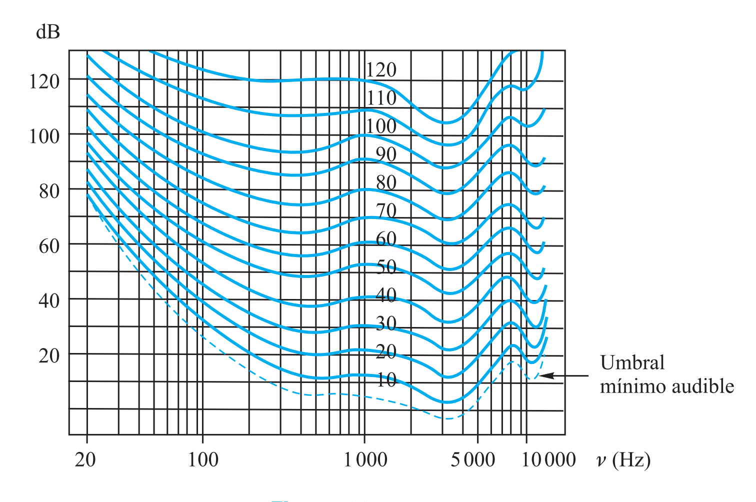


Figura 26.11.

La sensación fisiológica, $S(I, \nu)$, y la intensidad física del sonido están relacionadas por la ley de Fechner:

$$dS = K\,\frac{dI}{I}$$

en la que K es función de la frecuencia y expresa que la variación absoluta de intensidad de sensación fisiológica es proporcional a la variación relativa de la intensidad del sonido excitador. Integrando esta ecuación obtenemos:

$$S = K \ln I + \text{cte.}$$

y, si la sensación es nula para una cierta intensidad excitadora I_0, a una cierta frecuencia ν, $S(I_0, \nu) = 0$, la constante de integración vale:

$$0 = K \ln I_0 + \text{cte.} \quad \text{o} \quad \text{cte.} = -K \ln I_0$$

pudiendo expresarse:

Nivel de sensación fisiológica

$$S = K \ln \frac{I}{I_0} \qquad [26.37]$$

Fonio

La unidad de sensación auditiva se denomina *fonio* y el nivel de sensación auditiva se establece mediante la expresión:

$$F = K \log \frac{I}{I_0} \qquad [26.38]$$

Para un sonido de frecuencia 1 000 Hz, el valor de la constante de proporcionalidad vale 10 y, a esta frecuencia, el número de fonios y de decibelios coinciden, ya que la [26.38] se hace idéntica a la [26.25].

La sensación producida según la intensidad del sonido puede clasificarse de la siguiente forma:

De 0 a 20 dB apenas audible.
De 20 a 40 dB silencioso.
De 40 a 60 dB moderado.
De 60 a 80 dB ruidoso.
De 80 a 100 dB muy ruidoso.
De 100 a 120 dB intolerable.

Tono

El *tono* es la característica del sonido que nos permite decir si éste es agudo o grave. Esta característica está íntimamente relacionada con la frecuencia, pareciéndonos un sonido tanto más agudo cuanto mayor es su frecuencia.

La variación unitaria de frecuencia, $\Delta\nu/\nu$, mínima necesaria para percibir una variación en el tono del sonido, es función de la frecuencia, y se mantiene constante entre los 1 000 y los 6 000 Hz. Analíticamente, puede escribirse:

$$dT = C \frac{d\nu}{\nu}$$

cuya integración da:

$$T_2 - T_1 = C \ln \frac{\nu_2}{\nu_1}$$

A cada relación de frecuencias corresponde una diferencia de tonos, que en música se denomina *intervalo*, denominándose *octava* al intervalo que corresponde a una relación de frecuencias igual a 2.

Timbre

El *timbre* es la característica de un sonido que permite distinguir dos sonidos de la misma intensidad fisiológica y el mismo tono emitidos por dos instrumentos diferentes. El timbre está ligado en mayor o menor grado al espectro del sonido, y

el aparato auditivo es capaz de realizar el análisis armónico del sonido complejo, más concretamente, de detectar el espectro de amplitudes.

La audición es un fenómeno completamente subjetivo, ya que el aparato auditivo distorsiona el sonido en frecuencia, por no ser igualmente sensible a todas ellas; en fase, puesto que no transmite en igual velocidad todas las frecuencias y en amplitud, ya que si la intensidad de un sonido puro es elevada crea armónicos en el mismo. Asimismo, cuando el oido recibe dos frecuencias, v_1 y v_2, de alta intensidad, crea sonidos de frecuencia compuesta, en general, de la forma $v_1 + bv_2$.

Propiedades comunes a las diferentes ondas

CAPÍTULO 27

27.1 Principio de Huygens

Hemos visto cómo la perturbación del valor de una magnitud, producida en un punto de un medio elástico, se propaga a través de éste mediante un movimiento ondulatorio, que propaga energía y hace que la perturbación vaya llegando a los diferentes puntos del medio. Cabe pensar que cada punto del medio al que llega la onda causante de la perturbación es, a su vez, foco de emisión de nuevas ondas, que se denominan *secundarias*. Esto indujo a Huygens (1629-1695) a enunciar, en 1678, su principio: *todo punto alcanzado por una onda se puede considerar como foco emisor de nuevas ondas, llamadas secundarias, que sólo son activas, en cada instante, en los puntos de contacto con la envolvente común a todas ellas en ese instante.*

Sea O un centro emisor de ondas que se propagan en un medio homogéneo e isótropo. Los frentes de ondas serán esferas, el frente correspondiente al instante t tendrá un cierto radio r, y ha sido representado en la Figura 27.2. Cada punto de esta onda será centro emisor de ondas secundarias y la envolvente común a todas ellas en el instante $t + \Delta t$ es el nuevo frente de onda correspondiente a ese instante, que será otra esfera de radio $r + \Delta r$, siendo Δr el espacio recorrido por la onda secundaria en el intervalo de tiempo Δt, igual para todas ellas por la homogeneidad e isotropía del medio. Evidentemente, en la dirección de un radio cualquiera, la propagación de un tal movimiento es rectilínea y se llama *rayo* a la recta que parte del foco y es normal a los frentes de onda.

Para la aplicación del principio de Huygens no hay que tener en cuenta la parte de retroceso de las ondas secundarias y sí, únicamente, la dirigida en el sentido en el cual se propaga el movimiento ondulatorio.

En la Figura 27.1 se ha representado la propagación de un frente de ondas plano.

Figura 27.1.

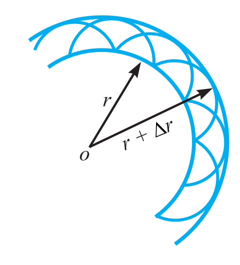


Figura 27.2.

27.2 Reflexión y refracción de ondas planas

Cuando una onda que se está propagando en un medio llega a la superficie de separación con otro, ésta da lugar a dos nuevas ondas, que parecen salir de la superficie

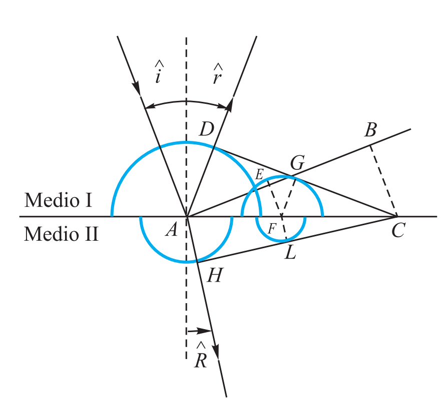


Figura 27.3.

de separación. Una, que se propaga en el mismo medio en que lo hacía la primitiva, es la *onda reflejada*, y otra, que atraviesa la superficie de separación y se propaga en el segundo medio, es la *onda refractada*.

La energía de la onda primitiva se reparte entre la onda reflejada y la refractada, dependiendo el reparto de la naturaleza de ambos medios.

Reflexión: supongamos que la superficie de separación de los dos medios es plana y que la dirección de propagación de los frentes planos de ondas forma con la normal a la superficie de separación un ángulo $\hat{i}$, que se denomina *ángulo de incidencia*. Consideremos dos puntos A y B de un mismo frente de onda incidente, uno de los cuales, el A, está en contacto con la superficie de separación, como se indica en la Figura 27.3. Este punto emitirá ondas secundarias de acuerdo con el principio de Huygens: la primera onda emitida, en el tiempo que tarda el punto B en llegar al C, habrá recorrido un espacio $AD = BC$, en el mismo medio en que venía propagándose. Otro punto cualquiera, E, del frente de onda, en este mismo tiempo, recorrerá la misma distancia, es decir, llegará a F y emitirá ondas secundarias que llegarán a G, verificando $EF + FG = BC$. Veamos que el punto que verifica esto pertenece al frente de onda CD.

La semejanza de los triángulos AEF y ABC permite escribir:

$$\frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC} \qquad [27.1]$$

Análogamente, la semejanza de los triángulos CGF y ABC hace que:

$$\frac{FG}{BC} = \frac{FC}{AC}$$

Sumando ambas expresiones:

$$\frac{EF + FG}{BC} = \frac{AF + FC}{AC} = 1$$

lo que obliga a que sea $EF + FG = BC$. En consecuencia, el frente de onda reflejado es el CGD, plano como el incidente, y cuya dirección de propagación es la AD. El ángulo $\hat{r}$ que esta dirección forma con la normal a la superficie de separación se llama *ángulo de reflexión*.

De la igualdad de los triángulos ABC y CDA se deduce la igualdad de los ángulos ADC y CBA y, por tanto, la de sus complementarios $\hat{i}$ y $\hat{r}$.

Leyes de la reflexión

Como resumen podemos enunciar las *leyes de la reflexión*:

1. El rayo incidente, la normal a la superficie reflejante en el punto de incidencia y el rayo reflejado se encuentran en el mismo plano, que es el de incidencia.

2. El frente de onda reflejado también es plano.

3. Los ángulos de incidencia y reflexión son iguales, $\hat{i} = \hat{r}$.

Refracción: consideremos nuevamente los dos puntos A y B del frente de onda. El punto A, en contacto con la superficie, emitirá ondas secundarias que, durante el tiempo que tarda el rayo que pasa por B en llegar a C, habrán recorrido el espacio AH, verificando $AH = v_2 t$, siendo $t = \dfrac{BC}{v_1}$, expresiones en las que v_1 y v_2 son las velocidades de propagación de la perturbación en cada uno de los dos medios, respectivamente.

Otro punto cualquiera, E, del frente de onda incidente considerado, en el mismo tiempo t, recorrerá el espacio $EF + FL$, verificando:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{EF}{v_1} + \frac{FL}{v_2} \qquad [27.2]$$

Veamos cómo el punto F, así alcanzado, pertenece al frente de onda CH, que será el frente de onda refractado. Supongamos que así es: la semejanza de los triángulos AHC y FLC da:

$$\frac{EF}{AH} = \frac{FC}{AC}$$

que, sumada con la [27.1], resulta:

$$\frac{EF}{BC} + \frac{FL}{AH} = \frac{AF + FC}{AC} = 1$$

$$\frac{EF}{v_1 t} + \frac{FL}{v_2 t} = 1 \quad \text{o} \quad \frac{EF}{v_1} + \frac{FL}{v_2} = t$$

es decir, el punto F perteneciente al frente de onda refractado CH es el que verifica [27.2]. En consecuencia, todo punto del frente de onda AB tiene su homólogo en el refractado CH. El ángulo $\hat{R}$ que el rayo refractado AH forma con la normal se denomina *ángulo de refracción*.

Puesto que se verifica:

$$\operatorname{sen} \hat{i} = \operatorname{sen} BAC = \frac{BC}{AC}$$

y

$$\operatorname{sen} \hat{R} = \operatorname{sen} ACH = \frac{AH}{AC}$$

su cociente es:

$$\frac{\operatorname{sen} \hat{i}}{\operatorname{sen} \hat{R}} = \frac{BC}{AH} = \frac{v_1}{v_2} \qquad [27.3]$$

lo que constituye la expresión analítica de la ley de Snell.

Como resumen podemos enunciar las *leyes de la refracción*:

Leyes de refracción

1. El rayo incidente, la normal en el punto de incidencia y el rayo refractado están en un mismo plano, que es el plano de incidencia.
2. El frente de onda refractado también es plano.
3. Los senos de los ángulos de incidencia y de refracción son proporcionales a las velocidades de propagación de los frentes incidente y refractado (ley de Snell o de Descartes). Esta ley fue descubierta experimentalmente por Snell y demostrada, a partir de la primitiva teoría corpuscular de la luz, por Descartes.

Las leyes encontradas para la reflexión y refracción de frentes de onda planos sobre superficies planas siguen siendo válidas cuando la superficie de separación no sea plana, porque en cada punto de incidencia podemos considerar una pequeña porción de superficie como plana; lo que sí se producirá, como puede observarse en la Figura 27.4, es una dispersión o concentración de los rayos reflejados, según sea la curvatura de la superficie reflejante. De forma análoga sucederá con los refractados.

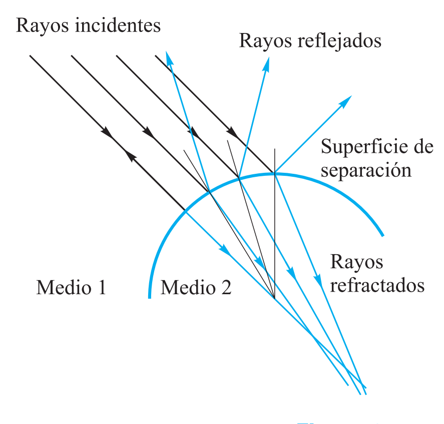


Figura 27.4.

Veamos cómo pueden deducirse analíticamente las leyes de la reflexión y la refracción de ondas planas en la superficie plana de separación de dos medios. Sean las expresiones de las ondas incidente, reflejada y refractada, respectivamente:

$$Y_i = A_i \operatorname{sen}(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad ; \quad Y_r = A_r \operatorname{sen}(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad \text{y} \quad Y_R = A_R \operatorname{sen}(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega\, t)$$

Las tres ondas son de la misma frecuencia, ya que ésta no cambia por la reflexión ni la refracción.

El valor Y de la propiedad física de que se trate es único en el punto de incidencia, pero este punto pertenece a los dos medios, por lo cual su valor, calculado a un lado y a otro de la superficie, debe ser el mismo. Es decir, debe ser:

$$Y_i + Y_r = Y_R \qquad [27.4]$$

y, para que ello se verifique para todo punto de la superficie de separación y en todo instante, las fases deben ser iguales, lo que exige que sea:

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} \qquad [27.5]$$

y, además, debe ser $A_i + A_r = A_R$.

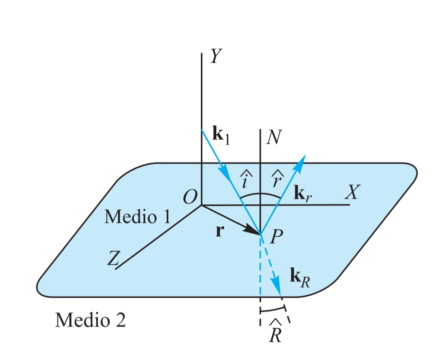


Figura 27.5.

Tomemos como origen del sistema de referencia un punto O del plano de separación de ambos medios, elijamos el eje OY normal al plano de separación y el plano XOY paralelo al plano de incidencia, determinado por el rayo incidente y la normal a la superficie de separación en el punto de incidencia, según se indica en la Figura 27.5. En este sistema de referencia, los vectores de onda se expresan:

$$\mathbf{k}_i = k_{ix}\,\mathbf{u}_x - k_{iy}\,\mathbf{u}_y \quad ; \quad \mathbf{k}_r = k_{rx}\,\mathbf{u}_x + k_{ry}\,\mathbf{u}_y + k_{rz}\,\mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{k}_R = k_{Rx}\,\mathbf{u}_x + k_{Ry}\,\mathbf{u}_y + k_{Rz}\,\mathbf{u}_z \quad \text{y} \quad \mathbf{r} = x\mathbf{u}_x + z\mathbf{u}_z$$

Con lo cual, las ecuaciones de [27.5] se escriben:

$$k_{ix}\,x = k_{rx}\,x + k_{rz}\,z = k_{Rx}\,x + k_{Rz}\,z$$

o bien:

$$(k_{ix} - k_{rx})\,x - k_{rz}\,z = 0 \qquad \text{y} \qquad (k_{ix} - k_{Rx})\,x - k_{Rz}\,z = 0$$

ecuaciones que han de verificarse para todo valor de x y z, lo que exige que sea:

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{Rx} \quad \text{y} \quad k_{rz} = k_{Rz} = 0 \qquad [27.6]$$

Por tanto, los vectores $\mathbf{k}_r$ y $\mathbf{k}_R$ están contenidos en el plano de incidencia. *El rayo incidente, la normal, y los rayos reflejado y refractado están en un mismo plano, que es el de incidencia.*

Puesto que es:

$$k_i = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{2\pi\nu}{\lambda_1\nu} = \frac{\omega}{v_1} = k_r = k$$

y

$$k_R = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{\omega}{v_2}$$

las componentes de los vectores de onda son:

$$k_{ix} = k \operatorname{sen}\hat{i} \quad , \quad k_{rx} = k \operatorname{sen}\hat{r} \quad \text{y} \quad k_{Rx} = k_R \operatorname{sen}\hat{R} \qquad [27.7]$$

lo que llevado a la primera de [27.6] da:

$$k \operatorname{sen} \hat{i} = k \operatorname{sen} \hat{r} \quad \text{de donde:} \quad \hat{i} = \hat{r}$$

El ángulo de incidencia y el de reflexión son iguales.

Llevando [27.7] a la segunda Ecuación [27.6], se obtiene:

$$k \operatorname{sen} \hat{i} = k_R \operatorname{sen} \hat{R} \qquad \text{o} \qquad \frac{\omega}{v_1} \operatorname{sen} \hat{i} = \frac{\omega}{v_2} \operatorname{sen} \hat{R}$$

de donde:

$$\frac{\operatorname{sen} \hat{i}}{\operatorname{sen} \hat{r}} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Ley de Snell

Los senos de los ángulos de incidencia y refracción son proporcionales a las velocidades de propagación de los frentes incidente y refractado.

Conocida la amplitud de la onda incidente se hace necesario, para poder determinar las amplitudes de las ondas reflejada y refractada, conocer las condiciones de contorno del problema concreto de que se trate.

27.3 Reflexión y refracción de ondas esféricas sobre superficies planas

Consideremos la fuente puntual O situada en un medio homogéneo e isótropo, lo que hace que la perturbación producida en la fuente se transmita mediante ondas esféricas que incidirán sobre la superficie plana que separa los medios 1 y 2 (Figura 27.6). Veamos como se produce, en este caso, la reflexión y la refracción de las ondas.

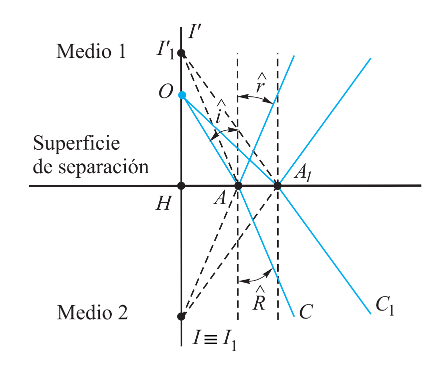


Figura 27.6.

Reflexión: tracemos un rayo incidente OA, cuyo ángulo de incidencia es $\hat{i}$. El rayo reflejado, AB, sale con un ángulo de reflexión $\hat{r}$ igual a $\hat{i}$, y corta a la normal a la superficie reflectora bajada desde O, en un punto I. Los triángulos OAH e IHA son iguales, ya que tienen los tres ángulos iguales y un lado común, el HA. En consecuencia, será $OH = HI$.

Si en lugar del rayo OA hubiéramos tomado otro cualquiera OA_1, vamos a ver cómo el rayo A_1B_1 corta a OH en un punto I_1, que es el mismo I. En efecto, los triángulos OHA_1 e I_1HA_1 son iguales por tener los tres ángulos iguales y el lado HA_1 común; por tanto, debe ser $OH = HI_1$, lo que demuestra que el punto I y el I_1 son el mismo.

Por tanto, todos los rayos reflejados pasan por el punto I, simétrico del O respecto a la superficie reflectora y, en consecuencia, los frentes de onda reflejados son esféricos, de centro I, y simétricos de los incidentes respecto de la citada superficie. Al punto I se le denomina *imagen por reflexión del O*.

Refracción: tracemos el rayo AC refractado del incidente OA, su dirección cortará a OH en un punto I'. La distancia $I'H$ puede expresarse:

$$I'H = HA \operatorname{ctg} \hat{R} = OH \frac{\tan \hat{i}}{\tan \hat{R}} \qquad [27.8]$$

El rayo refractado A_1C_1 cortará en un punto I'_1 y la distancia de éste a H será:

$$I'_1H = HA_1 \operatorname{ctg} \hat{R}_1 = OH \frac{\tan \hat{i}_1}{\tan \hat{R}_1} \qquad [27.9]$$

De la comparación de [27.8] y [27.9] se deduce que $I'H$ e I'_1H son distintos, pues para que fueran iguales debería verificarse:

$$\frac{\tan \hat{i}}{\tan \hat{R}} = \frac{\tan \hat{i}_1}{\tan \hat{R}_1} = \text{cte.}$$

lo que va en contra de la ley de Snell, ya que si el cociente de los senos de los ángulos de incidencia y refracción debe ser constante, no puede serlo el cociente de las tangentes. En consecuencia, el tren de ondas refractado no está formado por ondas esféricas.

Al no incidir todos los rayos refractados en un mismo punto, éstos no forman una imagen puntual de O. Cada dos rayos refractados, simétricos respecto de la normal, se cortan en un punto distinto y el lugar geométrico de estos puntos es una cónica denominada *cáustica*.

27.4 Interferencias

Si a un punto de un medio llegan en un mismo instante varias ondas de la misma naturaleza, el estado de la perturbación en ese punto es la suma del provocado en él por cada una de las ondas que llega, lo que es un efecto del principio de superposición, debido a la linealidad de la ecuación de ondas, pues cualquier combinación lineal de soluciones de ella también es solución.

Debido a la interferencia aparecen regiones donde la intensidad del fenómeno que se propaga está reforzada, lo que se conoce con el nombre de *interferencia constructiva*, y otras en las cuales está disminuida, llegando incluso a anularse, efecto denominado *interferencia destructiva*.

Para que realmente estos fenómenos de interferencias se manifiesten, es necesario que las ondas que se superponen sean coherentes, es decir, que su diferencia de frecuencias y de fases se mantenga constante. Si ello no fuera así y esas diferencias cambiaran aleatoriamente, también cambiarían aleatoriamente las zonas donde se dan las interferencias constructivas y destructivas, y el fenómeno no se produciría realmente.

Analicemos la interferencia entre dos ondas armónicas de igual frecuencia en dos supuestos:

a) Cuando ambas son de igual amplitud.
b) Cuando son de amplitudes diferentes.

a) *Interferencia de dos ondas armónicas de igual frecuencia y amplitud.*

Supongamos dos focos, O_1 y O_2, que emiten en fase ondas senoidales de la misma naturaleza, frecuencia y amplitud (Figura 27.7). Supongamos también que el medio propagador es homogéneo e isótropo, y que no hay absorción. En estos supuestos, la perturbación provocada en un punto P del medio, distante r_1 y r_2 respectivamente de cada uno de los focos, es, para cada una de las ondas:

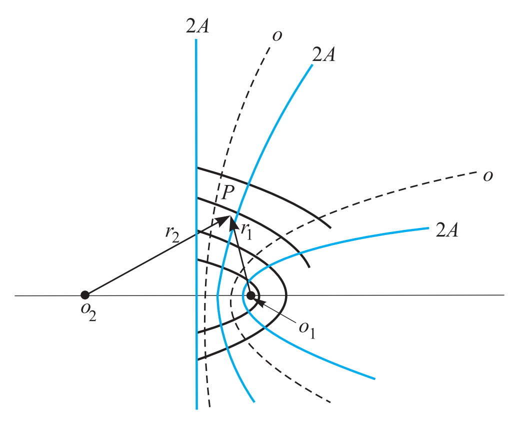


Figura 27.7.

$$Y_1 = A\,\text{sen}\,(\omega t - kr_1) \quad \text{e} \quad Y_2 = A\,\text{sen}\,(\omega t - kr_2) \qquad [27.10]$$

El estado de perturbación del punto P será la suma de las perturbaciones provocadas por cada una de las ondas:

$$Y = Y_1 + Y_2 = A\,[\text{sen}\,(\omega t - kr_1) + \text{sen}\,(\omega t - kr_2)] =$$

$$= 2A \cos \frac{r_2 - r_1}{\lambda}\,\pi \cdot \text{sen}\left(\omega t - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right) \qquad [27.11]$$

Expresión que nos indica que el punto P está sometido a una vibración senoidal de igual frecuencia ω y cuya amplitud es:

$$a = 2A\cos\frac{r_2 - r_1}{\lambda}\pi \qquad [27.12]$$

Amplitud en P

El lugar geométrico de los puntos del medio que vibran con igual amplitud tiene por ecuación $r_2 - r_1 = $ cte., que son superficies hiperbólicas de revolución, de focos O_1 y O_2.

Los puntos de máxima amplitud serán los que verifiquen:

$$\frac{r_2 - r_1}{\lambda}\pi = n\pi \quad ; \quad r_2 - r_1 = n\lambda \qquad [27.13]$$

y el valor de la amplitud máxima será $a_{máx} = 2A$.

Por el contrario, los puntos de amplitud nula serán los que verifiquen:

$$\frac{r_2 - r_1}{\lambda}\pi = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad ; \quad r_2 - r_1 = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \qquad [27.14]$$

Por tanto, las superficies hiperbólicas de máxima amplitud y de amplitud nula se suceden alternativamente, siendo el plano mediatriz del segmento O_1O_2 lugar geométrico de puntos de máxima amplitud. A las superficies que son lugar geométrico de los puntos que vibran con amplitud máxima se les denomina *ventrales*, mientras que aquéllas cuyos puntos vibran con amplitud mínima se denominan *nodales*.

De la simple observación de la [27.11] se deduce que la fase inicial del estado de la perturbación en el punto P es:

$$\varphi = \frac{r_1 + r_2}{\lambda}\pi$$

El lugar geométrico de los puntos que vibran en concordancia de fase tendrá por ecuación $r_1 + r_2 = $ cte., es decir, son elipsoides de revolución, de focos O_1 y O_2.

b) *Interferencia de ondas armónicas de igual frecuencia y distinta amplitud.*

Si las amplitudes de las ondas emitidas por los focos O_1 y O_2 son distintas, las perturbaciones que producen en el punto P son, respectivamente:

$$Y_1 = A_1 \operatorname{sen}(\omega t - kr_1) \quad \text{e} \quad Y_2 = A_2 \operatorname{sen}(\omega t - kr_2)$$

El estado de la perturbación en P será la suma de las perturbaciones provocadas por cada una de las ondas:

$$\begin{aligned} Y = Y_1 + Y_2 &= A_1(\operatorname{sen}\omega t \cdot \cos kr_1 - \cos\omega t \cdot \operatorname{sen} kr_1) + \\ &= A_2(\operatorname{sen}\omega t \cdot \cos kr_2 - \cos\omega t \cdot \operatorname{sen} kr_2) = \\ &= \operatorname{sen}\omega t\,(A_1\cos kr_1 + A_2\cos kr_2) - \cos\omega t\,(A_1 \operatorname{sen} kr_1 + A^2 \operatorname{sen} kr_2) \end{aligned}$$

que haciendo:

$$\begin{aligned} A_1\cos kr_1 + A_2\cos kr_2 &= A\cos\varphi \\ A_1\operatorname{sen} kr_1 + A_2\operatorname{sen} kr_2 &= -A\operatorname{sen}\varphi \end{aligned} \qquad [27.15]$$

se escribe:

$$Y = A\operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \qquad [27.16]$$

Lo que nos dice que el punto P vibra con la misma frecuencia de los focos emisores.

La amplitud de su perturbación se obtiene al elevar al cuadrado y sumar las expresiones [27.15], resultando:

Amplitud en P

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} \qquad [27.17]$$

cuyo valor máximo es:

$$A_{\text{máx}} = A_1 + A_2$$

valor que se presenta para $\cos 2\pi \dfrac{r_2 - r_1}{\lambda} = 1$, o bien cuando es:

$$2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = 2n\pi$$

de donde:

$$r_2 - r_1 = n\lambda$$

Los máximos de intensidad se presentan en puntos para los cuales la diferencia de marcha es un múltiplo de la longitud de onda.

El valor mínimo se presentará cuando sea:

$$\cos 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = -1$$

o bien:

$$2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = (2n + 1)\pi$$

de donde:

$$r_2 - r_1 = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$$

Los mínimos de intensidad se presentan en puntos para los cuales la diferencia de marcha es un múltiplo impar de media longitud de onda.

El valor de la amplitud mínima será $A_{\text{mín}} = |A_1 - A_2|$.

Todos los puntos para los cuales la diferencia de marcha es constante están sobre un hiperboloide de revolución, de focos O_1 y O_2. Los hiperboloides que presentan intensidad máxima y los que presentan intensidad mínima se van alternando.

La fase φ con la cual vibrará el punto P está dada por:

$$\tan \varphi = -\frac{A_1 \operatorname{sen} kr_1 + A_2 \operatorname{sen} kr_2}{A_1 \cos kr_1 + A_2 \cos kr_2} \qquad [27.18]$$

En función de las intensidades, la Ecuación [27.17] se expresa:

Intensidad en P

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} \qquad [27.19]$$

La [27.17] puede expresarse en función de la diferencia de fase con que llegan las ondas a P, éstas son:

$$\varphi_1 = \omega t - kr_1 \quad \text{y} \quad \varphi_2 = \omega t - kr_2$$

cuya diferencia es $\varphi_1 - \varphi_2 = k(r_2 - r_1)$.

Con lo cual, se puede expresar:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \qquad [27.20]$$

Amplitud en P

y la Ecuación [27.19]:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \qquad [27.21]$$

Intensidad en P

Fórmulas que, aunque han sido deducidas para dos focos que emitan en fase, son de validez general cualquiera que sea el defasaje inicial de las dos ondas que interfieren, como vamos a ver a continuación.

Si los focos emiten con un defasaje φ, las dos ondas en el punto P pueden expresarse de la siguiente forma:

$$Y_1 = A_1 \operatorname{sen}(\omega t - kr_1) = A_1 e^{-jkr_1} \cdot e^{j\omega t} = \bar{A}_i e^{j\omega t}$$
$$Y_2 = A_2 \operatorname{sen}(\omega t - kr_2 - \varphi) = A_2 e^{-j(kr_2 + \varphi)} e^{j\omega t} = \bar{A}_2 e^{j\omega t}$$

y la interferencia en P da:

$$Y = Y_1 + Y_2 = (\bar{A}_1 + \bar{A}_2) e^{j\omega t} = \bar{A} e^{j\omega t} = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

siendo A y ϕ el módulo y el argumento, respectivamente, del complejo:

$$\bar{A} = A_1 e^{-jkr_1} + A_2 e^{-j(kr_2 + \varphi)}$$

La amplitud al cuadrado se obtiene multiplicando el complejo por su conjugado:

$$\bar{A}^* = A_1 e^{jkr_1} + A_2 e^{j(kr_2 + \varphi)}$$

resultando:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 [e^{j[k(r_2 - r_1) + \varphi]} + e^{-j[k(r_2 - r_1) + \varphi]}] =$$
$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos[k(r_2 - r_1) + \varphi] \qquad [27.22]$$

Puesto que la fase de cada una de las ondas al llegar a P es:

$$\varphi_1 = \omega t - kr_1 \quad \text{y} \quad \varphi_2 = \omega t - kr_2 - \varphi$$

su diferencia es $\varphi_1 - \varphi_2 = k(r_2 - r_1) + \varphi$, lo que pone de manifiesto que las expresiones [27.20] y [27.21] son de validez general para cualquier defasaje inicial con el que emitan los focos.

La expresión general de la fase ϕ, igual al argumento del complejo $\bar{A}$, es:

$$\tan \phi = -\frac{\operatorname{sen} kr_1 + \operatorname{sen}(kr_2 + \varphi)}{\cos kr_1 + \cos(kr_2 + \varphi)} \qquad [27.23]$$

EJEMPLO 27.1

Dos altavoces, A y B, que distan entre sí 10 m, emiten sonido uniformemente en todas las direcciones. La potencia acústica del foco A es $P_A = 16 \times 10^{-4}$ W, y la del foco B, $P_B = 27 \times 10^{-4}$ W. Ambos altavoces emiten en oposición de fase con una frecuencia de 160 Hz. Calculemos:

a) La diferencia de fase de ambas señales en un punto C situado en el segmento que une los focos a 4 m del foco A. Tómese como velocidad del sonido 320 m/s.

b) La intensidad del sonido en C si sólo funciona el altavoz A, y la misma cuando sólo funcione el B.

c) La intensidad del sonido en C cuando funcionan, simultáneamente, los dos altavoces.

d) El nivel sonoro en C cuando funcionan, simultáneamente, los dos altavoces.

Solución:

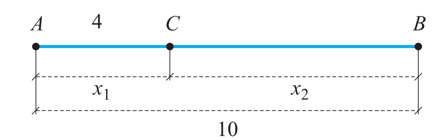


Figura 27.8.

a) La señal que llega a C, proveniente de A, es (Figura 27.8):

$$X_1 = A_1 \operatorname{sen}(\omega t - kx_1)$$

Análogamente, la onda emitida por B, al llegar a C, es:

$$X_2 = A_2 \operatorname{sen}(\omega t - kx_2 + \pi)$$

La fase de cada una de las señales al llegar a C es:

$$\varphi_1 = \omega t - 4k \quad \text{y} \quad \varphi_2 = \omega t - 6k + \pi$$

y su diferencia $\varphi_1 - \varphi_2 = 2k - \pi = 4\pi/\lambda - \pi$.

Puesto que es $\lambda v = v$, es $\lambda = 2$ y, con ello: $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$.

b) La intensidad del sonido en C cuando funciona únicamente A es:

$$I_1 = \frac{P_A}{S} = \frac{16 \times 10^{-4}}{4\pi \times 16} = \frac{10^{-4}}{4\pi}$$

La intensidad del sonido en C cuando funciona únicamente B es:

$$I_2 = \frac{P_B}{S} = \frac{27 \times 10^{-4}}{4\pi \times 36} = \frac{3 \times 10^{-4}}{16\pi}$$

c) La intensidad en C cuando funcionan los dos altavoces será la debida a la superposición de las ondas que llegan, la cual está dada por la [27.21] que, en este caso, se expresa:

$$I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

que, al sustituir los valores de las intensidades, resulta:

$$I = \frac{10^{-4}}{16\pi}(7 - 4\sqrt{3}) = 1{,}43 \times 10^{-7}\ \text{W/m}^2$$

d) El nivel sonoro en C cuando funcionan los dos altavoces es:

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{1{,}43 \times 10^{-7}}{10^{-12}} = 10 \log(1{,}43 \times 10^5) = 51{,}55\ \text{dB}$$

27.5 Ondas estacionarias

Si en un medio se propagan en la misma dirección y sentidos opuestos dos ondas armónicas de la misma naturaleza, frecuencia y amplitud, veamos cuál es la perturbación resultante en los distintos puntos del medio (Figura 27.9). Tomemos un

origen de tiempos y un origen de coordenadas, tales que en O ambas ondas se expresen:

$$Y_0 = A \operatorname{sen} \omega t$$

En un punto de abscisa x las perturbaciones provocadas por cada una de las ondas son:

$$Y_1 = A \operatorname{sen}(\omega t - kx) \quad \text{e} \quad Y_2 = A \operatorname{sen}(\omega t + kx) \qquad [27.24]$$

La perturbación resultante de ambas será:

$$Y = Y_1 + Y_2 = 2A \cos kx \cdot \operatorname{sen} \omega t \qquad [27.25]$$

Cuya amplitud es únicamente función de la abscisa:

$$a = 2A \cos kx \qquad [27.26]$$

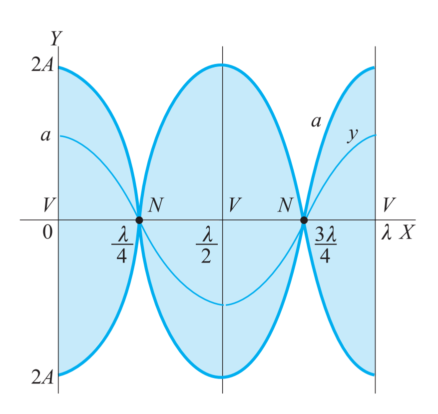


Figura 27.9.

El factor $\operatorname{sen} \omega t$ toma, en cada instante, un valor particular, para el cual hay una cierta onda Y, representada en la Figura 27.9 mediante una línea de puntos. Si la frecuencia de vibración es alta, no podremos detectar por separado cada una de las ondas y la visión, cuando el fenómeno sea visible o se visualice, será la de un espacio lleno de ondas limitado por la onda fija [27.26] y su simétrica. En tal situación da la impresión de que no hay propagación alguna de ondas, de aquí que a este tipo de movimiento ondulatorio se le denomine *ondas estacionarias*.

La amplitud máxima, cuyo valor es $2A$, se dará en los puntos de abscisa $x = n\lambda/2$, puntos que, según ya hemos indicado, se denominan ventrales. La amplitud se anula en los puntos de abscisa $x = (2n + 1)\lambda/4$, que se denominan *nodos*. En la Figura 27.9 se ha representado la Ecuación [27.26] en cualquiera de los instantes $t = (4n + 1)T/4$, señalándose con N los puntos nodales y con V los ventrales. En trazo fino se representa la Ecuación [27.25] en los mismos instantes. Para los tiempos $t = (4n + 3)T/4$, la situación es simétrica respecto al eje de las equis.

27.6 Reflexión y transmisión en superficies de separación

Cuando una onda incide en la superficie de separación de dos medios de distinta impedancia, parte de ella es reflejada y parte puede ser transmitida.

Sea una onda de presión incidente p_i, y las reflejada y transmitida p_r y p_t, respectivamente (Figura 27.10). En cada punto de la superficie de separación la presión es única y debe verificarse:

$$p_i + p_r = p_t \qquad [27.27]$$

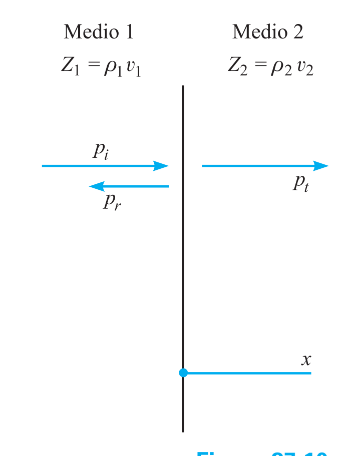


Figura 27.10.

Las ondas de presión obedecen a la Expresión [26.11]:

$$p = \rho v A\omega = ZA\omega$$

y la velocidad de las partículas del medio es:

$$u = A\omega, \quad \text{con lo cual:} \quad p = Zu$$

Por tanto, podemos escribir:

$$p_i = Z_1 u_i \quad , \quad p_r = -Z_1 u_r \quad \text{y} \quad p_t = Z_2 u_t$$

y, con ello, la [27.27] se expresa:

$$Z_1 u_i - Z_1 u_r = Z_2 u_t \qquad [27.28]$$

Cada punto de la superficie de separación tiene velocidad única, debiendo verificarse:

$$u_i + u_r = u_t \qquad [27.29]$$

Eliminando u_t entre las dos últimas fórmulas $Z_1 u_i - Z_1 u_r = Z_2(u_i + u_r)$, de donde:

$$\frac{u_r}{u_i} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{A_r}{A_i} = -\frac{p_r}{p_i} \qquad [27.30]$$

Dividiendo la [27.29] por u_i, $1 + \frac{u_r}{u_i} = \frac{u_t}{u_i}$, y utilizando la [27.30] resulta:

$$\frac{u_t}{u_i} = 1 + \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{A_t}{A_i} = \frac{Z_2}{Z_1}\frac{p_t}{p_i} \qquad [27.31]$$

Para las ondas de presión, según lo deducido, son:

$$\frac{p_r}{p_i} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \qquad [27.32]$$

$$\frac{p_t}{p_i} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \qquad [27.33]$$

Si es $Z_2 > Z_1$, la onda de presión reflejada y la incidente están en fase, mientras que si es $Z_2 < Z_1$, la onda de presión reflejada está en oposición con la incidente. Para velocidades y desplazamientos sucede lo contrario; si es $Z_2 < Z_1$, las ondas reflejada e incidente están en fase, mientras que si es $Z_2 > Z_1$, están en oposición.

El reparto de la energía que aporta la onda incidente entre las ondas reflejada y transmitida se realiza de acuerdo a las siguientes relaciones:

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{\frac{1}{2} Z_1 \omega^2 A_r^2}{\frac{1}{2} Z_1 \omega^2 A_i^2} = \left(\frac{A_r}{A_i}\right)^2 = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \qquad [27.34]$$

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{\frac{1}{2} Z_2 \omega^2 A_t^2}{\frac{1}{2} Z_1 \omega^2 A_i^2} = \frac{Z_2}{Z_1}\left(\frac{A_t}{A_i}\right)^2 = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \qquad [27.35]$$

27.7 Oscilaciones transversales de una cuerda

Consideremos una cuerda sujeta por sus dos extremos a sendos puntos fijos, separados entre sí una distancia L, y supongamos que la cuerda es homogénea, con masa μ_0 por unidad de longitud y con una tensión inicial T_0 (Figura 27.11).

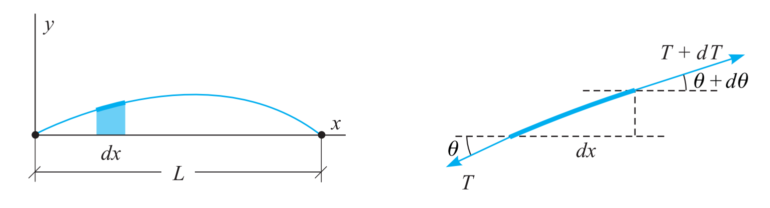


Figura 27.11.

Si separamos la cuerda transversalmente de su posición inicial, aparecerán en ella unas tensiones que tratarán de llevarla a su posición primitiva, la cual será rebasada por la inercia, entrando la cuerda en oscilación.

Aislemos una porción elemental de cuerda. Las tensiones a que estaban sometidas sus extremos T y $T + dT$, y el ángulo que éstas formaban con la posición inicial es, respectivamente, θ y $\theta + d\theta$.

La componente de la tensión sobre el eje transversal es:

$$F_y = (T + dT)\,\text{sen}\,(\theta + d\theta) - T\,\text{sen}\,\theta$$

Haciendo sen $d\theta \cong d\theta$ y cos $d\theta \cong 1$, y despreciando infinitésimos de orden superior a dos, se escribe:

$$F_y = d\,(T\,\text{sen}\,\theta) = \frac{\partial}{\partial x}\,(T\,\text{sen}\,\theta)\,dx \qquad [27.36]$$

La componente de la tensión sobre la dirección primitiva de la cuerda es:

$$F_x = (T + dT)\cos(\theta + d\theta) - T\cos\theta$$

la cual, con las aproximaciones indicadas, se expresa:

$$F_x = d\,(T\cos\theta)$$

Puesto que la cuerda está sometida a oscilaciones transversales, debe ser $F_x = 0$ y, por tanto:

$$T\cos\theta = T_0$$

Al llevar el valor de $T = \dfrac{T_0}{\cos\theta}$ a la Ecuación [27.36], resulta:

$$F_y = \frac{\partial}{\partial x}\,(T_0\,\text{tg}\,\theta)\,dx$$

y, puesto que es $\tan\theta = \dfrac{\partial y}{\partial x}$, se escribe:

$$F_y = \frac{\partial}{\partial x}\left(T_0\,\frac{\partial y}{\partial x}\right)dx = T_0\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,dx$$

La ecuación del movimiento del elemento de cuerda es:

$$\mu_0\,dx\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,dx$$

de donde:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu_0}{T_0}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad [27.37]$$

Ecuación de ondas en una cuerda

que es la ecuación de ondas en la cuerda, cuya velocidad de propagación es:

$$v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}} \qquad [27.38]$$

Velocidad de propagación en una cuerda

y cuya solución es de la forma:

$$y = A\,\text{sen}\,(\omega t - kx)$$

Ondas estacionarias en una cuerda

En los extremos de la cuerda, por ser éstos fijos, habrá un cambio de fase en la reflexión. Concretamente, en O, la onda regresiva que llega a él es:

$$Y_1 = A \operatorname{sen}(\omega t + kx)$$

y la onda progresiva que sale de él:

$$Y_2 = -A \operatorname{sen}(\omega t - kx)$$

Por tanto, la solución general es:

$$Y = A[\operatorname{sen}(\omega t + kx) - \operatorname{sen}(\omega t - kx)] = 2A \operatorname{sen} kx \cdot \cos \omega t \qquad [27.39]$$

que corresponde a ondas estacionarias, realizando los diferentes puntos de la cuerda movimientos armónicos simples de la misma frecuencia y cuya amplitud es función de la posición:

$$a = 2A \operatorname{sen} kx \qquad [27.40]$$

La vibración será nula en los puntos que verifican $kx = n\pi$, o bien:

$$x = n\frac{\pi}{k} = n\frac{\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} = n\frac{\lambda}{2} \qquad [27.41]$$

denominándose a estos puntos *nodos*. El punto O siempre es un nodo, puesto que no puede vibrar, lo cual es dado por la Ecuación [27.41], pues independientemente del valor de λ, para $n = 0$ resulta $x = 0$, un nodo. El otro extremo de la cuerda, $x = L$, también es fijo y será otro nodo. Esto condiciona las longitudes de onda que pueden propagarse en la cuerda, ya que deben verificar:

$$L = n\frac{\lambda}{2}$$

de donde:

$$\lambda = \frac{2L}{n} = 2L, L, \frac{2L}{3}, \frac{L}{2}, \ldots \qquad [27.42]$$

Vemos así cómo las longitudes de onda que pueden propagarse en la cuerda son una serie de valores discretos determinados por las condiciones de contorno, concretamente por la separación de los puntos fijos extremos de la cuerda, es decir, por la longitud de ésta (Figura 27.12).

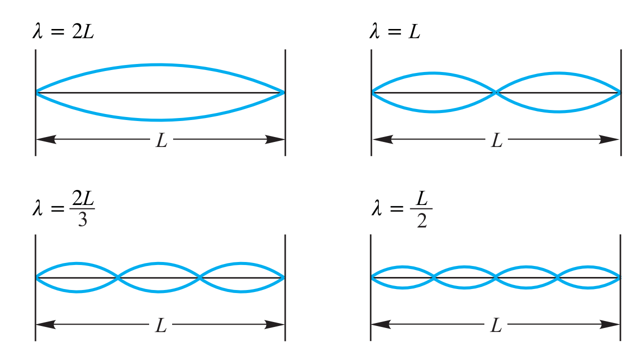


Figura 27.12.

La frecuencia es $\nu = v/\lambda$ y, utilizando las Ecuaciones [27.38] y [27.42], se escribe:

$$\nu = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}} = \nu_1,\ 2\nu_1,\ 3\nu_1,\ \ldots$$

Todas las posibles frecuencias son múltiplos de la menor, llamada *frecuencia fundamental*:

$$\nu_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}}$$

Por tanto, las frecuencias están *cuantizadas* y sus valores vienen determinados por la longitud L de la cuerda, la tensión inicial de ésta y su masa por unidad de longitud.

EJEMPLO 27.2

Dos ondas transversales de igual amplitud, $A = 2$ cm, e igual longitud de onda $\lambda = 6$ cm, se propagan en una cuerda en sentidos opuestos con igual módulo en su velocidad, $v = 0{,}6$ cm/s. Tomando como origen un punto en el cual ambas ondas están en fase, determínese:

a) La frecuencia y el periodo de las ondas del enunciado.

b) La ecuación de cada una de las dos ondas.

c) La ecuación de la onda que aparece como resultado de la superposición de las dadas.

d) Las posiciones de los ceros, los máximos y mínimos de la onda resultante.

e) La gráfica de la amplitud de la onda resultante.

Solución:

a) La frecuencia de las ondas es:

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{0{,}6}{6} = 0{,}1 \text{ Hz}$$

El periodo será:

$$P = \frac{1}{\nu} = 10 \text{ s}$$

b) La ecuación de la onda progresiva es:

$$Y_1 = A \operatorname{sen}(\omega t - kx) = 2 \operatorname{sen} \pi\left(\frac{t}{5} - \frac{x}{3}\right)$$

La ecuación de la onda regresiva es:

$$Y_2 = A \operatorname{sen}(\omega t + kx) = 2 \operatorname{sen} \pi\left(\frac{t}{5} + \frac{x}{3}\right)$$

c) La superposición de ambas ondas da:

$$Y = Y_1 + Y_2 = A\,2 \operatorname{sen} \omega t \cdot \cos kx = 4 \cos \frac{\pi}{3}x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{5}t$$

d) Los ceros de la onda resultante verifican:

$$\cos \frac{\pi}{3} x = 0$$

lo que se cumple para:

$$\frac{\pi}{3} x = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

de donde:

$$x = \frac{3}{2} (2n + 1) = \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{15}{2}, \ldots$$

Los máximos y mínimos están en puntos que verifican:

$$\cos \frac{\pi}{3} x = \pm 1$$

lo que se cumple para:

$$\frac{\pi}{3} x = n\pi$$

es decir:

$$x = 3n = 0, 3, 6, \ldots$$

e) La representación de la onda se ha hecho en la Figura 27.13.

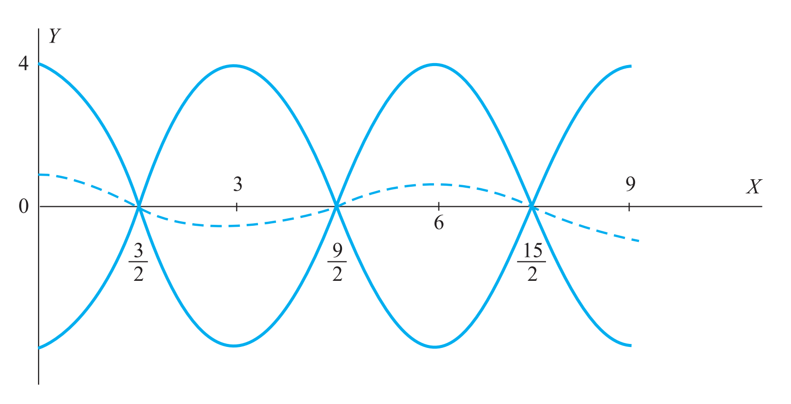


Figura 27.13.

27.8 Difracción

El principio de propagación rectilínea de los movimientos ondulatorios en un medio homogéneo, por el cual aquéllos se representan mediante rayos normales a la superficie de onda, deja de verificarse cuando al movimiento ondulatorio se le interpone un obstáculo. La experiencia nos confirma que el movimiento ondulatorio bordea el obstáculo y aparece en puntos que serían prohibidos según la teoría geométrica de propagación rectilínea. Podemos comprobar habitualmente cómo las ondas llegan al receptor aunque entre éste y la fuente emisora exista un obstáculo opaco a ellas, sin necesidad de reflexión.

La forma más sencilla de explicar los fenómenos de difracción consiste en aplicar el principio de Huygens. En la Figura 27.14, un tren de ondas planas llega a un obstáculo y, según la teoría geométrica de propagación rectilínea, debería propagarse como se indica; pero ello no es así, las ondas bordean el obstáculo y aparecen en la zona prohibida geométricamente. En la Figura 27.15 se representa la construcción de Huygens para la formación de nuevos frentes de ondas, mecanismo por el cual la onda penetra en zonas prohibidas por la teoría de propagación rectilínea.

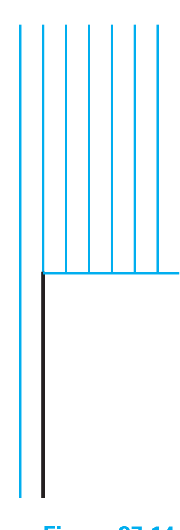


Figura 27.14.

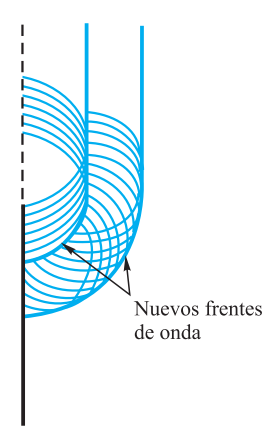


Figura 27.15.

Análogamente, al interponer a un movimiento ondulatorio una pantalla opaca a él con un pequeño orificio, cuyas dimensiones sean del orden de la longitud de onda de aquél, de acuerdo con el principio de propagación rectilínea, el movimiento ondulatorio debería atravesar la pantalla por el orificio y quedar confinado al cilindro cuya base es el citado orificio (Figura 27.16); pero ello no es así, ya que éste se extiende a la zona prohibida geométricamente, en una sucesión alternativa de zonas en las que aparece con mayor o menor intensidad. En la Figura 27.17 se ha hecho la construcción de Huygens para el frente de onda que llega a la ranura.

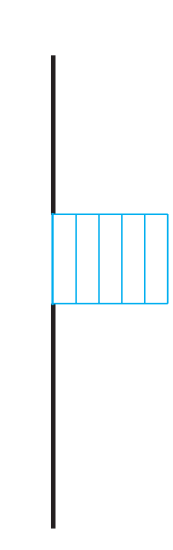


Figura 27.16.

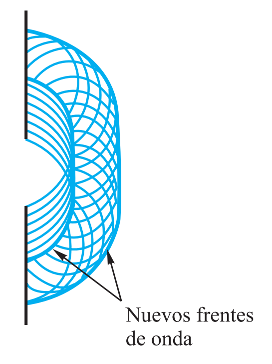


Figura 27.17.

Este fenómeno, por el cual los movimientos ondulatorios bordean los obstáculos y, en general, penetran en zonas prohibidas por la teoría de propagación rectilínea, apareciendo zonas con diferente intensidad, se denomina *difracción*. El fenómeno se muestra con intensidad cuando la longitud de onda es comparable al tamaño de la abertura. Así, en la realidad, es fácil comprobar la difracción del sonido, pero no la de la luz.

Tanto la interferencia como la difracción son el resultado de la superposición de ondas secundarias, pero hay una diferencia fundamental entre ambas, la interferencia

se produce cuando el número de ondas superpuestas es finito o el número de fuentes emisoras discreto, mientras que la difracción se produce cuando el número de ondas superpuestas es infinito o el sistema emisor una fuente continua.

La difracción se llama *de Fraunhofer* cuando los rayos incidentes son paralelos entre sí y los difractados también lo son. Es decir, cuando tanto el foco emisor como el observador se encuentran a distancia infinita del obstáculo en el cual se produce la difracción. Por el contrario, cuando el foco emisor, el observador o ambos se encuentran a distancia finita del obstáculo, la difracción se llama *de Fresnel*.

La gran importancia que la difracción tiene en el campo de la Optica física hace que pospongamos su estudio a los capítulos dedicados a ésta.

27.9 Efecto Doppler

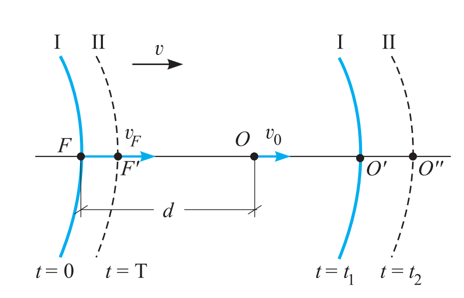


Figura 27.18.

Cuando entre la fuente emisora de ondas, el observador o receptor de las mismas, y el medio propagador hay algún movimiento relativo, la frecuencia que percibe el observador es distinta de la emitida por la fuente. Este fenómeno se conoce con el nombre de efecto Doppler, en honor a Christian Johann Doppler (1803-1853), quien lo puso de manifiesto por primera vez en 1842.

Supongamos que el medio propagador está en reposo respecto al sistema de referencia elegido, y que el observador y la fuente se mueven en la misma dirección y sentido con velocidades, respecto al sistema fijo, v_0 y v_F, respectivamente (Figura 27.18). En el instante inicial, están separados por una distancia d, y sea v la velocidad de propagación del movimiento ondulatorio respecto al medio propagador.

El frente de onda I, emitido en F, en el instante inicial $t = 0$, alcanzará al observador en la posición O', después de un cierto tiempo t_1, debiendo verificarse:

$$FO' = d + OO' \quad \text{o bien:} \quad vt_1 = d + v_0 t_1$$

y la onda emitida en el instante $t = 0$ y en la posición F alcanzará al observador en la posición O' y en el instante:

$$t_1 = \frac{d}{v - v_0}$$

Transcurrido el tiempo correspondiente a un periodo T del movimiento ondulatorio, la fuente emite un nuevo frente de ondas análogo al primero. Durante este tiempo T, la fuente habrá recorrido el espacio $FF' = v_F T$, emitiendo el segundo frente en F'. Este nuevo frente alcanzará al observador en el instante t_2 y posición O''. El espacio recorrido por el observador es $OO'' = v_0 t_2$ y el recorrido por el segundo frente de onda es:

$$F'O'' = FO + OO'' - FF' = d + v_0 t_2 - v_F T$$

Este espacio, puesto que el tiempo que está viajando el segundo frente es $t_2 - T$, debe ser $F'O'' = v(t_2 - T)$, con lo cual:

$$v(t_2 - T) = d + v_0 t_2 - v_F T \quad \text{o} \quad t_2 = \frac{d + (v - v_F)T}{v - v_0}$$

En consecuencia, para el observador, el tiempo que transcurre entre la recepción de dos frentes de onda consecutivos o, lo que es igual, el periodo T‘ del movimiento ondulatorio recibido, es:

$$T' = t_2 - t_1 = \frac{v - v_F}{v - v_0} T$$

y la relación entre la frecuencia que emite la fuente, ν, y la percibida por el observador, ν', es:

$$\nu' = \frac{v - v_0}{v - v_F}\,\nu \qquad [27.43]$$

Frecuencia percibida medio fijo

Si la fuente es fija, $v_F = 0$, y la anterior se escribe:

$$\nu' = \frac{v \pm v_0}{v}\,\nu$$

con signo *menos* cuando el observador se aleja de ella, y con signo *más*, cuando se acerca, verificando $\nu < \nu' < 2\nu$.

Si el observador está fijo, $v_0 = 0$, la [27.43] se escribe:

$$\nu' = \frac{v}{v \pm v_F}\,\nu$$

con signo menos cuando se acerca la fuente, y con signo más, cuando se aleja, verificando $0 < \nu' < \nu$.

La Ecuación [27.43] es de validez general, sin más que considerar las velocidades con signo positivo, como en el caso estudiado, cuando el sentido de la velocidad es el de llegada de las ondas al observador, y negativo en caso contrario.

En la deducción de la Expresión [27.43] hemos supuesto el medio propagador en reposo respecto al sistema de referencia, en el cual se mueven el observador y la fuente. Cuando el medio propagador se mueva, respecto al sistema de referencia considerado, con velocidad $\mathbf{v}_m$, la velocidad de las ondas respecto al sistema de referencia será $\mathbf{V} = \mathbf{v}_m + \mathbf{v}$ y, en el caso de que también tenga la misma dirección de $\mathbf{v}_0$ y $\mathbf{v}_F$, la [27.43] se expresará:

$$\nu' = \frac{v + v_m - v_0}{v + v_m - v_F}\,\nu \qquad [27.44]$$

Frecuencia percibida medio móvil

El efecto Doppler en las ondas electromagnéticas presenta grandes singularidades, aunque los efectos cualitativos sean los mismos. Por una parte, las ondas electromagnéticas no necesitan de un medio material para su propagación y, por otra, la velocidad de propagación es constante, independiente del movimiento relativo de la fuente y el observador. Por ello, para la deducción de la ecuación que rige el citado efecto en las ondas electromagnéticas, se hace necesaria la aplicación de la Mecánica relativista se tratará en un capítulo posterior.

Así como el efecto Doppler en ondas acústicas se observa corrientemente, en las ondas electromagnéticas es de difícil observación por la alta velocidad de éstas. Únicamente en cuerpos astronómicos o partículas atómicas puede ser observado. En los cuerpos astronómicos, el efecto se traduce en una variación de la longitud de onda en los espectros que de ciertos elementos nos llegan, respecto a las longitudes de onda de esos mismos espectros emitidos en reposo sobre la Tierra. Cuando la longitud de onda es mayor en los espectros que provienen del exterior que en los emitidos en la Tierra por los mismos elementos, se dice que hay un *corrimiento hacia el rojo*; las frecuencias serán menores, lo que nos indica que el emisor se está alejando. Por el contrario, cuando la longitud de onda es menor, se dice que hay un *corrimiento hacia el azul*; las frecuencias recibidas son mayores y ello nos indica que el emisor se está acercando. Todo ello permite determinar la velocidad relativa entre distintas partes del universo. Asi, parece ser que el sistema solar se mueve, dentro de nuestra galaxia, hacia la nebulosa Andrómeda, y que muchas nebulosas se alejan de nosotros a enormes velocidades, lo que apoya la teoría de un universo en expansión.

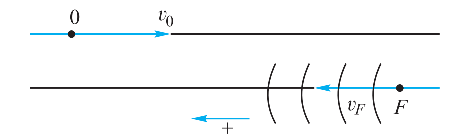
EJEMPLO 27.3

Un viajero de un tren, que circula a la velocidad de 72 km/h, observa que viene otro tren en sentido contrario y comprueba que la frecuencia del silbato de la locomotora de aquél disminuye al pasar, siendo la frecuencia observada después de pasar los tres cuartos de la observada antes de cruzarse. ¿Qué velocidad lleva el tren que pasa? Tómese para la velocidad del sonido 340 m/s.

Solución:

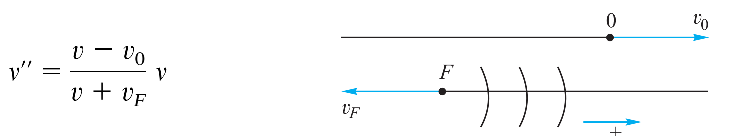
Sea ν la frecuencia emitida por el silbato de la locomotora del tren que pasa. La frecuencia recibida por el viajero antes de que los trenes se crucen es:

$$\nu' = \frac{v + v_0}{v - v_F}\,\nu$$



Después de haberse cruzado, la frecuencia recibida es:

$$\nu'' = \frac{v - v_0}{v + v_F}\,\nu$$



debiendo verificarse:

$$\frac{v - v_0}{v + v_F}\,\nu = \frac{3}{4}\,\frac{v + v_0}{v - v_F}\,\nu \quad ; \quad \frac{320}{340 + v_F} = \frac{3}{4}\,\frac{360}{340 - v_F} \quad ; \quad \frac{32}{340 + v_F} = \frac{27}{340 - v_F}$$

de donde:

$$340 \times 5 = 59 v_F \quad \text{y} \quad v_F = 28{,}81 \text{ m/s} = 103{,}73 \text{ km/h}$$

27.10 Onda de Mach o de choque

Este tipo de onda se produce cuando la fuente emisora se mueve en un medio con mayor velocidad que la de propagación de las ondas emitidas en ese medio.

Si en una posición, F, la fuente emite una onda, al cabo de un tiempo t esta onda habrá recorrido el espacio $r = vt$, y la fuente se habrá desplazado la distancia $d = V_F t$, llegando a F_1 (Figura 27.19). Si en una posición intermedia cualquiera, como la F_2, la fuente emite una nueva onda, puesto que los espacios recorridos en tiempos iguales son proporcionales a las velocidades, debe verificarse:

$$\frac{d}{d_1} = \frac{r}{r_1} = \frac{v_F}{v}$$

y, en consecuencia, todas las ondas emitidas por la fuente tienen como superficie tangente común un cono, de eje la dirección en la que se mueve la fuente y semiángulo cónico α, cuyo valor está dado por:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{v}{v_F}$$

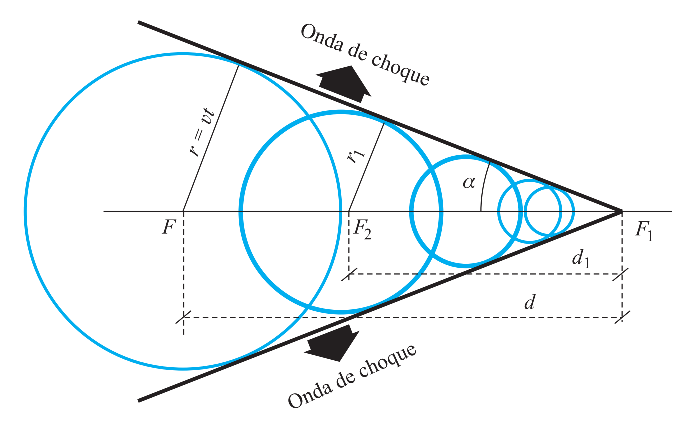


Figura 27.19.

Como resultado de todo, se propaga una onda cónica, que se denomina *de Mach* o *de choque* y cuya dirección de propagación, normal a ella, se ha indicado en la Figura 27.19. A la relación v_F/v se le llama *número de Mach* y es el número de veces que la velocidad de la fuente es superior a la de propagación de las ondas que emite, en el mismo medio.

Número de Mach

Como ejemplos de ondas de choque citaremos las creadas por ciertos tipos de embarcaciones, al navegar a mayor velocidad que las ondas superficiales que sobre el agua originan; las creadas por proyectiles, cohetes o aviones, que se mueven con velocidades superiores a las de las ondas sonoras que originan; y las ondas luminosas, emitidas por partículas cargadas al moverse en un medio con una velocidad mayor a la de fase de la luz en ese medio (radiación Cerenkov).

ULTRASONIDOS

Los ultrasonidos son ondas elásticas longitudinales de frecuencia superior a la máxima audible por el oído humano, es decir, por encima de 20 kHz. Su generación se hace mediante cristales de cuarzo o cerámicas piezoeléctricas, principalmente titanato de bario. El efecto piezoeléctrico fue descubierto por Pierre y Jacques Curie, en 1880: cuando se aplica una tensión a un cristal de cuarzo, este cambia de forma rápidamente y emite ondas acústicas en la región de los ultrasonidos; recíprocamente, cuando un ultrasonido llega a su superficie, la onda de presión es transformada por el cristal en señal eléctrica.

El primer emisor-receptor de ondas sonoras, fue desarrollado por Fesseden, en 1912, cuyo primer modelo utilizaba frecuencias entre 500 y 1 000 Hz, y con el cual consiguió detectar icebergs situados a 2 millas, pero que no llegó a poder ser montado sobre el Titanic, hundido en 1914 por el impacto contra un iceberg.

El desarrollo tecnológico de los ultrasonidos y la mayor parte de sus aplicaciones se realizaron a partir de la segunda guerra mundial. Sus aplicaciones son múltiples y muy variadas: detección de objetos, limpieza de superficies, soldaduras en microelectrónica, pruebas no destructivas en materiales y aplicaciones geológicas, médicas y oceanográficas.

La velocidad de propagación de los ultrasonidos, como la de cualquier onda elástica longitudinal, depende de la naturaleza y estado del medio, y en cada límite de separación de dos medios, o bien en los límites de cambio de propiedades del mismo medio, la onda sufrirá una reflexión, volviendo un eco, lo que permite detectar estructuras internas o variaciones del estado interno en zonas no accesibles de un cuerpo. Así, es posible detectar fisuras en materiales acabados sin afectarles, o analizar la calidad de las soldaduras, así como detectar variaciones de densidad e incluso variaciones en los parámetros elásticos, como estados de tensiones.

En la limpieza de superficies, eliminando óxidos o contaminantes, suelen usarse ultrasonidos de alta frecuencia, unos 6 a 7 MHz, que al impactar sobre la superficie a limpiar, transfieren su energía a las partículas adheridas y las hacen saltar de la superficie. Su uso en microelectrónica permite soldar sin elevar la temperatura, con lo cual se preserva el buen estado y funcionamiento del dispositivo electrónico. La potencia utilizada es de unos 4 kW y las frecuencias empleadas entre 3 y 4 MHz.

Su uso en medicina fue avistado por el médico austriaco Teodoro Dussic, en 1942, pero realmente no comenzó a hacerse de forma general y eficaz hasta 1960. La velocidad de propagación de los ultrasonidos en los tejidos humanos se ha establecido en unos 1 540 m/s. Las frecuencias utilizadas oscilan entre 2 y 7 MHz; a frecuencias mayores aumenta la energía del ultrasonido y aumenta la resolución, pero disminuye su poder de penetración, al ser mayor la absorción de las frecuencias más altas. Las frecuencias más bajas (2 MHz) se usan en adultos, en los cuales es necesario un mayor poder de penetración, y las más altas en jóvenes. Su utilización en medicina ha abierto grandes posibilidades: permite la detección de tumores, especialmente en cerebro, hígado, páncreas, riñón; la visualización del feto, para conocer su estado y su evolución, y con pequeños terminales, diseñados para ser introducidos por los orificios naturales del cuerpo humano, es posible examinar el estómago, la próstata, el útero, el colon y el recto. Si el ultrasonido se refleja sobre una superficie móvil, debido al efecto Doppler, la frecuencia del eco será diferente a la del pulso emitido y ello permite detectar flujos internos y velocidades de superficies móviles, lo que es de gran importancia en cardiología, para el estudio del ritmo cardiaco y los flujos en válvulas, arterias y venas.

La detección de pequeños cuerpos extraños en el interior del cuerpo es de gran utilidad, debiendo ser el tamaño de estos mayor que la longitud de onda del ultrasonido empleado. Si usamos frecuencias de 7 MHz y tomamos para la velocidad de propagación del ultrasonido en los tejidos 1 540 m/s, la longitud de onda de este ultrasonido dentro del cuerpo humano es $\lambda = v/\nu = 1\,540/7 \times 10^6 = 220 \times 10^{-6}$ m = 0,22 mm, con lo cual cuerpos de un cuarto de milímetro pueden ser detectados, siempre que la capacidad de penetración del citado ultrasonido sea suficiente.

Su aplicación en oceanografía se hace fundamentalmente mediante el *sonar*, palabra que es un acrónimo de Sound Navigation and Ranging y que corresponde a un sistema de detección de objetos dentro del mar utilizando ondas sonoras. Básicamente podemos considerar dos tipos de sonar: el activo y el pasivo. En el activo se emiten ondas acústicas que, al ser refleja-

das por el objeto, vuelven y son detectadas, obteniéndose información de la posición y velocidad del objeto detectado. El sonar pasivo se limita a detectar los sonidos que provienen de los diferentes focos sumergidos, pero no es capaz de detectar elementos no ruidosos, como profundidad o forma de la superficie del fondo, barcos hundidos o simplemente parados.

El uso de ondas mecánicas longitudinales dentro del agua presenta ventajas frente a las ondas electromagnéticas, debido a que el agua del mar es bastante buen conductor de la electricidad y atenúa muy fuertemente las ondas electromagnéticas. Así, para una frecuencia de 1 Khz la atenuación de una o.e.m. es aproximadamente de 1 500 dB/Km, mientras que para una onda sonora de esa frecuencia es de 0,05 dB/Km. La atenuación de las ondas sonoras depende de su frecuencia, siendo menor cuanto más baja es aquella. Sin embargo la emisión de bajas frecuencias exige antenas mayores y ello acaba presentando una limitación.

Parece ser que el primero que observó la propagación del sonido en el agua del mar fue Leonardo Da Vinci (1452-1519), en 1490, el cual lo expresó de la siguiente forma: *si paras tu barco e introduces el extremo de un tubo en el agua y aplicas el oído al otro extremo*, *oirás a barcos que se encuentran a gran distancia*.

La primera medición de la velocidad de propagación del sonido en el agua se realizó en 1827, en el lago Ginebra, por el físico suizo Daniel Colladon y el matemático francés Charles Sturn, los cuales obtuvieron el valor de 1 434 m/s.

A partir del año 1919, Steinberger y otros científicos alemanes estudiaron la velocidad de propagación de las ondas sonoras en función de la temperatura y salinidad del agua, lo que permitió a Spilhaus, en 1937, desarrollar el *batitermógrafo*, que permitía medir la temperatura a distintas profundidades.

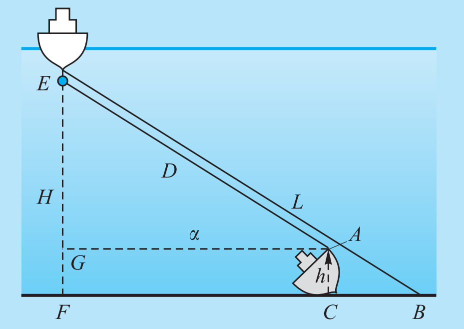
Durante la Segunda Guerra Mundial se desarrollaron diferentes y sofisticadas técnicas de aplicación del sonar, que permiten detectar los contactos a gran distancia, medir esta y la velocidad y dirección en la que navega. Toda la tecnología de uso militar ha sido útil en diferentes usos civiles; así, el sonar se aplica en el reconocimiento de los fondos marinos, en la detección de bancos de pesca, en la medición del espesor de capas de hielo y en la localización de barcos hundidos, por ejemplo. Para estos fines es de gran utilidad el *sonar de barrido lateral*, en el cual, tanto la emisión como la recepción se hacen por los laterales del equipo emisor-receptor y que inicialmente fue diseñado para la detección de minas marinas. Las frecuencias usuales varían entre 5 y 50 Mhz, las mayores frecuencias dan mejor resolución, pero son maś atenuadas y por ello se consiguen menores alcances.

Las formas del fondo del mar o la posición y tamaño de los barcos hundidos se determinan utilizando los datos recogidos del sonar, que son: H, profundidad del fondo del mar; D, distancia al objeto detectado, y L, distancia al fondo por encima del objeto detectado, las cuales se indican en la figura. Con ellas podemos determinar la altura del objeto o accidente detectado sin mas que considerar la semejanza de los triángulos EBF y ABC: h/H: $(L - D)/L$, donde la altura es $h = H(1 - D/L)$. También es fácil determinar la distancia al objeto según la horizontal, ya que en el triángulo EAG se verifica:

$$d^2 = D^2 - (H - h)^2 = D^2 - (HD/L)^2 = D^2(1 - H^2/L^2)$$

de donde

$$d = D\sqrt{1 - (H/L)^2}$$



Sistema Internacional de unidades

APÉNDICE A

En 1946, el Comité Internacional de Pesas y Medidas (CIPM) adoptó el acuerdo de establecer un Sistema Internacional de unidades (S.I.), que debiera estar basado en el sistema MKS (metro, kilogramo, segundo). Diferentes Conferencias Generales de Pesas y Medidas (CGPM) han ido modificando las definiciones de las citadas unidades y han adoptado cuatro nuevas unidades fundamentales: el kelvin (K), para la temperatura; el amperio (A), para la intensidad de corriente eléctrica; la candela (cd), para la intensidad luminosa y el mol como unidad de cantidad de sustancia, quedando configurado el S.I. con siete magnitudes fundamentales y sus siete unidades, que son:

A.1 Unidades fundamentales

De longitud

La 17 Conferencia General de Pesas y Medidas estableció, en 1983, una nueva definición para la unidad de longitud, el *metro* (m), como:

Longitud recorrida por la luz en el vacío durante un tiempo de 1/299 792 458 segundos.

Esta definición implica haber tomado para la velocidad de la luz en el vacío el valor exacto c = 299 792 458 m/s

De masa

La 3.ª CGPM, en 1901, definió la unidad de masa, el *kilogramo* (kg), como:

La masa del prototipo de platino iridiado depositado en el Pabellón de Breteuil, de Sèvres (París).

De tiempo

La 13 CGPM, en 1968, definió al *segundo* (s), como:

La duración de 9 192 631 770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133.

El CIPM, en 1997, matizó que el estado fundamental de cesio se refiere al correspondiente a 0 K.

De temperatura

La 13 CGPM también definió a la unidad de temperatura o *grado kelvin* (K), como:

La fracción 1/273,16 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua.

Este mismo nombre y este mismo símbolo son utilizados para expresar un intervalo de temperatura; el cual puede también expresarse en grados Celsius (°C), de igual tamaño que el kelvin, pero cuya escala tiene su origen en el punto de congelación del agua pura a la presión de 1 atm, $T_0 = 273{,}15$ K, por lo cual se verifica $T(\text{K}) = t(^{\circ}\text{C}) + 273{,}15$.

De intensidad de corriente eléctrica

La unidad de intensidad de corriente eléctrica, *el amperio* (A), fue establecido por la 9.ª CGPM, en 1946, como:

La intensidad de una corriente eléctrica constante que, mantenida en dos conductores paralelos, rectilíneos, de longitud infinita, de sección circular despreciable y colocados en el vacío a una distancia de un metro uno de otro, produce entre estos dos conductores una fuerza igual a 2×10^{-7} N por metro de longitud.

De intensidad luminosa

La 16 CGPM, en 1979, definió la unidad de intensidad luminosa, *la candela* (cd), como:

La intensidad luminosa, en una cierta dirección, de una fuente que emite radiación monocromática de frecuencia 540×10^{-12} y que tiene una intensidad radiante en esa dirección de 1/683 vatios por estereoradián.

De cantidad de sustancia

La 14 CGPM, en 1971, adoptó como unidad de cantidad de sustancia al *mol* (mol), definiéndolo como:

La cantidad de sustancia que contiene un número de partículas igual al de átomos contenidos en 0,012 kg de ^{12}C.

Las partículas pueden ser átomos, moléculas, iónes, electrones u otro tipo de partículas que deben ser especificadas. En 1980, el CIPM matizó que el átomo de carbono debe estar en reposo y en su estado fundamental.

A.2 Unidades suplementarias y sus derivadas

Magnitud	Unidad	Símbolo
Ángulo plano	radián	rad
Ángulo sólido	estereoradián	sr
Velocidad angular	radián por segundo	$rad \cdot s^{-1}$
Aceleración angular	radián por segundo cuadrado	$rad\ s^{-2}$
Intensidad de energía radiante	vatio por estereoradián	$W \cdot sr^{-1}$
Radiancia	vatio por metro cuadrado y estereoradián	$W \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1}$

A.3 Unidades derivadas (sólo de la materia dada en este tomo I)

Magnitud	Unidad	Símbolo	Otra expresión
Superficie	metro cuadrado	m^2	
Volumen	metro cúbico	m^3	
Velocidad	metro por segundo	m/s	
Aceleración	metro segundo cuadrado	m/s^2	
Densidad	kilogramo metro cúbico	kg/m^3	
Volumen específico	metro cúbico por kilo	m^3/kg	
Fuerza	newton	N	
Momento de una fuerza	newton metro	$N \cdot m$	
Presión (tensión)	pascal	Pa	N/m^2
Tensión superficial	newton por metro	N/m	
Viscosidad dinámica	pascal segundo	$Pa \cdot s$	$N \cdot s/m^2$
Viscosidad cinemática	metro cuadrado por segundo	m^2/s	
Trabajo, energía	julio	J	$N \cdot m$
Potencia, flujo radiante	vatio	W	J/s
Densidad de energía	julio metro cúbico	J/m^3	
Entropía, capacidad calorífica	julio por kelvin	J/K	
Calor específico	julio por kilogramo y grado	$J/kg \cdot K$	
Calor molar	julio por mol y grado	$J/mol \cdot K$	
Conductividad térmica	vatio por metro y grado	$W/m \cdot K$	
Frecuencia	hercio	Hz	
Número de onda	ondas por metro	m^{-1}	
Irradiancia	vatio por metro cuadrado	W/m^2	$N/s \cdot m$

A.4 Otras unidades aceptadas

De longitud:

Milla náutica		1 milla náutica = 1 852 m
Micra	μ	$1\mu = 10^{-6}$ m
Amstróng	Å	$1A = 10^{-10}$ m
Unidad astronómica	ua	$1\ ua = 149\ 597\ 870\ 691 \times 10^{11}$ m

De masa:

Gramo	g	$1\ g = 10^{-3}$ kg
Tonelada	t	$1\ t = 10^{3}$ kg

De tiempo:

Minuto	m	1 m = 60 s
Hora	h	1 h = 3 600 s
Día	d	1 d = 24 h = 1 440 m = 86 400 s

De ángulo:

Grado	º	$1^{o} = \pi/180$ rad
Minuto	′	$1' = 1^{o}/60 = \pi/10\,800$ rad
Segundo	″	$1'' = 1'/60 = 1^{o}/3\,600 = \pi/648\,000$ rad

De superficie:

Área	a	1 a = 100 m^2
Hectárea	ha	1 ha = 100 a = 10 000 m^2

De volumen:

Litro	l	1 l = 10^{-3} m^3

De velocidad:

Nudo		Nudo = Milla/hora = 1,852 km/h = 0,514 m/s

De presión:

Atmósfera estándar	atm	1 atm = 101 325 Pa
Bar	bar	1 bar = 10^5 Pa
Torr	torr	1 torr = 101 325/760 Pa

De energía:

Caloría	cal	1 cal = 4,1855 J CIPM en 1950
		1 cal = 4,1868 J Internacional
		1 cal = 4, 18398 J Termodinámica

Tablas de equivalencia de unidades

APÉNDICE B

B.1 Unidades de longitud y factores de conversión

De \ A	1 cm	1 m	1 pulgada	1 pie	1 yarda	1 milla	1 milla náutica
1 cm	1	10^{-2}	0,3937	0,03281	0,01094	$6{,}2138 \cdot 10^{-6}$	$5{,}3996 \cdot 10^{-6}$
1 m	10^2	1	39,37	3,2808	1,0936	$6{,}2138 \cdot 10^{-4}$	$5{,}3996 \cdot 10^{-4}$
1 pulgada	2,54	$2{,}54 \cdot 10^{-2}$	1	0,08333	0,0278	$1{,}5783 \cdot 10^{-5}$	$1{,}3715 \cdot 10^{-5}$
1 pie	30,480	0,3048	12	1	0,33333	$1{,}8939 \cdot 10^{-4}$	$1{,}6458 \cdot 10^{-4}$
1 yarda	91,44	0,9144	36	3	1	$5{,}6818 \cdot 10^{-4}$	$4{,}9374 \cdot 10^{-4}$
1 milla	160 934	1 609,34	63 360	5 280	1 760	1	0,869
1 milla náutica	$1\,852 \cdot 10^2$	1 852	$7{,}2913 \cdot 10^4$	$6{,}07612 \cdot 10^3$	2 025,36	1,1508	1

B.2 Unidades de masa y factores de conversión

De \ A	1 kg	1 g	1 silug	1 onza	1 libra
1 kg	1	10^3	$6{,}8522 \cdot 10^{-2}$	35,274	2,2046
1 g	10^{-3}	1	$6{,}8522 \cdot 10^{-5}$	$3{,}5274 \cdot 10^{-2}$	$2{,}2046 \cdot 10^{-3}$
1 silug	14,5939	14 593,9	1	$5{,}1479 \cdot 10^{-2}$	32,1742
1 onza	$2{,}83495 \cdot 10^{-2}$	28,3495	$1{,}9426 \cdot 10^{-3}$	1	$6{,}25 \cdot 10^{-2}$
1 libra	0,45359	453,59	$3{,}1081 \cdot 10^{-2}$	16	1

B.3 Unidades de volumen y factores de conversión

De \ A	m^3	Litro	Pulgada^3 in^3	Pie^3 ft^3	Galón U.S.	Bushel U.S.	Barril U.S.
m^3	1	10^3	$6{,}1024 \cdot 10^4$	35,3145	264,173	28,3768	6,2893
Litro	10^{-3}	1	61,0236	$3{,}53145 \cdot 10^{-2}$	0,264173	$2{,}8377 \cdot 10^{-2}$	$6{,}2893 \cdot 10^{-3}$
Pulgada^3 (in^3)	$1{,}6387 \cdot 10^{-5}$	$1{,}6387 \cdot 10^{-2}$	1	$5{,}7870 \cdot 10^{-4}$	$4{,}329 \cdot 10^{-3}$	$4{,}6501 \cdot 10^{-4}$	$1{,}0306 \cdot 10^{-4}$
Pie^3 (ft^3)	$2{,}8317 \cdot 10^{-2}$	28,317	1 728,006	1	7,4806	0,8035	0,1781
Galón U.S.	$3{,}7854 \cdot 10^{-3}$	3,7854	231	0,13368	1	0,1074	$2{,}381 \cdot 10^{-2}$
Bushel U.S.	$3{,}524 \cdot 10^{-2}$	35,24	2 150,472	1,2445	9,3096	1	0,2217
Barril U.S.	0,159	159	9 702,724	5,615	42	4,5115	1

B.4 Unidades de fuerza y factores de conversión

De \ A	Newton	Dina	Kilo fuerza	Libra fuerza o thrust	Gramo fuerza	Onza fuerza o thrust
Newton	1	10^5	0,101972	0,22481	101,972	3,597
Dina	10^{-5}	1	$1{,}01972 \cdot 10^{-6}$	$2{,}2481 \cdot 10^{-6}$	$1{,}01972 \cdot 10^{-3}$	$3{,}597 \cdot 10^{-5}$
Kilo fuerza	9,80665	$9{,}80665 \cdot 10^5$	1	2,2046	10^{+3}	35,2736
Libra fuerza o thurst	4,4482	$4{,}4482 \cdot 10^5$	0,45359	1	$4{,}5359 \cdot 10^2$	16
Gramo fuerza	$9{,}80665 \cdot 10^{-3}$	980,665	10^{-3}	$2{,}2046 \cdot 10^{-3}$	1	$3{,}5274 \cdot 10^{-2}$
Onza fuerza o thurst	0,2780	$278 \cdot 10^2$	$2{,}8348 \cdot 10^{-2}$	$6{,}2496 \cdot 10^{-2}$	28,348	1

B.5 Unidades de presión y factores de conversión

De \ A	Libra $Pa = N/m^2$	Baria $dina/cm^2$	Torr mmHg	Atmósfera normal	Atmósfera técnica kgf/cm^2	mmH_2O	psi lb/in^2	Bar
Pascal $Pa = N/m^2$	1	10	$7{,}5006 \cdot 10^{-3}$	$9{,}8692 \cdot 10^{-6}$	$1{,}0197 \cdot 10^{-5}$	0,1019716	$1{,}4504 \cdot 10^{-4}$	10^{-5}
Baria $dina/cm^2$	10^{-1}	1	$7{,}5006 \cdot 10^{-4}$	$9{,}8692 \cdot 10^{-7}$	$1{,}0197 \cdot 10^{-6}$	$1{,}01972 \cdot 10^{-2}$	$1{,}4504 \cdot 10^{-5}$	10^{-6}
Torr mmHg	133,3224	1 333,224	1	$1{,}3158 \cdot 10^{-3}$	$1{,}3595 \cdot 10^{-3}$	13,5951	$1{,}9337 \cdot 10^{-2}$	$1{,}3332 \cdot 10^{-3}$
Atmósfera normal	101 325	$101{,}325 \cdot 10^4$	760	1	1,03323	$1{,}03322 \cdot 10^4$	14,6959	1,01325
Atmósfera técnica kgf/cm^2	98 066,50	980 665	735,5591	0,96785	1	10^4	14,2233	0,980665
mmH_2O	9,80665	98,0665	$7{,}3556 \cdot 10^{-2}$	$9{,}6785 \cdot 10^{-5}$	10^{-4}	1	$1{,}4223 \cdot 10^{-3}$	$9{,}80665 \cdot 10^{-5}$
psi lb/in^2	6 894,75	68 947,5	51,7149	$6{,}8046 \cdot 10^{-2}$	$7{,}0307 \cdot 10^{-2}$	$7{,}0307 \cdot 10^2$	1	$6{,}89475 \cdot 10^{-2}$
Barr	10^5	10^6	750,0615	0,98692	1,0197	$101{,}9716 \cdot 10^2$	145,0373	1

B.6 Unidades de energía y factores de conversión

De \ A	Julio	Ergio	Caloría	Vatio-hora	Atm. litro	Libra-pie	B.T.U.	CV hora
Julio	1	10^{+7}	0,239	$2{,}7778 \cdot 10^{-4}$	$9{,}8657 \cdot 10^{-3}$	0,7376	$9{,}4841 \cdot 10^{-4}$	$3{,}7767 \cdot 10^{-7}$
Ergio	10^{-7}	1	$0{,}239 \cdot 10^{-7}$	$2{,}7778 \cdot 10^{-11}$	$9{,}8657 \cdot 10^{-10}$	$0{,}7376 \cdot 10^{-7}$	$9{,}4841 \cdot 10^{-11}$	$3{,}7767 \cdot 10^{-14}$
Caloría	4,184	$4{,}184 \cdot 10^{7}$	1	$1{,}1622 \cdot 10^{-3}$	$4{,}1278 \cdot 10^{-2}$	3,0863	$3{,}9683 \cdot 10^{-3}$	$1{,}5802 \cdot 10^{-6}$
Vatio-hora	3 600	$3{,}6 \cdot 10^{10}$	860,4	1	35,5156	$2{,}6556 \cdot 10^{+3}$	3,4143	$1{,}3596 \cdot 10^{-3}$
Atm. litro	101,3614	$101{,}361 \cdot 10^{7}$	24,2253	$2{,}8156 \cdot 10^{-2}$	1	74,7753	$9{,}6133 \cdot 10^{-2}$	$3{,}8281 \cdot 10^{-5}$
Libra-pie	1,3558	$1{,}3558 \cdot 10^{7}$	0,3240	$3{,}7655 \cdot 10^{-4}$	$1{,}33734 \cdot 10^{-2}$	1	$1{,}2856 \cdot 10^{-3}$	$5{,}1195 \cdot 10^{-7}$
B.T.U.	$1{,}0544 \cdot 10^{+3}$	$1{,}0544 \cdot 10^{10}$	252	0,2929	10,4025	$7{,}7782 \cdot 10^{2}$	1	$3{,}9822 \cdot 10^{-4}$
CV hora	$2{,}6478 \cdot 10^{6}$	$2{,}6478 \cdot 10^{13}$	$6{,}3282 \cdot 10^{5}$	735,5	$2{,}6122 \cdot 10^{4}$	$1{,}9533 \cdot 10^{6}$	$2{,}5112 \cdot 10^{3}$	1

Algunas constantes físicas

APÉNDICE C

Constante	Valor	Unidad
Aceleración normal de la gravedad*	$g_0 = 9{,}80665$	m/s^2
Velocidad de la luz en el vacío*	$c = 299\,792\,458$	m/s
Presión atmosférica normal*	$p_0 = 101\,325$	Pa
Masa molar del ^{12}C*	$m(^{12}C) = 0{,}012$	kg/mol
Densidad normal del mercurio	$\rho_0 = 1{,}35951 \cdot 10^4$	kg/m^3
Constante de la gravitación	$G = 6{,}67259(85) \cdot 10 - {}^{11}$	$m^3/kg \cdot s^2$
Temperatura del agua en el punto triple	$T_t = 273{,}16$	K
Constante de los gases perfectos	$R = 8{,}314472(15)$	$J/mol \cdot K$
Número de Avogadro	$N_A = 6{,}02214199(47) \cdot 10^{23}$	mol^{-1}
Constante de Boltzmann	$k = 1{,}3806503(24) \cdot 10^{-23}$	J/K
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5{,}670400(40) \cdot 10^{-8}$	$W/m^2 \cdot K^4$
Constante de Planck	$h = 6{,}62606876(52) \cdot 10^{-34}$	$J \cdot s$
Constante de Wien	$b = 2{,}8977686(51) \cdot 10^{-3}$	$m \cdot K$
Radio ecuatorial del geoide terrestre	$R = 6\,378{,}388$	km
Masa de la Tierra	$M = 5{,}977 \cdot 10^{24}$	kg
Velocidad orbital de la Tierra	$\Omega = 1{,}991 \cdot 10^{-7}$	rad/s
Velocidad de rotación de la Tierra	$\omega = 7{,}272 \cdot 10^{-5}$	rad/s

* Valores adoptados por convenio internacional.

ÍNDICE

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

K

L

M

N

O

P

R

S

T

U

V

W



2ª Edición

Física General

Volumen 1

José María De Juana

El presente libro es el primer volumen de una obra sobre Física General, que se compondrá de dos, destinada a los alumnos de primer curso de universidad. En este volumen se presentan las partes de la Física correspondientes a la Mecánica, la Termodinámica y las Ondas, y ha sido estructurado en veintisiete capítulos. Su desarrollo se ha realizado siguiendo un método deductivo, partiendo de los principios fundamentales y exponiendo la materia objeto de estudio mediante deducciones lógicas con el apoyo de la herramienta matemática adecuada. Se ha huido de exponer una información para ser memorizada; el planteamiento ha sido el desarrollo lógico y secuencial de la ciencia física, lo que por otra parte favorece su memorización.

Puede decirse que la física es la ciencia de la medida, por lo cual el alumno debe alcanzar, además de un profundo conocimiento de sus principios, la habilidad de trabajar con ellos en el amplio campo de sus aplicaciones, para lo cual hemos procurado el desarrollo de una física analítica y cuantitativa. En este sentido, se incorpora gran cantidad de ejemplos, lo que sin duda ayudará a comprender mejor la teoría y a familiarizarse con su uso y aplicaciones.

También se ha incluido una serie de lecturas, en unas ocasiones de temas de actualidad y en otras históricos, así como biografías de grandes personalidades de la física, todo lo cual contribuirá a una más completa formación y amplia cultura de nuestros alumnos.



www.pearsoneducacion.com

